SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

SKENDER GJINUSHI

Espaces localement convexes séparés différentiables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. n° 11, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
16e année, 1976/77, n° 11, 14 p.

17 février 1977

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES SÉPARÉS DIFFÉRENTIABLES

par Skender GJINUSHI

Cet exposé est un résumé des résultats principaux de la thèse de troisième cycle de l'auteur présentée à l'Université Pierre et Marie Curie (Université de Paris-VI). Cette thèse a été préparée sous la direction de G. CHOQUET.

Nous omettons les démonstrations. Le but de l'exposé est l'étude des e. l. c. s. fortement différentiables ou Gateaux-différentiables ; ces notions sont des extensions des notions introduites par ASPLUND [1] pour les Banachs. Un résultat de COLLIER [7] (obtenu aussi par NAMIOKA-PHELPS) montre que l'espace de Banach E est fortement différentiable si son dual E' est faiblement compactement engendré (f. c. e.). Pour cela, il utilise le fait que l'espace produit $E' \times R$, comme espace f. c. e., vérifie la condition suivante :

(1) Chaque w^*-compact convexe équicontinu de $E' \times R$ est l'enveloppe convexe w^*-fermée de ses points w^*-fortement exposés (voir la suite pour les définitions).

ASPLUND [1] démontre que si E est fortement différentiable, alors E' satisfait à (1). Un petit lemme nous a permis d'établir la réciproque de ce théorème en obtenant ainsi l'équivalence entre la condition (1) sur E' et la différentiabilité forte de E. NAMIOKA-PHELPS sont arrivés à ce résultat bien avant nous, en utilisant les normes équivalentes sur $E \times R$.

Cette équivalence nous a poussé à élargir la notion de différentiabilité, et à essayer d'obtenir des résultats semblables pour une classe la plus large possible. Cela nous permet d'obtenir des classes d'espaces de Fréchet et de Banach fortement différentiables ou Gateaux-différentiables.

0. Définitions et notations.

Dans le but d'étendre la notion de différentiabilité forte au cas d'un espace l. c. s., nous allons rappeler quelques notions introduites par ASPLUND-ROCKAFELLAR [3].

E désignera un espace localement convexe séparé (e. l. c. s.) tandis que E' sera son dual topologique muni de la topologie forte $\beta(E', E)$.

On notera par x les éléments de E, et par x' ceux de E'.

Une fonction f sur E, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup (+\infty)$ est dite convexe propre si

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) , \quad \forall\ x_1 , x_2 \in E \text{ et } \forall\ \lambda \in [0,1] ,$$

et si $f(x)$ n'est pas identiquement $+\infty$.

La conjuguée de f est la fonction f', définie par

$$f'(x') = \sup_{x\in E} (\langle x' , x\rangle - f(x)) .$$

Soulignons que si f^* est une fonction convexe définie sur E', et $\sigma(E' , E)$ s. c. i., alors la conjuguée de la fonction f, définie par

$$f(x) = \sup_{x'\in E'} (\langle x , x'\rangle - f^*(x'))$$

est la fonction f^*. Si f est une fonction convexe propre continue en un point x_0, alors f est continue en chaque point intérieur de l'ensemble $D = \{x/f(x) < +\infty\}$ qui sera appelé domaine de continuité de f.

Définition 0.1. (ASPLUND-ROCKAFELLAR). - Soient f une fonction convexe propre sur E, et $\mathcal{B}$ une famille de parties de E ; f est dite $\mathcal{B}$-différentiable en x_0, si $f(x_0) < +\infty$ et s'il existe x'_0 dans E' tel que

$$\lim_{\lambda\searrow 0} \sup_{u\in B} \left|\frac{f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)}{\lambda} - \langle x'_0 , u\rangle\right| = 0 , \quad \forall B \in \mathcal{B} .$$

Définition 0.2. - Sous les mêmes conditions, f est dite $\mathcal{B}$-rotonde en x_0 par rapport à x'_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute B de $\mathcal{B}$, il existe δ tel que

$$\{v/f(x_0 + v) - f(x_0) - \langle x'_0 , v\rangle \leq \delta\} \subseteq B .$$

Soit $\mathcal{T}$ la topologie de E ; f est dite $\mathcal{T}$-rotonde en x_0 si f est $(V_\alpha)_A$-rotonde en x_0, où $(V_\alpha)_A$ est une base de voisinages de l'origine pour la topologie $\mathcal{T}$. Dans [3], ASPLUND-ROCKAFELLER démontrent que si $E = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$, alors f est $\mathcal{B}$-différentiable en x_0 par rapport à x'_0 si, et seulement si, sa conjuguée f' est $\mathcal{B}^0$-rotonde en x'_0 par rapport à x_0, où $\mathcal{B}^0 = \{B^0 \subset E' ; B \in \mathcal{B}\}$.

