Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Hicham Fakhoury

Approximation des bornés d'un espace de Banach par des compacts et applications

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. n° 22, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A6_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
16e année, 1976/77, n° 22, 5 p.
9 juin 1977

APPROXIMATION DES BORNÉS D'UN ESPACE DE BANACH PAR DES COMPACTS ET APPLICATIONS

par Hicham FAKHOURY

1. Introduction et notations.

La théorie de la meilleure approximation par des opérateurs compacts s'est développée vers 1970 essentiellement dans le cas des opérateurs entre espaces de Hilbert. En effet, il est établi, dans [5] et [6], que tout opérateur de $\mathcal{L}(H)$ possède une meilleure approximation dans $\mathcal{K}(H)$; de plus, il est prouvé par un exemple que l'existence d'une telle approximation est impossible même dans le cas de certains espaces hilbertisables. Dans un cadre plus général, nous avons renforcé ce résultat grâce à l'utilisation des M-idéaux. En effet, il existe d'après [1] une projection (non linéaire) continue de meilleure approximation d'un espace de Banach E sur un sous-espace F dès qu'il existe une projection linéaire Q du dual E' de E sur l'annulateur F^0 de F qui vérifie

$$\|e'\| = \|Q(e')\| + \|e' - Q(e')\| \ ; \quad \forall\ e' \in E' \ .$$

Il suffit ainsi de remarquer que l'espace $\mathcal{K}(H)$ vérifie cette hypothèse dans $\mathcal{L}(H)$. Plus généralement, c'est le cas pour une large classe d'espaces de Banach qui contient les espaces $C_0(\underset{\sim}{N})$ et $\ell^p(\underset{\sim}{N})$ pour $1 < p < \infty$.

Plus récemment, [2], nous avons montré par des méthodes différentes que si $V = L^1(\mu)$ et $W = C(X)$, alors tout opérateur de $\mathcal{L}(V , W)$ admet une meilleure approximation dans $\mathcal{K}(V , W)$. Notre but dans cet exposé est de revenir sur l'approximation de tout opérateur de $V = L^1(\mu)$ dans un espace de Banach W par des opérateurs compacts en montrant que cette situation se présente dès que les parties fermées bornées de W vérifient une certaine propriété géométrique qui sera définie plus loin.

Si A est une partie d'un espace métrisable (Y , d) , on note $d(x , A)$ la distance de x à la partie A .

Soient V et W deux espaces de Banach ; on note $\mathcal{L}[V , W]$ (resp. $\mathcal{K}[V , W]$) l'espace des opérateurs bornés (resp. compacts) de V dans W muni de sa norme canonique. Dans la suite, (X , Σ , μ) sera un espace mesuré muni d'une mesure positive, on suppose toujours que Σ est une tribu complète. Si $V = L^1(\mu)$, on dira qu'un opérateur T de $\mathcal{L}[V , W]$ est représentable s'il existe une fonction g de $L^\infty(\mu , W)$ telle que

$$T(f) = \int fg \, d\mu \ .$$

Pour une telle fonction g , on appelle <u>image essentielle</u> de g le fermé Bg de W tel que, pour tout ω de Bg et pour tout $\varepsilon > 0$, la mesure de l'ensemble

$g^{-1}[B(\omega , \varepsilon)]$ est strictement positive, où $B(\omega , \varepsilon)$ est la boule fermée de W de centre ω et de rayon ε .

Cet article constitue seulement un résumé ; les résultats énoncés ici seront démontrés et développés ultérieurement [3].

2. Les résultats.

Soient W un espace de Banach, et B une partie bornée. Suivant KURATOWSKI, on appelle mesure de non-compacité de B la quantité

$$\alpha[B] = \inf\{\lambda \text{ ; il existe un recouvrement fini de } B \text{ par des boules de rayon inférieur à } \lambda\} .$$

Les propriétés de croissance et de sous-additivité de la mesure de non-compacité sont classiques, signalons toutefois la propriété suivante qui nous permettra d'introduire une définition. En effet, pour toute partie bornée B de W et tout compact K de W , on a

$$(*) \qquad \sup\{d(x , K) \ ; \ x \in B\} \geqslant \alpha[B] .$$

Si K_0 est un compact de W pour lequel l'inégalité précédente se ramène à une égalité, on dira que K_0 réalise la meilleure approximation de B .

Soient V et W deux espaces de Banach ; l'inégalité (*) permet de montrer que, pour tout opérateur T de $\mathcal{L}(V , W)$, on a

$$d[T , \mathcal{K}(V , W)] \geqslant \alpha[T(B(V))] .$$

Cependant, dans le cas où $V = L^1(\mu)$, on peut prouver la proposition suivante.

