Richard Haydon

Sur les espaces de Banach réticulés injectifs

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. nº 14, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
16e année, 1976/77, n° 14, 2 p.

17 mars 1977

SUR LES ESPACES DE BANACH RÉTICULÉS INJECTIFS

par Richard HAYDON

On considère les espaces de Banach réticulés qui sont injectifs dans le sens isométrique ; c'est-à-dire que E est injectif si, et seulement si, pour tout espace de Banach réticulé F, tout sous-espace vectoriel, fermé et co-réticulé, G de F, et toute application linéaire positive $u \in \mathcal{L}_+(G ; E)$, il existe $v \in \mathcal{L}_+(F ; E)$ qui satisfait aux deux conditions $v|G = u$, $\|v\| = \|u\|$. Tout espace $\mathcal{C}(S)$, avec S compact et stonien, est injectif (un résultat qui n'est pas surprenant si on se rappelle la théorie des espaces de Banach de type $\mathcal{P}_1$; voir par exemple [4], p. 160-162). Les premiers résultats d'importance sur les injectifs sont dus à LOTZ [3] et CARTWRIGHT [1]. LOTZ a montré que l'espace $L^1(\mu)$, pour une mesure μ quelconque, est toujours injectif. CARTWRIGHT a formulé une condition, que j'appelle la condition (c), et qui joue pour la théorie latticielle un rôle analogue aux conditions d'intersection (nIP) de LINDERSTRAUSS ([4], p. 158).

DÉFINITION. - L'espace de Banach réticulé E vérifie la condition (c) si, pour des éléments x_1, x_2, $y \in E_+$ et r_1, $r_2 \in \mathbb{R}_+$, les inégalités

$$\|x_1\| \leqslant r_1 , \qquad \|x_2\| \leqslant r_2 , \qquad \|x_1 + x_2 + y\| \leqslant r_1 + r_2$$

impliquent qu'il existe y_1, $y_2 \in E_+$ tels que

$$y = y_1 + y_2 , \qquad \|x_1 + y_1\| \leqslant r_1 , \qquad \|x_2 + y_2\| \leqslant r_2 .$$

THÉORÈME (CARTWRIGHT). - *On considère les propriétés* :

(a) E *est injectif* ;

(b) E *vérifie* (c) ;

(c) E'' *est injectif*.

Alors (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) .

COROLLAIRE. - E *est injectif si, et seulement si,* E *vérifie les conditions* (c) *et* (P).

Nous utilisons ici la terminologie de [5], et disons que E vérifie (P) s'il existe une rétraction linéaire positive et contractive de E'' sur E. Jusqu'à maintenant on ignore si la propriété (P) est équivalente à la propriété suivante qui est formellement plus faible.

DÉFINITION. - L'espace de Banach réticulé E vérifie la condition (Q) si toute partie filtrante croissante A de la boule unité de E admet un supremum $x = \bigvee A$ qui satisfait $\|x\| \leqslant 1$.

On annonce ici un résultat de [2].

THÉORÈME. - L'espace de Banach réticulé E est injectif si, et seulement si, E vérifie (c) et (Q).

La démonstration est assez longue, et utilise un théorème de représentation pour les espaces avec (c) et (Q) comme espaces d'opérateurs entre des espaces de type $\mathcal{C}(S)$.

RÉFÉRENCES

[1] CARTWRIGHT (D. I.). - Extensions of positive operators between Banach lattices, Mem. Amer. math. Soc., Vol. 3, Issue 2, 1975, n° 164.

[2] HAYDON (R. G.). - Injective Banach lattices, Math. Z. (to appear).

[3] LOTZ (H. P.). - Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices, Trans. Amer. math. Soc., t. 211, 1975, p. 85-100.

[4] LINDERSTRAUSS (J.) and TZAFRIRI (L.). - Classical Banach spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 338).

[5] SCHAEFER (H. H.). - Banach lattices and positive operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 215).

(Texte reçu le 18 juillet 1977)

Richard HAYDON
Brasenose College
OXFORD (Grande-Bretagne)