Soit A une partie bornée de E, et x'_0 un point de E'.

Notons $M(A) = \sup_{x\in A} \langle x'_0 , x\rangle$.

L'ensemble $\{x \in A ; \langle x'_0 , x\rangle \geq M(A) - \alpha\}$ sera dit une tranche de A. On la désigne par $T(x'_0 , \alpha , A)$.

Définition 0.3. - Soit A une partie bornée de E. A est dite dentable si, pour tout voisinage V_α de l'origine, il existe une tranche T_0 de A petite d'ordre V_α (i. e. $T_0 - T_0 \subset V_\alpha$).

Si A est contenue dans E', A est dite w^*-dentable si les tranches sont définies par les points de E.

Définition 0.4. - On dit que E est dentable si chaque partie bornée de E est dentable.

Définition 0.5. - On dit que E' est w^*-dentable si chaque partie équicontinue de E' est w^*-dentable.

Définition 0.6. - Un point x_0 de A est dit extrémal fort si x_0 possède une base de voisinages pour la topologie de E, constituée de tranches. Il sera dit fortement exposé s'il existe x'_0 dans E' tel que

$$\langle x'_0 , x_0 \rangle = \sup_{x \in A} \langle x'_0 , x \rangle \quad \text{et,} \quad \forall (x_n)_{n \in \underset{\sim}{N}} \subset A , \quad (\langle x'_0 , x_n \rangle \longrightarrow \langle x'_0 , x_0 \rangle)$$

entraîne $((x_n \longrightarrow x_0$ pour la topologie de E). Dans ce cas, on dira que x'_0 expose fortement le point x_0.

Définition 0.7. - Si la partie A est incluse dans E', le point $\underset{\sim}{x'_0}$ sera dit w^*-extrémal fort (respectivement w^*-fortement exposé) si les tranches considérées ci-dessus sont définies par des points de E.

Notons un dernier résultat. Soit A une partie bornée convexe de E, et $f(x)$ sur E définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A , \\ + \infty & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

alors f est $\mathcal{C}$-rotonde en x_0 par rapport à x'_0 si, et seulement si, x'_0 expose fortement x_0 dans A.

Nous pouvons maintenant donner les définitions suivantes.

Définition 0.8. - Soient E un e. l. c. s., et $\mathcal{B} = \{B \subset E ;\ B \text{ borné de } E\}$. $\underset{\sim}{E}$ est dit fortement différentiable si, pour toute f convexe propre sur E, l'ensemble des points du domaine de continuité, où f est $\mathcal{B}$-différentiable, est dense dans ce domaine.

Définition 0.9. - Soient E' le dual de E, et $\mathcal{A} = \{A \subset E' ;\ A \text{ équicontinu}\}$. $\underset{\sim}{E'}$ est dit faiblement fortement différentiable (f-f-différentiable) si, pour toute f' convexe propre $\sigma(E' , E)$-s. c. i., l'ensemble des points du domaine de continuité de f', où f' est $\mathcal{A}$-différentiable, est dense dans ce domaine.

Dans la suite, on notera par w^* la topologie $\sigma(E' , E)$ définie sur E'.

Soulignons une dernière définition.

Définition 0.10. - Un espace de Fréchet $\underset{\sim}{E}$ est dit faiblement compactement engendré (f. c. e.) s'il contient un ensemble compact faible dont l'espace vectoriel engendré soit partout dense dans E.

Dans la suite, nous désignerons par $\gamma(0)$, une base de voisinages de l'origine pour la topologie de E, par $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties bornées de E, et par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties équicontinues de son dual.

