SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

MOHAMED AKKAR

Fonctions entières et théorèmes de Banach-Steinhaus dans certaines algèbres complètes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. nº 23, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A9_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, n° 23, 11 p.

13 mai 1976

FONCTIONS ENTIÈRES ET THÉORÈMES DE BANACH-STEINHAUS DANS CERTAINES ALGÈBRES COMPLÈTES.

par Mohamed AKKAR

1. Introduction.

Certaines algèbres topologiques ou bornologiques fournissent à l'aide du calcul fonctionnel holomorphe de nombreux exemples de fonctions "usuelles" qui sont des fonctions analytiques en dimension infinie. Dans ces algèbres on sait donc définir toutes les fonctions entières. Il se trouve que la plupart de ces algèbres sont de Banach ou construites à l'aide d'algèbres de Banach : c'est par exemple le cas des algèbres localement multiplicativement convexes (qui sont des limites projectives topologiques d'algèbres de Banach, [7], [9] ou [13]) ou des algèbres bornologiques multiplicativement convexes (qui sont des limites inductives bornologiques d'algèbres de Banach, [2], [11]).

Ici on se propose d'étudier le problème réciproque : dans quelle mesure la propriété que des fonctions entières opèrent sur une algèbre bornologique convexe entraîne-t-elle des propriétés de richesse de la bornologie de l'algèbre. Ce problème a été étudié dans [14] où on caractérise les algèbres bornologiques multiplicativement convexes, à base dénombrable saturée, complètes et commutatives. Le cas des algèbres topologiques a été traité, il y a plusieurs années, dans [21]. Le problème est abordé ici d'une façon différente : on adopte un point de vue fonctionnel en liant les propriétés particulières de la bornologie de l'algèbre à des propriétés bornologiques de certaines familles de fonctions, essentiellement les fonctions puissances. Cela nous permet d'apporter quelques compléments à [14] et surtout de mettre en évidence certaines propriétés qui jouent le rôle, dans le cas non commutatif, de la multiplicativité de la bornologie (dans le cas commutatif ces propriétés sont équivalentes à la multiplicativité de la bornologie). Les résultats obtenus ici sont duaux de ceux de TURPIN [16] et WAELBROECK [19] et l'équicontinuité des fonctions puissances dans le cas topologique est remplacée par le fait que les fonctions puissances sont pseudo-équibornées dans le cas bornologique. Notons également que, dans le cas particulier d'une algèbre de Silva, nous donnons une démonstration simple, fondée sur les fonctions analytiques. Signalons enfin, qu'il existe un lien très étroit entre le problème examiné ici et des théorèmes de type Banach-Steinhaus.

2. Définitions et rappels.

Rappelons qu'une algèbre topologique localement convexe E est une algèbre munie d'une topologie d'espace localement convexe pour laquelle la multiplication est séparément continue.

Une algèbre bornologique convexe est une algèbre munie d'une bornologie d'espace bornologique convexe (e. b. c.) pour laquelle la multiplication est bornée, c'est-à-dire que le produit de deux parties bornées est borné. L'algèbre sera dite complète si l'e. b. c. sous-jacent est complet, c'est-à-dire s'il existe une base dont tout borné disqué B engendre un sous-espace vectoriel de Banach quand on le munit de la norme, jauge de B.

Si E est une algèbre localement convexe séquentiellement complète, alors la famille des parties bornées (pour la topologie de E), définit une structure d'algèbre bornologique convexe complète sur E.

Un élément x d'une algèbre bornologique convexe est dit régulier (voir [11] ou [18]) s'il est absorbé par un disque borné idempotent, ou ce qui est équivalent, s'il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que la suite $(x^n/\lambda^n)_n$ soit bornée.

Une algèbre bornologique convexe E est dite multiplicativement convexe (en abrégé a. b. m. c.) si tout borné de E est régulier, c'est-à-dire absorbé par un disque borné idempotent. On dit, dans ce cas, que la bornologie de E est multiplicative. Une telle algèbre est limite inductive bornologique (et même une réunion filtrante croissante) d'algèbres semi-normées (qui sont de Banach quand l'algèbre E est complète).

