Richard Haydon

Sur les espaces de Banach injectifs qui sont des biduaux

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. n° 16, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A4_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
16e année, 1976/77, n° 16, 2 p.

31 mars 1977

SUR LES ESPACES DE BANACH INJECTIFS QUI SONT DES BIDUAUX

par Richard HAYDON

On dit qu'un espace de Banach X est <u>injectif</u> (ou que X est un espace de type $\mathcal{P}_\infty$) si, pour tout espace de Banach Z , tout sous-espace vectoriel fermé Y de Z, et toute application linéaire continue $u \in \mathcal{L}(Y\ ;\ X)$, il existe $v \in \mathcal{L}(Z\ ;\ X)$ qui satisfait $v|Y = u$.

Si on demande de plus que l'extension v satisfasse $\|v\| = \|u\|$, on a la définition d'espace de type $\mathcal{P}_1$. Les espaces de type $\mathcal{P}_1$ sont bien-compris (voir par exemple, [2], p. 160-162), mais il reste beaucoup de problèmes sur les injectifs. La plupart des résultats connus sur les injectifs sont dus à ROSENTHAL [3] ; on sait, en particulier, que si l'espace injectif X est isomorphe à un sous-espace de ℓ^∞ , alors X est isomorphe à ℓ^∞ .

ROSENTHAL a montré aussi que, pour une mesure finie μ , l'espace $L^\infty(\mu)$ (qui est toujours de type $\mathcal{P}_1$) est isomorphe à un espace bidual si, et seulement si, $L^\infty(\mu)$ est isomorphe à ℓ^∞ . Donc il existe des espaces injectifs qui ne sont isomorphes à aucun espace bidual.

Le théorème qu'on annonce ici caractérise d'une façon précise les injectifs qui sont isomorphes à des biduaux.

THÉORÈME. - <u>Si</u> X <u>est un espace de Banach, et</u> X'' <u>est injectif, alors il existe un ensemble</u> Γ <u>tel que</u> X'' <u>est isomorphe à</u> $\ell^\infty(\Gamma)$.

La démonstration suit un programme suggéré par ROSENTHAL dans son article [3], où il remarque qu'il suffit de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION. - <u>Soit</u> X <u>un espace de Banach tel que</u> X'' <u>soit injectif. Désignons par</u> τ <u>le caractère de densité de</u> X' (<u>cardinal minimal d'une partie partout dense pour la topologie métrique</u>), <u>et par</u> Γ <u>un ensemble avec</u> $|\Gamma| = \tau$. <u>Alors, il existe un sous-espace</u> Y <u>de</u> X' <u>tel que</u> Y <u>soit isomorphe à</u> $\ell^1(\Gamma)$.

Pour cette proposition, on utilise quelques améliorations des techniques de [1].

RÉFÉRENCES

[1] HAYDON (R. G.). - On Banach spaces containing $\ell^1(\tau)$ and types of measures on compact spaces, Israel J. Math., 1977 (to appear).

[2] LINDENSTRAUSS (J.) and TZAFRIRI (L.). - Classical Banach spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 338).

[3] ROSENTHAL (H. P.). - On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ, Acta Math., Uppsala, t. 124, 1970, p. 205-248.

(Texte reçu le 18 juillet 1977)

Richard HAYDON
Brasenose College
OXFORD (Grande-Bretagne)