PROPOSITION 2. 1. - *Soient T un opérateur représentable de $V = L^1(\mu)$ dans un espace de Banach W par une fonction g de $L^\infty(\mu , W)$, et Bg l'image essentielle de g dans W . Alors*

$$d[T , \mathcal{K}(V , W)] = \alpha[Bg] = \alpha[T(B(V))] .$$

La démonstration consiste à prouver l'égalité des deux derniers termes en utilisant la définition de Bg et les propriétés de la mesure de non-compacité. Il reste alors à établir que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$d(T , \mathcal{K}(V , W)] \leqslant \alpha[Bg] + \varepsilon .$$

Ceci s'effectue en construisant un opérateur de rang fini, représenté par une fonction simple $h = \sum_1^n \chi_{E_i} \omega_i$ telle que

$$\|g - h\|_\infty \leqslant \alpha[Bg] + \varepsilon .$$

THÉORÈME 2. 2. - *Soient T un opérateur représentable de $V = L^1(\mu)$ dans un espace de Banach W par une fonction g de $L^\infty(\mu , W)$, et Bg l'image essentielle de g dans W . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Il existe un opérateur de $\mathcal{K}(V , W)$ qui réalise la meilleure approximation de T .

(b) L'image essentielle Bg de la fonction g possède un compact de meilleure approximation.

La preuve de l'assertion (a) $\Longrightarrow$ (b) est immédiate. Pour montrer (b) $\Longrightarrow$ (a) , il s'agit de construire une fonction h de $L^{\infty}(\mu , W)$ à image essentielle compacte telle que $\|h - g\|_{\infty} = \alpha[Bg]$. Soient K_0 un compact de W qui réalise la meilleure approximation de Bg et P_{K_0} l'application multivoque de meilleure approximation de W dans l'ensemble des parties de K_0 .

Cette fonction est s. c. s. et admet, d'après le théorème de sélection de Kuratowski et Ryll-Nardzewski, une sélection borélienne φ . La fonction $h = \varphi \circ g$ répond à la question.

COROLLAIRE 2. 3. - Soit W_1 un sous-espace fermé de W ; on suppose qu'il existe une projection 1-lipschitzienne de W sur W_1 . Alors, pour tout opérateur représentable de $V = L^1(\mu)$ dans W_1 , on a

$$d[T , \mathcal{K}(V , W)] = d[T , \mathcal{K}(V , W_1)] .$$

De plus, si T admet une meilleure approximation compacte dans $\mathcal{K}(V , W)$, il en admet une dans $\mathcal{K}(V , W_1)$.

Signalons que le résultat précédent est tout à fait trivial, sans aucune hypothèse sur V , si la projection de W sur W_1 est linéaire. L'intérêt de ce corollaire réside donc dans le fait de considérer des projections 1-lipschitziennes non linéaires.

THÉORÈME 2. 4. - Soit W un espace de Banach ; les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Tout fermé borné séparable de W admet un compact de meilleure approximation.

(b) Tout opérateur de $V = \ell^1(\mathbb{N})$ dans W admet une meilleure approximation dans $\mathcal{K}(V , W)$.

(c) Tout opérateur représentable de $V = L^1([0 , 1])$ dans W admet une meilleure approximation dans $\mathcal{K}(V , W)$.

(d) Pour toute mesure bornée μ , tout opérateur représentable de $V = L^1(\mu)$ dans W admet une meilleure approximation dans $\mathcal{K}(V , W)$.

(e) Il existe une mesure bornée μ , telle que $L^1(\mu)$ est de dimension infinie, et telle que tout opérateur représentable de $V = L^1(\mu)$ dans W admet une meilleure approximation dans $\mathcal{K}(V , W)$.

Dans le cas où W possède la propriété de Radon-Nikodym tout opérateur de $L^1([0 , 1])$ dans W est représentable ; ainsi le résultat précédent donne une caractérisation géométrique de la possibilité de construire, pour tout opérateur de $\mathcal{L}(V, W)$, une meilleure approximation dans $\mathcal{K}(V, W)$ où $V = L^1(\mu)$, où μ est une mesure bornée quelconque.

THÉORÈME 2. 5. - L'espace de Banach W vérifie les conditions du théorème précédent dans chacun des cas suivants :

(i) $W = \ell^1(I)$.

(ii) W est un espace de Banach uniformément convexe.

(iii) W est un sous-espace de $C(\Omega)$, où Ω est un compact, tel qu'il existe une projection 1-lipschitzienne de $C(\Omega)$ sur W.

