Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

ALAIN LOUVEAU

Relations d'équivalence co-analytiques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. n° 19, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
16e année, 1976/77, n° 19, 8 p.

12 mai 1977

RELATIONS D'ÉQUIVALENCE CO-ANALYTIQUES

par Alain LOUVEAU

(d'après L. HARRINGTON)

0. Introduction.

Le but de cet exposé est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. - Soit X un espace polonais, E une relation d'équivalence co-analytique sur X (c'est-à-dire dont le graphe est co-analytique dans $X \times X$). Alors, ou bien E a au plus $\aleph_0$ classes d'équivalence, ou bien il existe un parfait $P \subset X$, dont les éléments sont deux à deux E-inéquivalents.

Ce résultat est dû à J. SILVER (1974), qui en a donné une démonstration ingénieuse (qui utilise la technique du "forcing" de P. COHEN) et difficile, puisqu'elle nécessite l'existence du cardinal $\aleph_{\aleph_1}$, donc un fragment important des axiomes de la théorie des ensembles.

Récemment, L. HARRINGTON a donné une démonstration très différente de ce résultat, qui est élémentaire du point de vue logique, et qui utilise comme principaux outils le forcing et la théorie descriptive effective.

Suivant les idées de HARRINGTON, il n'est pas très difficile de remplacer les considérations de forcing par des considérations de catégorie de Baire. C'est le point de vue que nous allons adopter ici. Par contre, le problème de trouver une démonstration de type "classique", c'est-à-dire sans utiliser la théorie descriptive effective, est à notre connaissance ouvert.

1. Relations d'équivalence fermées, relations F_σ.

Dans ce paragraphe, nous allons donner la démonstration du théorème dans des cas particuliers, qui éclairent la technique utilisée dans le cas général.

Remarquons tout d'abord que nous pouvons toujours supposer que l'espace polonais X est l'espace de Baire $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$, en utilisant si nécessaire une surjection continue de $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$ sur X et un relèvement de la relation E.

Supposons pour commencer que E est une relation d'équivalence fermée. Chaque classe est alors un ensemble fermé, et si E a au plus $\aleph_0$ classes, alors, par le théorème de Baire, l'une de ces classes est d'intérieur non vide. Ceci donne l'idée d'ôter les ouverts contenus dans une E-classe d'équivalence, ou plus généralement contenus dans au plus $\aleph_0$ E-classes. Soit donc :

$\Theta = \{U$; U est ouvert dans $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$, et U est recouvert par au plus $\aleph_0$ E-classes$\}$.

Clairement Θ contient un ouvert maximum, $0_0 = \bigcup\Theta$. Soit $F = \underset{\sim}{N}^{N} - 0_0$. Deux cas se présentent : si $F = \emptyset$, E a au plus $\aleph_0$ classes. Si F est non vide, on construit dans F un parfait d'éléments deux à deux E-inéquivalents par la méthode de Cantor : F contient deux points inéquivalents, α_0 et β_0 , d'après sa définition. Puisque E est fermée, on peut séparer (α_0 , β_0) de E par un ouvert élémentaire $U_0 \times U_1$. Alors, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ et si $\alpha \in F \cap U_0$, $\beta \in F \cap U_1$, $(\alpha , \beta) \notin E$. On recommence ensuite la dichotomie sous $F \cap U_0$ et $F \cap U_1$, etc. Ceci est toujours possible car si U est un ouvert et $F \cap U \neq \emptyset$, alors $F \cap U$ contient deux points E-inéquivalents, d'après la définition de F . Cette construction fournit facilement le parfait cherché.

Remarquons que dire que chaque $F \cap U$ non vide n'est pas contenu dans une E-classe, c'est dire que chaque classe d'équivalence, pour la relation E restreinte à F , est un fermé rare de F . Dans le cas d'une relation F_σ , la même technique va fournir un fermé sur lequel les classes d'équivalence sont des F_σ maigres, ce qui complique un peu la construction de l'ensemble parfait.

Soit donc E une relation d'équivalence F_σ , et considérons toujours le fermé F défini comme précédemment, supposé non vide.

Clairement, chaque classe d'équivalence, restreinte à F , est un F_σ maigre de F . En effet, si A est une E-classe non maigre dans F , il existe un fermé $F' \subset A$, F' non rare dans F , donc un ouvert U tel que $U \cap F \neq \emptyset$ et $U \cap F \subset A$. Mais alors $U \subset 0_0 \cup A$ est recouvert par au plus $\aleph_0$ classes, donc $U \subset 0_0$ et $U \cap F = \emptyset$, une contradiction.

Appelons toujours E la relation restreinte à F . Puisque chaque E-classe est maigre, E est maigre dans $F \times F$ (par le théorème d'Ulam-Tarski, l'analogue pour la catégorie du théorème de Fubini pour la mesure). Il existe donc une suite de fermés rares $(E_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$, que nous pouvons supposer croissante, telle que $E = \bigcup E_n$. Nous pouvons supposer que chaque relation E_n est symétrique et contient la diagonale de $F \times F$. Pour construire le parfait cherché, on choisit d'abord α_0 et $\beta_0 \in F$, $(\alpha_0 , \beta_0) \notin E_1$, puis U_0 et U_1 ouverts de F tels que

$$(\alpha_0 , \beta_0) \in U_0 \times U_1 \quad \text{et} \quad U_0 \times U_1 \cap E_1 = \emptyset .$$

Pour continuer la dichotomie, on considère l'espace $U_0 \times U_0 \times U_1 \times U_1$, et la relation (fermée rare sur cet espace) :

$$E_1'(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) \longleftrightarrow E_1(x_1 , x_2) \vee E_1(x_1 , x_3)$$
$$\vee E_1(x_1 , x_4) \vee E_1(x_2 , x_3) \vee E_1(x_2 , x_4) \vee E_1(x_3 , x_4).$$

Ceci permet de trouver α_{00} , α_{01} , α_{10} et α_{11} tels que $\alpha_{00} \in U_0$, $\alpha_{01} \in U_0$, $\alpha_{10} \in U_1$, $\alpha_{11} \in U_1$ et des ouverts U_{00} , U_{01} , U_{10} et U_{11} tels que $\alpha_{ij} \in U_{ij}$, $i = 0$ ou 1 , $j = 0$ ou 1 , et tels que

$$U_{00} \times U_{01} \times U_{10} \times U_{11} \cap E_1' = \emptyset \text{ , etc.}$$

Au n-ième coup, on considère un produit de 2^n ouverts et une relation E'_n formée à partir de E_n comme union de $C^2_{2^n}$ fermés rares. Ceci permet de construire un parfait répondant à la question.

La technique utilisée précédemment ne s'étend pas directement au cas des relations d'équivalence G_δ. En fait, il n'est pas difficile de voir que nous n'avons pas réellement utilisé le fait que E est une relation d'équivalence, et que la démonstration précédente s'étend à des relations symétriques fermées ou F_σ (moyennant les transformations adéquates). Or cette généralisation n'est pas possible pour les relations G_δ : le fait que E est une relation d'équivalence est une hypothèse essentielle.

2. Le cas général.

Dans le cas général, l'idée de HARRINGTON est de remplacer la topologie habituelle sur $\underset{\sim}{N}^N$ par une topologie plus fine, engendrée par une famille dénombrable d'ensembles analytiques de $\underset{\sim}{N}^N$.

Soit donc $\mathfrak{a}$ un ensemble dénombrable d'ensembles analytiques de $\underset{\sim}{N}^N$, que nous supposerons contenant les ouverts fermés élémentaires de $\underset{\sim}{N}^N$, et soit $\mathcal{T}_{\mathfrak{a}}$ la topologie engendrée par $\mathfrak{a}$.

Nous allons tout d'abord donner des conditions suffisantes sur $\mathfrak{a}$ pour que $\mathcal{T}_{\mathfrak{a}}$ soit une topologie d'espace de Baire.

Rappelons le jeu de Choquet sur un espace topologique X : deux joueurs, α et β, jouent successivement des ouverts non vides de X, U_0 puis U_1, puis U_2, etc., β commençant, tels que $U_{i+1} \subset U_i$. Le joueur α gagne le jeu de Choquet si $\bigcap_n U_n \neq \emptyset$.

Supposant que le joueur α a la mémoire courte, et ne se souvient que du coup précédent du joueur β, CHOQUET introduit la notion de α-tactique gagnante pour ce jeu, et prouve que l'existence d'une α-tactique gagnante implique que l'espace X est de Baire.

Si nous ne supposons plus que α a la mémoire courte, la notion naturelle est celle de α-stratégie gagnante (c'est la notion habituelle de stratégie pour les jeux infinis à information parfaite), et on démontre facilement que l'existence d'une α-stratégie gagnante implique encore que l'espace X est de Baire.

Considérons les deux propriétés suivantes sur $\mathfrak{a}$:

(P_1) $\mathfrak{a}$ <u>est clos par intersections finies</u>,

(P_2) <u>Pour tout</u> $A \in \mathfrak{a}$, <u>il existe un fermé</u> F <u>de</u> $\underset{\sim}{N}^N \times \underset{\sim}{N}^N$, <u>de projection</u> $\pi F = A$, <u>tel que</u>, <u>pour chaque ouvert fermé élémentaire</u> ω <u>de</u> $\underset{\sim}{N}^N \times \underset{\sim}{N}^N$, $\pi(F \cap \omega)$ <u>est élément de</u> $\mathfrak{a}$.

LEMME 1. - <u>Si</u> $\mathfrak{a}$ <u>satisfait</u> (P_1) <u>et</u> (P_2), <u>il existe une</u> α-<u>stratégie gagnante sur</u> ($\underset{\sim}{N}^N$, $\mathcal{T}_{\mathfrak{a}}$). <u>En particulier, cet espace est de Baire</u>.

<u>Démonstration</u>. - Nous allons définir une stratégie gagnante pour le joueur α . β joue un $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-ouvert U_0 . α choisit $A_0 \in \mathcal{A}$, $A_0 \neq \emptyset$, $A_0 \subset U_0$, puis un fermé F_0 de $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}} \times \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$, satisfaisant la propriété (P_2) relativement à A_0 . Ensuite α choisit un ouvert fermé élémentaire ω_0 tel que $F_0 \cap \omega_0 \neq \emptyset$ et $\delta(F_0 \cap \omega_0) \leq \frac{1}{2}\,\delta(F_0)$. Il joue alors $U_1 = \pi(F_0 \cap \omega_0)$.

β joue ensuite $U_2 \subset U_1$. α choisit $A_2 \subset U_2$, $A_2 \neq \emptyset$, $A_2 \in \mathcal{A}$, puis F_2 qui satisfait la propriété (P_2) relativement à A_2 . Il choisit ensuite ω_2 ouvert fermé élémentaire tel que $\delta(F_2 \cap \omega_2) \leq \frac{1}{2}\,\delta(F_2)$, puis $\omega_{02} \subset \omega_0$ tel que

$$\delta(F_0 \cap \omega_{02}) \leq \frac{1}{2}\,\delta(F_0 \cap \omega_0) \ , \quad F_2 \cap \omega_2 \neq \emptyset \ , \quad F_0 \cap \omega_{02} \neq \emptyset \ ,$$

et tel que $U_3 = \pi(F_2 \cap \omega_2) \cap \pi(F_0 \cap \omega_{02})$ soit non vide. C'est possible puisque

$$\pi(F_2 \cap \omega_2) \subset U_2 = \pi F_2 \subset U_1 = \pi(F_0 \cap \omega_0) \ .$$

α joue alors cet U_3 . La construction se poursuit de la même façon, et ceci définit une stratégie pour le joueur α . Cette stratégie est clairement gagnante : à la fin d'une partie, α a construit une suite double de fermés $F_{2n,2(n+p)}$, et pour n fixe, la suite décroissante $(F_{2n,2(n+p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $(\alpha_{2n}\ , \beta_{2n})$. Mais d'après la condition de compatibilité, $\forall\, n$, $\alpha_{2n} = \alpha_0$. Enfin $U_{2n+1} = \pi F_{2n}$, donc $\alpha_0 \in U_{2n+1}$, pour tout n . Par suite, $\bigcap_n U_n \neq \emptyset$.

Considérons maintenant l'espace produit $\underset{\sim}{N}^{N} \times \underset{\sim}{N}^{N}$. Cet espace est homéomorphe à $\underset{\sim}{N}^{N}$, par exemple par l'homéomorphie $\varphi : \underset{\sim}{N}^{N} \longrightarrow \underset{\sim}{N}^{N} \times \underset{\sim}{N}^{N}$ qui à $\alpha \in \underset{\sim}{N}^{N}$ associe le couple $(\alpha_0\ , \alpha_1)$ défini par

$$\alpha_0(n) = \alpha(2n) \ , \quad \alpha_1(n) = \alpha(2n+1) \ .$$

Lorsque $\underset{\sim}{N}^{N}$ est muni de la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, on peut munir $\underset{\sim}{N}^{N} \times \underset{\sim}{N}^{N}$ de la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, ou utiliser φ et munir $\underset{\sim}{N}^{N} \times \underset{\sim}{N}^{N}$ de la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{A}^*}$ **engendrée** par l'ensemble $\mathcal{A}^* = \varphi(\mathcal{A})$.

Nous allons introduire une propriété supplémentaire sur $\mathcal{A}$ pour relier ces deux topologies :

(P_3) <u>Pour chaque</u> $A \in \mathcal{A}$, <u>les ensembles</u> $A \times \underset{\sim}{N}^{N}$ <u>et</u> $\underset{\sim}{N}^{N} \times A$ <u>sont dans</u> $\mathcal{A}^*$; <u>et, pour chaque</u> $B \in \mathcal{A}^*$, <u>les ensembles</u> $\pi_0 B$ <u>et</u> $\pi_1 B$ <u>sont dans</u> $\mathcal{A}$.

LEMME 2. - <u>Supposons que</u> $\mathcal{A}$ <u>satisfait</u> (P_1), (P_2) <u>et</u> (P_3), <u>et soit</u> X <u>un</u> $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-<u>résiduel de</u> $\underset{\sim}{N}^{N}$ (<u>i. e. de complémentaire maigre</u>). <u>Alors</u> $X \times X$ <u>est un</u> $\mathcal{T}_{\mathcal{A}^*}$-<u>résiduel de</u> $\underset{\sim}{N}^{N} \times \underset{\sim}{N}^{N}$, <u>donc est</u> $\mathcal{T}_{\mathcal{A}^*}$-<u>dense</u>.

<u>Démonstration</u>. - Puisque X est un $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-résiduel, il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-ouverts denses telle que $\bigcap_n U_n \subset X$.

Pour chaque n , les ensembles $(U_n \times \underset{\sim}{N}^{N})$ et $(\underset{\sim}{N}^{N} \times U_n)$ sont des $\mathcal{T}_{\mathcal{A}^*}$-ouverts denses : ils sont ouverts d'après la première partie de la propriété (P_3), et si $B \in \mathcal{A}^*$, $B \neq \emptyset$, alors, d'après la seconde partie de (P_3), $\pi_0 B$ et $\pi_1 B$ sont des $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-ouverts non vides, donc $U_n \cap \pi_0 B \neq \emptyset$ et $U_n \cap \pi_1 B \neq \emptyset$. Par suite,

$$U_n \times \underset{\sim}{N}^{N} \cap B \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{N}^{N} \times U_n \cap B \neq \emptyset \ .$$

Maintenant

$$\bigcap_{n,m} (U_n \times \underset{\sim}{N}^{N}) \cap (\underset{\sim}{N}^{N} \times U_m) \subset X \times X \ ,$$

et est un $\mathcal{T}_{\mathcal{a}^*}$-résiduel de $\underset{\sim}{N}^{N} \times \underset{\sim}{N}^{N}$. Le lemme 1, appliqué à $(\underset{\sim}{N}^{N} \times \underset{\sim}{N}^{N} , \mathcal{T}_{\mathcal{a}^*})$, qui est homéomorphe à $(\underset{\sim}{N}^{N} , \mathcal{T}_{\mathcal{a}})$, permet de déduire que $X \times X$ est $\mathcal{T}_{\mathcal{a}^*}$-dense.

Considérons maintenant la relation d'équivalence E sur $\underset{\sim}{N}^{N}$. Nous allons ajouter la propriété suivante à $\mathcal{a}$:

(P_4) Pour chaque élément $A \in \mathcal{a}$, l'ensemble $A \times A \dot{-} E$ appartient à $\mathcal{a}^*$.

Il n'est pas difficile de voir qu'il existe un plus petit ensemble dénombrable $\mathcal{a}$ contenant les ouverts fermés élémentaires et satisfaisant les propriétés (P_1), (P_2), (P_3) et (P_4). Par contre, le résultat qui suit est beaucoup moins évident : il n'est pas obtenu par des méthodes de clôture, mais en utilisant la théorie descriptive effective :

LEMME 3. - Il existe un ensemble $\mathcal{a}$ dénombrable, formé d'ensembles analytiques, contenant les ouverts fermés élémentaires de $\underset{\sim}{N}^{N}$, satisfaisant les propriétés (P_1), (P_2), (P_3), (P_4), et de plus tel que l'ensemble H suivant

$$H = \{x \in \underset{\sim}{N}^{N} \ ; \ \forall A \in \mathcal{a} \ (A \ \text{contenu dans une E-classe} \longrightarrow x \notin A)\}$$

est un élément de $\mathcal{a}$.

Démonstration. - Nous n'allons pas donner réellement la démonstration de ce lemme, qui n'est pas très difficile, mais nécessite toute la technique de la théorie descriptive effective. Nous allons plutôt donner une idée de l'ensemble $\mathcal{a}$ qui convient.

Tout d'abord, il est à remarquer que l'ensemble H , considéré dans le lemme, qui est $\underset{\sim}{N}^{N} \dot{-} \bigcup\{A \in \mathcal{a} \ , \ A$ est contenu dans une E-classe$\}$, est clairement co-analytique. Si donc $H \in \mathcal{a}$, H doit être borélien. Ceci peut être rendu possible si on suppose que, pour chaque $A \in \mathcal{a}$, A contenu dans une E-classe C , il existe un borélien B tel que $B \in \mathcal{a}$ et $A \subset B \subset C$. Par suite, l'ensemble $\mathcal{a}$ doit être clos par un grand nombre d'opérations, et dénombrable. Ce sont les propriétés possédées par les analytiques "effectifs".

La classe projective est obtenue par des opérations simples (projection, complémentation) à partir des ouverts fermés élémentaires des espaces produits $(\underset{\sim}{N}^{N})^n$. Soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération de ces ouverts fermés élémentaires (dans $\underset{\sim}{N}^{N}$, pour simplifier). A chaque $\alpha \in \underset{\sim}{N}^{N}$, on associe l'ouvert $O_\alpha = \bigcup_n \omega_{\alpha(n)}$: c'est une surjection sur l'ensemble des ouverts, et on appelle α un code pour l'ouvert O_α . Etant donnée une famille dénombrable $\mathcal{C}$ de fonctions de $\underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{N}$, on lui associe la famille $\mathcal{O}(\mathcal{C}) = \{O_\alpha \ , \ \alpha \in \mathcal{C}\}$, et par les opérations simples, les familles

$\mathfrak{F}(\mathcal{C})$, $\mathfrak{A}(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}\mathfrak{A}(\mathcal{C})$, etc. des fermés, analytiques, co-analytiques, etc. à code dans $\mathcal{C}$. Le problème est de trouver une famille $\mathcal{C}$ suffisamment close pour que la hiérarchie "effective en $\mathcal{C}$ " ait de bonnes propriétés.

En théorie effective, on isole une classe dénombrable particulière $\mathcal{C}_0$ de fonctions de $\underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{N}$, les fonctions <u>récursives</u>, qui ont de remarquables propriétés de clôture. Intuitivement, ce sont les fonctions qui sont calculables par machine. De la même manière, si $\alpha \in \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$, on lui associe une classe dénombrable $\mathcal{C}_\alpha$, les fonctions récursives en α , qui correspond intuitivement aux fonctions calculables par une machine possédant α en mémoire. La hiérarchie correspondant à la famille $\mathcal{C}_\alpha$ ($\mathcal{O}_\alpha$, $\mathfrak{F}_\alpha$, $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathcal{C}\mathfrak{A}_\alpha$, etc.) possède les mêmes propriétés que la hiérarchie projective classique (théorèmes de séparation et de réduction, analogues du théorème de Souslin, du théorème de Kondo, etc.). De plus, comme l'application $\alpha \longmapsto \mathcal{O}_\alpha$ est surjective, chaque ensemble projectif est projectif effectif (de même classe) pour au moins une fonction $\alpha \in \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$.

Ce sont ces résultats qui permettent de démontrer le lemme : on choisit une fonction $\alpha \in \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$ telle que la relation co-analytique E soit dans $\mathcal{C}\mathfrak{A}_\alpha$. Alors on peut montrer que l'ensemble dénombrable $\mathfrak{A}_\alpha$ des analytiques effectifs dans ce même code répond à la question.

Pour terminer la démonstration du théorème, considérons un ensemble $\mathfrak{A}$ satisfaisant les conditions du lemme 3, la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}$ associée, et l'ensemble H . Deux cas peuvent se présenter : si $H \neq \emptyset$, alors chaque E-classe contient au moins un élément non vide de $\mathfrak{A}$. Comme $\mathfrak{A}$ est dénombrable, E a au plus $\aleph_0$ classes. Supposons donc que $H \neq \emptyset$. Nous allons construire un parfait d'éléments E-inéquivalents inclus dans H . Notons toujours E la restriction de E à H .

LEMME 4. - <u>L'ensemble</u> E <u>est</u> $(\mathcal{T}_{\mathfrak{A}} \times \mathcal{T}_{\mathfrak{A}})$-<u>maigre dans</u> $H \times H$.

<u>Démonstration</u>. - L'ensemble E est co-analytique, donc obtenu par complémentation et opération de Souslin à partir des ouverts de $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}} \times \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$. Comme $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}$ est une topologie plus fine que la topologie habituelle de $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$, E a la propriété de Baire pour $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}} \times \mathcal{T}_{\mathfrak{A}}$. La même remarque s'applique à chaque E-classe d'équivalence.

Par le théorème d'Ulam-Tarski, il suffit de démontrer que chaque E-classe d'équivalence est $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}$-maigre dans H .

Supposons le contraire. Il existe alors une classe d'équivalence C et un élément $A \in \mathfrak{A}$, $A \neq \emptyset$, $A \subset H$, tels que $X = C \cap A$ soit résiduel dans A . En appliquant le lemme 2 (restreint à A), on en déduit que $X \times X$ est $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}^*}$-résiduel dans $A \times A$. Maintenant, d'après la définition de H , si $A \in \mathfrak{A}$, $A \subset H$ est non vide, alors A n'est pas contenu dans une E-classe, donc $A \times A - E \neq \emptyset$. Mais $A \times A - E \in \mathfrak{A}^*$ d'après la propriété (P_4) de $\mathfrak{A}$. Par suite,

$$(X \times X) \cap (A \times A - E) \neq \emptyset \ .$$

Ceci montre qu'il existe α et β dans A tels que $(\alpha, \beta) \notin E$, et $\alpha \in C$, $\beta \in C$. Mais ceci nie le fait que E est une relation d'équivalence, d'où la contradiction.

Puisque E est $(\mathcal{T}_{\mathfrak{a}} \times \mathcal{T}_{\mathfrak{a}})$-maigre dans $H \times H$, il existe une suite croissante de $(\mathcal{T}_{\mathfrak{a}} \times \mathcal{T}_{\mathfrak{a}})$-fermés rares, $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $E \subset \bigcup E_n$, et on peut supposer les E_n symétriques et contenant la diagonale. La construction du parfait est alors la même que dans le cas des relations F_σ : la seule différence est que l'on construit un arbre d'ouverts élémentaires pour $\mathcal{T}_{\mathfrak{a}}$, c'est-à-dire d'éléments de $\mathfrak{a}$, et il faut s'assurer au cours de la construction que les intersections dénombrables finales ne seront pas vides. Pour cela, on utilise le concours du joueur α et de sa stratégie gagnante, pour restreindre à chaque fois suffisamment les ouverts déjà construits.

3. Le cas des relations analytiques.

Le théorème précédent est valable pour les relations d'équivalence co-analytiques, donc aussi pour les relations boréliennes. Qu'en est-il pour les relations d'équivalence analytiques ?

En fait, les conclusions du théorème sont fausses : il est facile de construire une relation d'équivalence analytique ayant exactement $\aleph_1$ classes d'équivalence et telle que tout ensemble analytique formé d'éléments deux à deux inéquivalents soit au plus dénombrable.

On peut cependant démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME (BURGESS). - Soit E une relation d'équivalence analytique sur un espace polonais X. Ou bien E a au plus $\aleph_1$ classes d'équivalence, ou bien il existe un parfait formé d'éléments deux à deux inéquivalents.

La démonstration de ce théorème utilise le fait (non trivial) que toute relation d'équivalence analytique est l'intersection de $\aleph_1$ relations d'équivalence boréliennes, et le théorème de Silver-Harrington.

On pourrait penser que, en imposant de plus à E que les classes d'équivalence soient toutes boréliennes, permettrait de remplacer $\aleph_1$ par $\aleph_0$ dans le théorème précédent. En fait, il n'en est rien. Cependant, dans tous les contrexemples connus, les classes de Borel des $\aleph_1$ classes d'équivalence ne sont pas bornées sous $\aleph_1$. Ceci indique la conjecture raisonnable, pour laquelle deux résultats partiels ont été obtenus par J. STERN :

THÉORÈME (J. STERN). - Soit E une relation d'équivalence analytique, dont toutes les classes sont F_σ ou G_δ. Alors E a au plus $\aleph_0$ classes ou il existe un parfait formé d'éléments deux à deux E-inéquivalents.

THÉORÈME (J. STERN). - Supposons que tous les jeux analytiques sont déterminés, et soit E une relation d'équivalence analytique dont toutes les classes (sauf peut-être au plus une) sont boréliennes et bornées en classe de Borel. Alors les conclusions du théorème précédent subsistent.

D'après le théorème précédent, la conjecture est donc fermée moyennant l'hypothèse de détermination des jeux analytiques, qui est une hypothèse de grand cardinal (impliquée par l'existence d'un cardinal mesurable). On ne sait pas si une telle hypothèse est vraiment nécessaire.

(Texte reçu le 27 mai 1977)

Alain LOUVEAU
92 rue du Dessous des Berges
75013 PARIS