I. Dentabilité et w^*-dentabilité dans les e. l. c. s. quasi métrisables.

1. Dentabilité dans les e. l. c. s. métrisables.

Le lemme de PHELPS [20] peut être modifié de la façon suivante.

LEMME 1.1. - Soient E un espace normé, et A une partie bornée équilibrée convexe fermée de E. Supposons que B soit un sous-ensemble convexe fermé de A et x'_0 un point de E' tel que l'ensemble $D = \{x \in E ; x'_0(x) = 0\} \cap B$ soit non vide. Si chaque partie de A est dentable, et si l'ensemble $\{x \in B ; x'_0(x) > 0\}$ est non vide, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une tranche de B, $T_1(x'_1, \alpha, \beta)$ ne coupant pas D et de diamètre inférieur à ε.

THÉORÈME 1.2. - Soit E un e. l. c. métrisable. Soit A une partie équilibrée convexe, fermée, bornée de E. Si A est complet et si chaque partie de A est dentable, alors chaque sous-ensemble convexe fermé de A est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux forts.

A la base de la démonstration du théorème est le fait qu'on peut se ramener au cas des espaces normés, donc se servir du lemme 1.1. Il résulte de ce raisonnement que le théorème 1.2 peut s'étendre aux e. l. c. s. quasi-métrisables (i. e. la topologie induite sur chaque borné est métrisable), donc chaque borné peut être considéré comme borné d'un espace de Banach.

Contre-exemple 1.3. - Le théorème 1.2 ne reste pas vrai lorsque l'ensemble A n'est pas complet. En effet, soit E un espace de Banach dentable. Soit x_0 un point de E de norme 1, et x'_0 dans E' tel que $x'_0(x_0) = 1 = \|x'_0\|$. Considérons l'ensemble $D = \mathrm{con}(\{x ; \|x\| \leq 1 , x'_0(x) = 0\} \cup \{x_0\})$. On peut vérifier aisément que l'ensemble $D \setminus \{x_0\}$ n'est pas l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés.

D'autre part, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 1.4. - Le complété d'un espace normé dentable l'est aussi.

2. Théorèmes de type Phelps dans les espaces l. c. s. quasi métrisables.

Rappelons qu'un espace l. c. s. est quasi métrisable si la topologie induite par la topologie forte sur chaque borné est métrisable.

Un e. l. c. s. E sera dit quasi de Fréchet si E est quasi-métrisable et quasi complet.

Du lemme 3.2 de SAAB [23] résulte le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.1. - Soit E un e. l. c. s. tonnelé, quasi de Fréchet, dentable. Chaque fermé borné convexe de E est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux forts.

Le lemme de MAYNARD [16] peut s'étendre facilement au cas des espaces quasi métrisables en obtenant ainsi que chaque compact faible d'un tel espace est dentable.

La méthode du lemme de [4] amène au résultat suivant :

LEMME 2.2. - Soit E un e. l. c. s. tel que chaque compact faible de E soit dentable. Supposons que C soit un compact faible convexe de E, B un borné, convexe fermé de E, et $C \not\subset B$. Soit D l'enveloppe convexe fermée de $B \cup C$. Pour tout voisinage de l'origine V, il existe une tranche T de D petite, d'ordre V, ne rencontrant pas B.

Donc, compte tenu de la remarque faite à propos du lemme de Maynard, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 2.3. - Chaque compact faible convexe d'un e. l. c. s. quasi métrisable est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux forts.

Énonçons une modification du lemme 6 de PHELPS [20] :

LEMME 2.4. - Soit E un e. l. c. s. dont chaque fermé borné convexe est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux forts. Soient C un fermé, borné, convexe, et $T(x'_0, \alpha_0, C)$ une tranche de C. Pour tout borné B de E et tout $\varepsilon > 0$, il existe une tranche $T_1(x'_1, \alpha_1, C)$, contenue dans T_0, petite d'ordre ε, et telle que $|x'_1 - x'_0|_{B\cup C} \leqslant \varepsilon$.

Ceci dit, le corollaire 2.1 et le théorème 2.3 nous donnent les théorèmes suivants.

THÉORÈME 2.5. - Soit E un e. l. c. s. tonnelé, quasi de Fréchet, de dual de Fréchet, et dentable. Chaque fermé convexe borné de E est l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés.