Pour établir (i), on utilise l'assertion (b) du théorème précédent et le fait que les opérateurs compacts de $\ell^1(\underset{\sim}{N})$ dans lui-même sont exactement les opérateurs qui transforment la base canonique de $\ell^1(\underset{\sim}{N})$ en une suite relativement faiblement compacte (voir détails dans [7]). Pour établir (ii), on utilise l'assertion (a) du théorème précédent [7]. Pour montrer (iii), on utilise le corollaire (2. 3) et le théorème de [2] qui affirme en fait que tout opérateur, représentable ou pas, de $L^1(\mu)$ dans un espace $C(\Omega)$ admet une meilleure approximation compacte. L'assertion (ii) du théorème (2. 5) permet, par dualité, d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME 2. 6. - Soient Ω un compact stonien, et V un espace de Banach dont le dual vérifie les conditions du théorème 2. 4. Alors tout opérateur de $\mathcal{L}([V, C(\Omega)]$ admet une meilleure approximation compacte dans $\mathcal{K}[V, C(\Omega)]$.

Il s'agit maintenant pour un entier n donné de trouver, pour un opérateur T de $\mathcal{L}[V, W]$, un opérateur S_0 de l'ensemble $\mathcal{K}_n[V, W]$ des opérateurs de rang inférieur à n tel que

$$\|T - S_0\| = \inf\{\|T - S\| ; \quad S \in \mathcal{K}_n[V, W]\} .$$

Si $V = L^1(\mu)$, on dira qu'un opérateur S de $\mathcal{K}_n[V, W]$ est un opérateur n-simple s'il existe une suite $(E_i)_{i=1,\ldots,n}$ de parties μ-mesurables, μ-disjointes, et telle que $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$ μ. p. p., et s'il existe $(\omega_i)_{i=1,\ldots,n}$ dans W tels que

$$S(f) = \sum_{i=1}^n \left(\int_{E_i} fd\right)\omega_i .$$

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des opérateurs n-simples. En utilisant les notions de meilleure n-suite et de meilleure n-section, introduites dans [4], et les méthodes du théorème (2. 2), on peut montrer les résultats suivants :

THÉORÈME 2. 7. - Soit W un espace de Banach tel qu'il existe une projection 1-lipschitzienne de W'' sur W (en particulier si W est un dual, ou bien $W = L^1(\nu)$). Alors tout opérateur représentable T de $V = L^1(\mu)$ dans W admet une meilleure approximation dans le cône $\mathcal{S}_n$, pour tout $n \geqslant 1$.

Signalons que l'hypothèse sur W n'est pas nécessaire puisque $W = Co(\underset{\sim}{N})$ vérifie le théorème, cependant il n'existe pas de projection 1-lipschitzienne de $W'' = \ell^{\infty}(\underset{\sim}{N})$ sur $W = Co(\underset{\sim}{N})$.

THÉORÈME 2. 8. - <u>Soit</u> W <u>un espace de Banach tel qu'il existe une projection linéaire de norme</u> 1 <u>de</u> W'' <u>sur</u> W ; <u>alors, pour tout</u> $n \geqslant 1$, <u>tout opérateur représentable de</u> $V = L^1(\mu)$ <u>dans</u> W <u>admet une meilleure approximation dans</u> $\mathcal{K}_n[V , W]$.

Rappelons qu'une situation analogue se présente si V et W sont des espaces de Hilbert. En effet, il est prouvé dans [5], p. 61, que tout opérateur continu admet, pour tout $n \geqslant 1$, une meilleure approximation dans l'ensemble des opérateurs de rang inférieur à n .

BIBLIOGRAPHIE

[1] FAKHOURY (H.). - Projections continues de meilleure approximation dans certains espaces de Banach, J. Math. pures et appl., t. 53, 1974, p. 1-16.

[2] FAKHOURY (H.). - Approximation par des opérateurs compacts ou faiblement compacts à valeurs dans C(X) , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283, 1976, Série A, p. 615-618 ; et Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

[3] FAKHOURY (H.). - Approximation des bornés d'un espace de Banach par des compacts et applications, Israel J. of Math. (à paraître).

[4] GARKAVI (A. L.). - The best possible net and the best possible crosssection of a set in a normed space, Amer. math. Soc. Transl., Series 2, t. 39, 1964, p. 111-164.

[5] GOHBERG (I. C.) and KREIN (M. G.). - Introduction to the theory of linear nonself-adjoint operators. Providence, American mathematical Society, 1969 (Translations of mathematical Monographs, 18).

[6] HOLMES (R.) and KRIPHE (B.). - Best approximation by compact operators, Indiana Math. J., t. 21, 1971/72, p. 255-263.

[7] MACH (J.) and WARD (J.). - Approximation by compact operators on certain Banach spaces (à paraître).

(Texte reçu le 11 juillet 1977)

Hicham FAKHOURY

Equipe d'Analyse (E. R. A. 294)
Département de Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05

et

Département de Mathématiques
Université de Lyon-I
43 boulevard de 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE