

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MASAYUKI ITÔ

Sur l'équation $N^n = N$ pour un noyau de convolution N

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. n° C1, p. C1-C2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A7_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉQUATION $N^n = N$ POUR UN NOYAU DE CONVOLUTION N

par Masayuti ITÔ

Soit X un groupe abélien localement compact et séparé. Pour un noyau de convolution N (c'est-à-dire une mesure de Radon positive) sur X , on note $N^1 = N$, $N^2 = N * N$, ..., $N^{n+1} = N^n * N$, ... dès que ceux-ci sont définis (au sens des mesures). Pour un noyau de convolution N sur X et pour un entier $n \geq 2$, on considère l'équation $N^n = N$.

M. KISHI l'a examinée dans le cas où $n = 2$, et obtenu le résultat suivant (voir [2]) :

THÉORÈME 1. - Si $N^2 = N$, alors $N = 0$, ou bien N est égal à la mesure de Haar de masse 1 sur un certain sous-groupe compact de X (1).

Nous nous proposons d'abord de donner la démonstration très simple du théorème 1. En l'utilisant, nous montrerons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit n un entier ≥ 2 . Pour que $N^n = N$, il faut et il suffit que $N = 0$, ou bien N est de la forme $N = \xi * \varepsilon_x$ (1), où ξ est la mesure de Haar de masse 1 sur un certain sous-groupe compact Γ et où x est un point de X vérifiant $(n-1)x \in \Gamma$.

On note ici ε_x la mesure de Dirac du point x .

Preuve du théorème 1. - Si $N \neq 0$ est à support compact, alors, en utilisant $N^2 = N$ et la transformation de Fourier, on voit immédiatement que N est la mesure de Haar de masse 1 sur un sous-groupe compact de X . Donc il suffit de montrer que le support de N , $\text{supp}(N)$, est compact. Posons pour tout $p \geq 0$,

$$N_p = \frac{1}{1+p} N;$$

alors, pour $p \geq 0$, $q \geq 0$ quelconques, $N_p - N_q = (q-p)N_p * N_q$ et $\lim_{p \rightarrow 0} N_p = N_0 = N$.

Par conséquent, $(N_p)_{p \geq 0}$ est la résolvante associée à N . Dans ce cas, il est bien connu que N vérifie le principe du balayage sur tout ouvert (2), et que,

(1) Pour un sous-groupe fermé Γ de X , une mesure de Haar ξ_Γ sur Γ , et pour $x \in X$, on note simplement $\xi_\Gamma * \varepsilon_x$ au lieu de $(\tilde{\varepsilon} \otimes \xi_\Gamma) * \varepsilon_x$, où $\tilde{\varepsilon}$ est la mesure de Dirac à l'origine dans X/Γ^x .

(2) On dit qu'un noyau de convolution N vérifie le principe du balayage sur tout ouvert si, pour une mesure de Radon positive μ dans X à support compact et pour un ouvert ω quelconque, il existe une mesure de Radon positive μ' portée par ω , telle que : (i) $N * \mu \geq N * \mu'$; (ii) $N * \mu = N * \mu'$ dans ω . Dans ce cas, on dit que μ' est une mesure balayée de μ sur ω relativement à N .

pour un filtre à droite $(V_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de voisinages compacts de l'origine avec $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha = X$,

$$\lim_{\alpha} N * \varepsilon_{C V_\alpha} = 0 \quad (\text{vaguement}),$$

où $\varepsilon_{C V_\alpha}$ est une mesure balayée de ε sur $C V_\alpha$ relativement à N (voir par exemple [1]).

On peut supposer que $N \neq 0$. Alors il existe un voisinage compact V de 0 tel que $N \neq N * \varepsilon'_{C V}$. Comme

$$N * (\varepsilon - \varepsilon'_{C V}) = N * (N * (2 - \varepsilon'_{C V})),$$

on a

$$\{x + y; x \in \text{supp}(N), y \in \text{supp}(N * (\varepsilon - \varepsilon'_{C V}))\} = \text{supp}(N * (\varepsilon - \varepsilon'_{C V})) \subset V.$$

Ceci donne immédiatement que $\text{supp}(N)$ est compact.

Preuve du théorème 2. - On peut supposer que $N \neq 0$ et $n \geq 3$. Comme N^{n-1} a un sens, $N^{n-2} * N^n = N^{2n-2}$ est défini, et

$$(N^{n-1})^2 = N^n * N^{n-1} = N * N^{n-2} = N^{n-1}.$$

D'après le théorème 1, il existe un sous-groupe compact Γ de X tel que N^{n-1} soit égal à la mesure de Haar unité ξ sur Γ . Soit $-x \in \text{supp}(N)$ quelconque. Alors $-(n-1)x \in \Gamma$ et $(n-1)x \in \Gamma$. Donc $(N * \varepsilon_x)^{n-1} = (N * \varepsilon_{-x})^n = \xi$. Comme $\text{supp}(N * \varepsilon_{-x}) \ni 0$, on a $\text{supp}(N * \varepsilon_x) \subset \Gamma$ et $\int \alpha N = 1$.

On a alors

$$\begin{aligned} N &= (N * \varepsilon_{-x}) * \varepsilon_x = (N * \varepsilon_x)^{n-1} * (N * \varepsilon_{-x}) * \varepsilon_{(n-1)_x} * \varepsilon_x \\ &= \xi * (N * \varepsilon_{(n-1)_x}) * \varepsilon_{(n-1)_x} * \varepsilon_x = \xi * \varepsilon_x, \end{aligned}$$

d'où le théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ITÔ (M.). - Sur le principe relatif de domination pour les noyaux de convolution, Hiroshima Math. J., t. 5, 1975, p. 293-350.
 [2] KISHI (M.). - Positive idempotents on a locally compact abelian group, Kôdai math. Semin. Reports, t. 27, 1976, p. 181-187.

(Texte reçu le 13 janvier 1977)

Masayuti ITÔ
 Fugi-ga-oka 6-1
 KONAN (Japon)