THÉORÈME 2.6. - Soit E un e. l. c. s. quasi métrisable de dual de Fréchet. Chaque compact faible convexe de E est l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés.

COROLLAIRE 2.7. - Dans une limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Banach, tout compact faible convexe est l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés.

3. Sur les espaces duaux w^*-dentables.

(a) Théorèmes de type Phelps dans les espaces duaux quasi métrisables, w^*-dentables.

En combinant la méthode de PHELPS [20] avec celle utilisée par NAMIOKA-ASPLUND [4], nous démontrons le résultat suivant.

PROPOSITION 3.1. - Soient E un e. l. c. s., et E' son dual fort qui sera supposé quasi métrisable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° E' est w^*-dentable ;

2° Chaque K convexe équicontinu w^*-compact de E' est l'enveloppe convexe w^*-fermée de ses points w^*-extrémaux forts ;

3° Pour tout A équicontinu de E', chaque K convexe équicontinu w^*-compact est l'enveloppe convexe w^*-fermée de ses points fortement exposés par une forme linéaire w^*-continue dans $A \cup K$.

De plus, on a le théorème ci-après.

THÉORÈME 3.2. - Soit E un espace de Fréchet de dual quasi métrisable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° E' est w^*-dentable ;

2° Chaque K w^*-compact, convexe, équicontinu de E', est l'enveloppe convexe w^*-fermée de ses points w^*-fortement exposés.

THÉORÈME 3.3. - Chaque produit fini d'espaces à duaux w^*-dentables, possède un dual w^*-dentable.

THÉORÈME 3.4. - Chaque sous-espace fermé d'un espace à dual w^*-dentable, possède un dual w^*-dentable.

(b) Classes d'espaces duaux w^*-dentables.

Remarquons d'abord que les théorèmes 2.3 [19], 4.3 [17] et 4.4 [17] restent vrais même dans le cas où la condition de métrisabilité est remplacée par celle de quasi métrisabilité. Ceci dit, on peut démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 3.5. - Soit E un e. l. c. s. de dual E' quasi métrisable. E' est w^*-dentable dans chacun des cas suivants :

1° Si E' est quasi séparable (i. e. chaque borné est séparable) ;

2° Si E' est f. c. e. ;

3° Si E est semi-réflexif (i. e. E est égal à E'').

II. Espaces de Fréchet fortement différentiables ou bien Gateaux-différentiables.

4. Liens entre la dentabilité et la différentiabilité.

La proposition d'ASPLUND-ROCKAFELLAR mentionnée dans le paragraphe 0 est à la base des démonstrations des théorèmes suivants.

THÉORÈME 4.1. - Soit E un e. l. c. s. quasi complet. Considérons les propriétés suivantes :

1° Chaque fermé, borné, convexe de $E \times R$ est l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés ;

2° E' est faiblement fortement différentiable ;

3° La propriété 1° est vérifiée dans E ;

4° E est dentable.

Alors on a : 1° $\Rightarrow$ 2° $\Rightarrow$ 3° $\Rightarrow$ 4°..

THÉORÈME 4.2. - Soit E un e. l. c. s. Considérons les propriétés suivantes.

1° Chaque w^*-compact, équicontinu, convexe de $E' \times R$ est l'enveloppe convexe w^*-fermée de ses points w^*-fortement exposés ;

2° E est fortement différentiable ;

3° La propriété 1° est vérifiée dans E' ;

4° E' est w^*-dentable.

Alors on a : 1° $\Rightarrow$ 2° $\Rightarrow$ 3° $\Rightarrow$ 4°.

5. Espaces de Banach qui sont d'Asplund.

Les espaces de Banach fortement différentiables (dits aussi d'Asplund) ont été introduits par ASPLUND dans [1]. Si on traduit la définition 0.8 pour un Banach, on obtient la définition suivante.

DÉFINITION 5.1 (ASPLUND). - Un espace de Banach E est dit d'Asplund si, pour toute f convexe propre de E à $[-\infty , +\infty]$, l'ensemble des points du domaine de continuité de f , où f est Fréchet-différentiable, est dense dans ce domaine.

Rappelons que f est dite Fréchet-différentiable en un point si f est B-différentiable, où B est la boule unité de E , ce qui est équivalent ici à ce que f soit $\mathfrak{B}$-différentiable.

Des résultats de PHELPS, du théorème 4.1 et du fait que si E est dentable alors $E \times R$ l'est aussi, on peut tirer le résultat suivant, dû à COLLIER [8] :

Un espace de Banach E a la propriété de Radon-Nikodym (est dentable) si, et seulement si, son dual E' est f-f-différentiable.

Tandis que les théorèmes 3.3 et 4.2 et la remarque de PHELPS ([20], page 86, voir aussi le théorème 3.2) nous donnent le résultat suivant.

THÉORÈME 5.2. - Pour qu'un espace de Banach E soit d'Asplund, il faut et il suffit que E' soit w^*-dentable.

COROLLAIRE 5.3. - Si E' est w^*-dentable, et K un w^*-compact convexe de E' , alors l'ensemble $E_K = \{x \in E \ ; \ x$ expose fortement un point de $K \}$ est un $G\delta$ partout dense dans E .

COROLLAIRE 5.4. - Dans un espace de Banach E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° E' est w^*-dentable ;

2° Chaque norme équivalente de E est Fréchet-différentiable en chaque point d'un ensemble $G\delta$ partout dense dans E ;

3° Chaque norme équivalente de E est Fréchet-différentiable en un point de E.

Grâce aux théorèmes 3.5 et 5.2, on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5.5. - Un espace E est d'Asplund dans chacun des cas suivants :

1° Si E' est séparable ;

2° Si E' est f. c. e. ;

3° Si E est réflexif.

ASPLUND démontre 1° et 3° en affirmant d'abord que, sous ces conditions, E' admet une norme duale équivalente localement uniformément convexe (l. u. c.) à savoir : $\forall\ (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E' et $\forall\ x'_0$ dans E',

$$\|x'_n - x'_0\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \|x'_n\| = \|x'_0\| = 1$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x'_n + x'_0\|}{2} = 1 .$$

(Pour démontrer 3°, on fait appel aussi à un résultat de TROYANSKI.)

Puis il démontre que E est d'Asplund lorsque E' est l. u. c. Le théorème suivant améliore ce résultat :

THÉORÈME 5.6. - On suppose que E' satisfait à la condition

(*) $[\forall\ (x'_\alpha)_{\alpha\in A}$, famille filtrée de E', et $\forall\ x'_0 \in E'$, on a $x'_\alpha \xrightarrow{\sigma(E',E'')} x'_0$ dès que $x'_\alpha \xrightarrow{\sigma(E',E)} x'_0$ et $\|x'_\alpha\| \longrightarrow \|x'_0\|]$.

Alors E' est w^*-dentable.

Cela implique le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.7. - Sous les conditions du théorème 5.6, E est d'Asplund.

Evidemment si E' est l. u. c., E' vérifie (*) .

PHELPS [20] remarque que E' possède la propriété de R. N. si E' est w^*-dentable. Le théorème de STEGALL implique que E' est séparable si E est séparable, et E' a la propriété de R. N. A l'aide de ce même théorème, NAMIOKA établit l'équivalence entre la w^*-dentabilité et la dentabilité de E', ce qui entraîne :

E est d'Asplund si, et seulement si, E' a la propriété de R. N.

6. Classes d'espaces fortement différentiables.

(a) Quelques contre-exemples. - Dans le § 5 nous avons établi l'équivalence entre les propriétés du théorème 4.1 d'une part, et celles du théorème 4.2 d'autre part pour les espaces de Banach. Les contre-exemples suivants montrent qu'aucune de ces équivalences ne subsiste en général.

Contre-exemple 6.1. - PECK [22] construit un sous-ensemble fermé borné convexe dans un produit dénombrable d'espaces de Banach B_i non réflexifs, qui n'a pas de point support. Supposons de plus que chaque B_i ait la propriété de R. N., ce qui implique que l'espace $\prod B_i$ est un Fréchet dentable (voir [25]). Cependant son dual n'est pas f. f. différentiable à cause de l'implication $2° \Longrightarrow 3°$ du théorème 4.1. L'existence de l'ensemble de Peck dans $\prod B_i$ entraîne également que le problème I de [24] a une réponse négative.

Contre-exemple 6.2. - De même, si on suppose que chaque B_i est de dual B_i' séparable, alors l'espace $\prod_{i \in \mathbb{N}} B_i'$ est un espace de Fréchet w^*-dentable. Dans cet espace existe un ensemble sans point w^*-fortement exposé (à savoir l'ensemble de Peck). Cela implique que E n'est pas fortement différentiable à cause de l'implication $2° \Longrightarrow 3°$ du théorème 4.2.

Contre-exemple 6.3. - Soit $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces de Banach réflexifs. On vérifie aisément que l'ensemble $U = \prod U_i$, où U_i est la boule unité de B_i, est un compact faible convexe sans point fortement exposé. Donc, le problème V de [23] a une réponse négative.

(b) Classes d'espaces de Fréchet fortement différentiables. - Malgré ce qu'on vient de remarquer, les équivalences vont être établies pour une classe plus large que celle des espaces de Banach, bref les théorèmes du § 5 vont être généralisés. En effet, le théorème 3.3 en conjonction avec les théorèmes 3.2 et 4.2 entraîne le théorème suivant.

THÉORÈME 6.4. - *Soit E un espace de Fréchet de dual quasi métrisable.*

$$(E \text{ est fortement différentiable}) \Longleftrightarrow (E' \text{ est } w^*\text{-dentable.})$$

Compte tenu du théorème 3.5, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 6.5. - *Un espace E de Fréchet de dual E' quasi métrisable est fortement différentiable dans chacun des cas suivants :*

1° *Si E' est quasi-séparable ;*

2° *Si E' est f. c. e. ;*

3° *Si E est réflexif.*

Le corollaire 6.10 affirme que $E \times R$ est dentable si l'espace E est tonnelé, quasi de Fréchet, dentable de dual de Fréchet. Il en résulte, grâce aux théorèmes

4.1 et 4.2, le théorème suivant.

THÉORÈME 6.6. - Un espace l. c. s. tonnelé, quasi de Fréchet, de dual de Fréchet, est dentable si, et seulement si, son dual est f. f.-différentiable.

COROLLAIRE 6.7. - Une limite inductive stricte d'une suite croissante d'espaces de Banach dentables a un dual f. f.-différentiable.

Le théorème 2. donne le corollaire suivant.

COROLLAIRE 6.8. - Supposons que E soit quasi métrisable, semi-réflexif, de dual de Fréchet. Alors son dual est f. f.-différentiable.

(c) Produit d'espaces d'Asplund. - Nous allons trouver d'autres classes d'espaces l. c. s. qui sont fortement différentiables.

THÉORÈME 6.9. - Un produit $\prod_{\alpha\in A} B_\alpha$ d'espaces de Banach est fortement différentiable si, et seulement si, chaque B_α est d'Asplund.

D'où le corollaire suivant.

COROLLAIRE 6.10. - Chacun des espaces des types suivants est fortement différentiable :

1° Tout produit d'espaces de Banach de duaux séparables ;

2° Tout produit d'espaces de Banach de duaux f. c. e. ;

3° Tout produit d'espaces de Banach réflexifs.

Mentionnons qu'un espace dual de Banach f. f.-différentiable est dit aussi d'Asplund faible.

Ceci dit, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 6.11. - Soit $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces de Banach. L'espace dual $\prod_{\alpha\in A} B'_\alpha$ est f. f.-différentiable si, et seulement si, chaque B'_α est d'Asplund faible.

COROLLAIRE 6.12. - La somme directe d'une famille d'espaces de Banach, possédant la propriété de R. N. est dentable et a un dual f. f.-différentiable.

Indiquons une dernière classe d'espaces l. c. fortement différentiables.

THÉORÈME 6.13. - Soit E un e. l. c. s. quasi complet de dual de Banach. Si E' est w^*-dentable, alors E est fortement différentiable.

7. Sur les espaces de Fréchet Gateaux-différentiables.

Dans [1], ASPLUND donne la définition suivante.

__Définition 7.1.__ – Un espace E de Banach est dit __Gateaux-différentiable__ si, pour toute f convexe propre, l'ensemble des points du domaine de continuité de f, où f est simplement différentiable ou différentiable selon chaque direction (à savoir: f est simplement-différentiable en x_0 s'il existe $x'_0 \in E'$ tel que

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \left| \frac{f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)}{\lambda} - \langle x'_0 , u \rangle \right| = 0 ,$$

$\forall\, u \in E$), est dense dans ce domaine.

Nous donnons la même définition pour les espaces l. c. s.

Soit E un e. l. c. s. Son dual E', muni de la topologie $\sigma(E' , E)$, a pour dual l'espace E lui-même.

En appliquant la méthode des théorèmes 4.1 et 4.2 à l'espace $(E' , \sigma(E' , E))$, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 7.2. – __Soit__ E __un e. l. c. s. Considérons les propriétés suivantes__ :

1° __Chaque__ K __convexe__ w^*__-compact équicontinu de__ $(E' \times R , \sigma(E' \times R , E \times R))$ __est l'enveloppe convexe__ w^*__-fermée de ses points fortement exposés__ ;

2° E __est Gateaux-différentiable__ ;

3° __La propriété__ 1° __est vérifiée dans l'espace__ $(E' , \sigma(E' , E))$.

__Alors__ 1° $\Rightarrow$ 2° $\Rightarrow$ 3° .

Précisons qu'un point x'_0 est fortement exposé dans K considéré comme partie de $(E' , \sigma(E' , E))$ s'il existe x_0 dans E tel qu'une suite (x'_n) dans K converge vers x_0 pour la topologie $\sigma(E' , E)$ si $x'_n(x_0) \longrightarrow x'_0(x_0)$.

Afin de trouver des classes d'espaces de Fréchet Gateaux-différentiables, nous avons besoin des théorèmes suivants :

THÉORÈME 7.3. – __Si__ E __est un espace de Fréchet séparable, alors__ E' __vérifie la propriété__ 3° __du théorème__ 7.2.

Ce théorème résulte immédiatement du corollaire 6.

THÉORÈME 7.4. – __Si__ E __est un espace de Fréchet f. c. e., alors__ E' __vérifie la propriété__ 3° __du théorème__ 7.2.

Si on applique ces deux derniers théorèmes à l'espace produit $E' \times R$, cela implique la vérification de la propriété 1° du théorème 7.2, donc on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 7.5. – __Tout espace de Fréchet séparable ou f. c. e. est Gateaux-différentiable.__

D'autre part, toujours à l'aide du théorème 7.2, nous pouvons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 7.6. - Tout produit d'espaces de Banach séparables ou f. c. e., est Gateaux-différentiable.

8. Classes d'espaces de Fréchet ayant la propriété de Radon-Nikodym.

Les résultats du paragraphe 3 nous permettront de trouver des espaces de Fréchet ayant la propriété de Radon-Nikodym.

Définition 8.1. - On dit qu'un espace de Fréchet possède la propriété de R. N. si, pour tout espace mesuré (T , Σ , r) , et toute mesure m sur Σ à valeurs dans E absolument continue par rapport à r et de variation finie, il existe $f : T \to \Sigma$ tel que $f \in L_E^1(r)$ et

$$m(A) = \int f \, dr , \quad \forall A \in \Sigma$$

(voir SAAB [24] pour les détails).

Dans ce travail, SAAB montre que E a la propriété de R. N. si, et seulement si, E est dentable.

PROPOSITION 8.2. - Si E est quasi-tonnelé et si son dual E' de Fréchet est w^*-dentable, alors E' est dentable. Donc E' a la propriété de R. N.

COROLLAIRE 8.3. - Soit E' un espace dual de Fréchet quasi séparable. Si E est quasi tonnelé, alors E' possède la propriété de R. N.

COROLLAIRE 8.4. - On a les mêmes résultats si, à la place de la quasi séparabilité de E' , on suppose que E' est f. c. e.

THEOREME 8.5. - Un espace E de Fréchet a la propriété de R. N. dans chacun des cas suivants :

1° Si son bidual est f. c. e. ;

2° Si son dual est semi-réflexif.

Le théorème et les corollaires précédents découlent du théorème 3.5 et de la proposition 8.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASPLUND (E.). - Fréchet differentiability of convex fonctions, Acta Math., t. 121, 1968, p. 31-47.

[2] ASPLUND (E.). - Boundedly Krein-compact spaces, "Proceedings of functional analysis week [1969. Aarhus]", p. 1-4. - Aarhus, Matematik Inst., Aarhus Univ., 1969.

[3] ASPLUND (E.) and ROCKAFELLAR (R. T.). - Gradients of convex fonctions, Trans. Amer. math. Soc., t. 139, 1969, p. 433-467.

[4] ASPLUND (E.) and NAMIOKA (I.). - A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem, Bull. Amer. math. Soc., t. 73, 1967, p. 443-445.

[5] BOURGAIN (J.). - Strongly exposed points in weakly compact convex sets in Banach spaces, Proc. Amer. math. Soc., t. 58, 1976, p. 197-200.

[6] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis, Vol. I-III. - New York, W. A. Benjamin, 1969.

[7] COLLIER (J.B.). - A class of strong differentiability spaces, Proc. Amer. math. Soc., t. 53, 1975, p. 420-422.

[8] COLLIER (J. B.). - The dual of a space with the Radon-Nikodym property, Pacific. J. Math., t. 64, 1976, p. 103-106.

[9] COLLIER (J. B.) and EDELSTEIN (M.). - On strongly exposed points and Fréchet differentiability (à paraître).

[10] DIESTEL (J.). - Geometry of Banach spaces. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes in Mathematics, 485).

[11] EKELAND (I.) and LEBOURG (G.). - Generic Fréchet-differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 224, 1976, p. 193-216.

[12] HUFF (R. E.) and MORRIS (P. D.). - Dual spaces with the Krein-Milman property have the Radon-Nikodym property, Proc. Amer. math. Soc., t. 49, 1975, p. 104-108.

[13] HUFF (R. E.) and MORRIS (P. D.). - Geometric characterizations of the R. N. property in Banach spaces, Studia. Math., Warszawa, t. 56, 1976, p. 157-164.

[14] LINDENSTRAUSS (J.). - Weakly compact sets, Their topological properties and the Banach spaces they generate, "Symposium on infinite dimensional topology", p. 235-273. - Princeton, Princeton University Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 69).

[15] LINDENSTRAUSS (J.). - On operators which attain their norm, Israel J. Math., t. 1, 1963, p. 139-148.

[16] MAYNARD (H. B.). - A geometric characterization of Banach spaces having the R. N. P., Trans. Amer. math. Soc., t. 185, 1973, p. 495-500.

[17] NAMIOKA (I.). - Separate continuity and joint continuity, Pacific J. Math., t. 51, 1974, p. 513-531.

[18] NAMOIKA (I.). - Neighborhoods of extreme point, Israel J. Math., t. 5, 1967, p. 145-152.

[19] NAMIOKA (I.) and PHELPS (R. R.). - Banach spaces which are Asplund spaces, Duke math. Journal, t. 42, 1975, p. 735-750.

[20] PHELPS (R. R.). - Dentability and extreme points in Banach spaces, J. funct. Analysis, t. 17, 1974, p. 78-90.

[21] PHELPS (R. R.). - Histoire d'un théorème de Bessaga et Pelczynski, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 9e année, 1969/1970, n° 16, 7 p.

[22] PECK (N. T.). - Support points in locally convex spaces, Duke math. J., t. 38, 1971, p. 271-278.

[23] SAAB (E.). - Dentabilité et points extrémaux dans les e. l. c. s., Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 13e année, 1973/74, n° 13, 9 p.

[24] SAAB (E.). - Points extrémaux et propriété de Radon-nikodym dans les espaces de Fréchet dentables, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 13e année, 1973/74, n° 13, 9 p.

[25] SAAB (E.). - Dentabilité, points extrémaux et propriété de Radon-Nikodym, Bull. Sc. math., 2e série, t. 99, 1975, p. 129-134.

[26] SCHAEFER (H. H.). - Topological vector spaces. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1970.

[27] STEGALL (C.). - The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 206, 1975, p. 213-223.

[28] TROYANSKI (S. L.). - On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 37, 1971, p. 173-180.

[29] UHL (J. J., Jr). - A note on the Radon-Nikodym property for Banach spaces, Rev. roum. Math. pures et appl., t. 17, 1972, p. 113-115.

(Texte reçu le 27 septembre 1977)

Skender GJINUSHI
Equipe d'Analyse
Université P. et M. Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05

-:-:-:-