Une bornologie sur une algèbre est dite à base dénombrable s'il existe une famille dénombrable $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties bornées telle que tout borné de l'algèbre soit contenu dans un B_n. Elle est dite à base saturée, ou que sa bornologie est saturée, si la M-fermeture d'un borné est encore bornée. Donc, si E est une algèbre bornologique convexe à base dénombrable, saturée et complète, alors elle admet une base $(B_n)_n$ telle que, $\forall\, n$, B_n est un disque borné, complétant, M-fermé, et vérifiant $B_n . B_n \subset B_{n+1}$.

DÉFINITION 1. - Soit E <u>une algèbre bornologique convexe unitaire. On dit que la fonction entière</u> $\sum_n a_n z^n$ <u>opère dans</u> E <u>si, pour tout</u> $x \in E$, <u>la série</u> $\sum_n a_n x^n$ <u>converge au sens de Mackey dans</u> E.

Si E est une algèbre localement convexe, dont le produit est une application bornée, alors E est une algèbre bornologique convexe quand on la munit de sa bornologie canonique ; dans une telle algèbre, une fonction entière $\sum_n a_n z^n$ opère si, et seulement si, $\sum_n a_n x^n$ converge (topologiquement) dans E pour tout x.

Dans une algèbre bornologique convexe générale, une fonction entière $\sum_n a_n z^n$ opère si la suite $(a_n x^n)_n$ converge vers 0 au sens de Mackey, pour tout x, ou tout simplement si la suite $(a_n x^n)_n$ est bornée pour tout x.

Dans la suite, on désignera par $\mathcal{E}$ l'algèbre de Fréchet des fonctions entières complexes munie de la topologie de la convergence compacte. L'ensemble des fonctions entières opérant dans une algèbre bornologique convexe E est une sous-algèbre de $\mathcal{E}$. Elle est en général non fermée dans $\mathcal{E}$: en effet si on considère l'algèbre de Fréchet $E = L^{\omega}$ d'Arens [3], l'algèbre des fonctions entières qui opèrent dans E est réduite aux polynômes, donc elle est non fermée dans $\mathcal{E}$.

DÉFINITION 2. - Soient E et F deux e. v. t. ou deux espaces vectoriels bornologiques (e. v. b.) et $(\varphi_n)_n$ une suite d'applications de E dans F. On dit que la suite $(\varphi_n)_n$ est pseudo-équibornée si, pour tout borné B de E, il existe une constante $\alpha > 0$ et un borné B' de F tels que :

$$\forall\, x \in B\ ,\quad \varphi_n(x) \in \alpha^n B'\ ,\quad \forall\, n .$$

Il est clair qu'une suite d'applications équibornée, de E dans F est pseudo-équibornée et que la récirpoque est inexacte.

PROPOSITION 3. - Une algèbre bornologique convexe commutative est multiplicativement convexe si, et seulement si, la famille des applications $x \to x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ est pseudo-équibornée.

Démonstration. - Si B est un borné d'une a. b. m. c. E, on sait qu'il est absorbé par un disque borné idempotent B_1. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $B \subset \alpha B_1$ et, pour tout x dans B, on a $x^n/\alpha^n \in B_1$.

Inversement, supposons que la famille $x \to x^n$ est pseudo-équibornée. Soit B un borné de E. Il existe un réel $\alpha > 0$ et un borné B_1 de E tels que : x^n est dans $\alpha^n B_1$, $\forall\, n$ et $\forall\, x \in B$. Comme B et B_1 peuvent être choisis disqués, on en déduit à l'aide de la formule classique de polarisation (voir [19], p. 122, par exemple) que : $B^n \subset (2e)^n \alpha^n B_1$. Si B_2 désigne l'enveloppe idempotente de $B/2\alpha e$, on a $B/2\alpha e \subset B_2 \subset B_1$. Le borné B est donc absorbé par le borné idempotent B_2 et par suite l'algèbre E est multiplicativement convexe.

Remarque. - La proposition précédente est la propriété duale du résultat de TURPIN [16] affirmant qu'une algèbre localement convexe commutative est localement multiplicativement convexe si, et seulement si, la famille des fonctions puissances $x \to x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ est équicontinue en 0.

3. Fonctions entières qui opèrent et fonctions puissances.

PROPOSITION 4. - Soit E une algèbre bornologique convexe, commutative, complète et à base dénombrable saturée. Soit $\sum_n a_n z^n$ une fonction entière qui opère dans E telle que $a_n > 0$, $\forall\, n$ et $(a_n^{1/n})_n$ tende vers 0 en décroissant. Alors la famille des applications $x \to a_n x^n$ est pseudo-équibornée.

Démonstration. - Soit $(B_n)_n$ une base de bornologie de E, formée de disques vérifiant $B_n . B_n \subset B_{n+1}$, chaque B_n étant Mackey-fermé. Soit B un borné disqué et complétant dans E . Pour tout entier n , considérons :

$$F_n = \{x \in E_B \ ; \ a_p x^p \in B_n \ , \ \forall\, p \in \underset{\sim}{N}\} .$$

où E_B désigne l'espace de Banach engendré par B et normé par la jauge de B . Le borné B_n étant Mackey-fermé, il s'ensuit que F_n est un fermé de E_B . De plus, la suite $(a_p x^p)_p$ est bornée pour tout x dans E ; donc $E_B = \bigcup_n F_n$. En vertu du théorème de Baire, il existe $n_0 \in \underset{\sim}{N}$ tel que F_{n_0} ait un point intérieur. Il existe donc x_0 dans F_{n_0} et $\alpha > 0$ tels que tout élément x de B s'écrive $x = \alpha(y - x_0)$, où $y \in F_{n_0}$. La suite $(a_n)_n$ étant telle que $(a_n^{1/n})_n$ soit décroissante vérifie l'inégalité $a_n \leq a_k\, a_{n-k}$ pour tout $n \geqslant k$. Si $x \in B$ et $n \in \underset{\sim}{N}$, on a

$$a_n x^n = a_n \alpha^n (y - x_0)^n = \alpha^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a_n}{a_k\, a_{n-k}}\, a_k\, y^k\, a_{n-k} (-x_0)^{n-k} .$$

Mais y et x_0 sont dans F_{n_0} . Donc pour tout entier p , $a_p y^p$ et $a_p x_0^p$ sont dans B_{n_0} . Comme B_{n_0} est disqué et vérifie $B_{n_0} \cdot B_{n_0} \subset B_{n_0+1}$, comme de plus on a

$$2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a_n}{a_k\, a_{n-k}} \leq 1 ,$$

on conclut que :

$$2^{-n} a_n x^n \in \alpha^n B_{n_0+1} , \quad \forall\, m ,$$

et donc

$$a_n x^n \in (2\alpha)^n B_{n_0+1} , \quad \forall\, n \ \text{ et } \ \forall\, x \in B .$$

Ce qui prouve que la suite $x \to a_n x^n$ est pseudo-équibornée.

COROLLAIRE 5. - Soit E une algèbre localement convexe, commutative, séquentiellement complète et à base de bornologie dénombrable (ou plus généralement une algèbre bornologique convexe, commutative complète et à base dénombrable saturée) dans laquelle opèrent toutes les fonctions entières ; alors, pour toute fonction entière $\sum_n q_n x^n$ la suite $x \to a_n x^n$ est pseudo-équibornée.

Démonstration. - Si $\sum_n a_n z^n$ est une fonction entière, il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que $\alpha_n > 0$, $\forall\, n$, $(\alpha_n^{1/n})_n$ tende vers 0 en décroissant et $|a_n| \leq \alpha_n$, $\forall\, n$ (cela suppose évidemment que a_n est non nul pour une infinité d'entiers n) : il suffit de considérer la suite définie par

$$\alpha_n = (\sup_{p \geqslant n} |a_p|^{1/p})^n .$$

On a évidemment :

$$|a_n| \leq \alpha_n , \quad \forall\, n \quad \text{et} \quad \alpha_n^{1/m} = \sup_{p \geqslant n} (|a_p|^{1/p}) \quad \text{tend vers } 0 \text{ en décroissant.}$$

Montrons maintenant que la suite $x \to a_n x^n$ est pseudo-équibornée. Ceci est évident si la suite $(a_n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang, autrement il existe $(\alpha_n)_n$ comme ci-dessus telle que $|a_n| \leq \alpha_n$, $\forall$ n . D'après la proposition 4 , la suite $x \to \alpha_n x^n$ est pseudo-équibornée. Pour tout borné B de E , il existe $\beta > 0$ et un borné disqué B' tel que $\alpha_n x^n \in \beta^n B'$ pour tout $x \in B$; donc $a_n x^n \in \beta^n B'$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$ et pour tout $x \in B$.

Nous allons établir maintenant un théorème qui permet, dans le cas d'une algèbre bornologique convexe complète, à base dénombrable saturée (sans hypothèse de commutativité) de déduire des propriétés bornologiques sur la suite de fonctions $x \to x^n$, à partir des mêmes propriétés sur les suites de fonctions $x \to a_n x^n$, où $(a_n)_n$ est une fonction entière.

THÉORÈME 6. - Soit E une algèbre bornologique convexe, complète et à base dénombrable saturée dans laquelle toute fonction entière $(a_n)_n$ est telle que la suite $x \to a_n x^n$ soit pseudo-équibornée ; alors la suite $x \to x^n$ est elle-même pseudo-équibornée.

Démonstration. - Soit $\mathcal{E}$ l'algèbre de Fréchet des fonctions entières. Il est facile de voir que tout voisinage V de O dans $\mathcal{E}$ contient un voisinage V de O du type

$$(\alpha , \beta) = \{(C_n)_n \in \mathcal{E} \ ; \ |C_n| \leq \alpha\beta^n , \ \forall n\}$$

où α et β sont deux réels positifs.

Pour montrer que la suite $x \to x^n$ est pseudo-équibornée, considérons un borné B de E . Pour tout couple d'entiers k et p , soit

$$\mathcal{E}_{k,p} = \{(C_n)_n \in \mathcal{E} \ ; \ \forall x \in B , \ \forall n \in \underset{\sim}{N} , \ C_n x^n \in p^n B_k\} ,$$

où $(B_k)_k$ désigne une base de la bornologie de E formée de disques bornés, M-fermés. L'ensemble

$$\mathcal{E}_{k,p,x,n} = \{(C_n)_n \in \mathcal{E} \ ; \ C_n x^n \in p^n B_k\}$$

est donc fermé dans $\mathcal{E}$. Comme B_k est disqué il en est de même de $\mathcal{E}_{k,p,x,n}$. Par suite, $\mathcal{E}_{k,p}$, intersection de tels ensembles, est également un disque fermé. On a supposé par hypothèse que toute fonction entière $(C_n)_n$ est telle que la suite de fonctions $x \to C_n x^n$ soit pseudo-équibornée. Ceci entraîne que $\mathcal{E} = \bigcup_{k,p} \mathcal{E}_{k,p}$ et que chaque disque fermé $\mathcal{E}_{k,p}$ est non vide à partir d'un certain rang. En vertu du théorème de Baire, il existe k_0 et p_0 dans $\underset{\sim}{N}$ tels que $\mathcal{E}_{k_0,p_0}$ contienne un voisinage de O de la forme (α , β) où α et β sont deux réels positifs. Pour toute fonction $(C_n)_n$ de $\mathcal{E}$, vérifiant $|C_n| \leq \alpha\beta^n$, $\forall$ n , on a

$$C_n x^n \in p_0^n B_{k_0} , \ \forall n \ \text{et} \ \forall x \in B .$$

Il en est donc ainsi de $C_n = \alpha\beta^n$. Ce qui donne

$$\alpha\beta^n \, x^n \in p_0^n \, B_{k_0} \ , \quad \forall \ x \in B \ \text{ et } \ \forall \ n \in \underset{\sim}{N} \ ,$$

c'est-à-dire $x^n \in (p_0/\beta)^n \, . \, \alpha^{-1} \, B_{k_0}$. Donc on a montré qu'il existe un borné B_1 et un nombre réel positif β_0 tels que $x \in B$ entraîne $x^n/\beta_0^n \in B_1$. Ce qui signifie que la suite $x \to x^n$ est pseudo-équibornée.

Remarques.

1° Dans la démonstration précédente, on peut remplacer $\mathcal{E}$ par n'importe quelle sous-algèbre $\mathfrak{F}$ fermée dans $\mathcal{E}$ (donc $\mathfrak{F}$ sera une algèbre de Fréchet) et ainsi prouver, par application du théorème de Baire, que si tout élément $(C_n)_n$ de $\mathfrak{F}$ est tel que la suite de fonctions $x \to C_n \, x^n$ soit pseudo-équibornée, alors la suite $x \to x^n$ est elle-même pseudo-équibornée.

2° Le théorème 6, ainsi que la proposition 3, ont mis en évidence la propriété suivante : la suite des fonctions puissances $(x^n)_n$ est pseudo-équibornée. Cette propriété est équivalente dans une algèbre bornologique (non forcément commutative, ni convexe) au fait que tout borné de l'algèbre est équirégulier ([19], equiregular boundedness, p. 123) et généralise la propriété de multiplicativité de la bornologie dans le cas convexe et commutatif. Cette situation est comparable au cas topologique, où, la propriété d'équicontinuité en 0 de la suite des fonctions puissances $(x^n)_n$ généralise et joue, dans certains cas, le rôle de la multiplicativité locale des algèbres localement convexes commutatives [16].

A partir du théorème 6, on retrouve le résultat principal de [15] :

COROLLAIRE 7. - Si E est une algèbre bornologique convexe commutative, complète et à base dénombrable saturée, alors E est une a. b. m. c. si, et seulement si, les fonctions entières opèrent sur E.

Démonstration. - D'après le corollaire 5, pour toute fonction entière $(a_n)_n$, la suite de fonctions $x \to a_n \, x^n$ est pseudo-équibornée, par conséquent il en est de même, d'après le théorème 6, de la suite $x \to x^n$. Or cette dernière propriété est équivalente, d'après la proposition 3, au fait que E est une a. b. m. c..

4. Caractérisation des algèbres bornologiques à base dénombrable où opèrent les fonctions entières.

Dans ce qui suit nous allons donner un théorème dual du résultat de TURPIN dans [16] (voir également [17], th. (10.2.10)) qui affirme que dans une algèbre topologique localement convexe de Fréchet (non nécessairement commutative) les fonctions entières opèrent si, et seulement si, la suite des fonctions puissances $(x^n)_n$ est équicontinue en 0.

Dans une algèbre bornologique E, dire qu'une fonction entière $(a_n)_n$ opère dans

E , équivaut au fait que la suite de fonctions $x \to a_n x^n$ est simplement bornée dans E . Un théorème, comme le corollaire 5, qui affirme que, pour toute fonction entière $(a_n)_m$ qui opère dans E , la suite $x \to a_n x^n$ est pseudo-équibornée, est en quelque sorte un théorème de type Banach-Steinhaus. Dans la suite, on va établir deux tels théorèmes (pour des polynômes homogènes) qu'on appliquera au cas des algèbres.

THÉORÈME 8. - Soient E et F deux e. b. c. complets, la bornologie de F étant à base dénombrable saturée. Soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes homogènes bornés telle que, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, P_n soit de degré n . Si la suite $(P_n)_n$ est simplement bornée, alors elle est pseudo-équibornée.

Démonstration. — Nous allons donner une démonstration analogue à celle de la proposition 4. Soit $(B_n)_n$ une base de la bornologie de F , formée de disques complétants, M-fermés et vérifiant $B_n . B_n \subset B_{n+1}$. Soit B un disque borné complétant de l'espace E . Pour tout entier n , soit

$$F_n = \{x \in E_B \ ; \ P_q(x) \in B_n \ , \ \forall\, q \in \underset{\sim}{N}\} \ .$$

C'est un fermé de E_B car les polynômes P_q sont supposés bornés, donc M-continus. Comme la suite $(P_q)_q$ est simplement bornée, il s'ensuit que $E_B = \bigcup_n F_n$. D'après le théorème de Baire, il existe un entier n_0 tel que le fermé F_{n_0} soit d'intérieur non vide. Soit $x_0 \in F_{n_0}$ et $\alpha > 0$ tels que $x_0 + \alpha B \subset F_{n_0}$. Ceci signifie que, pour tout entier n , on a

$$P_n(x_0 + \alpha B) \subset B_{n_0} \ .$$

Appliquons maintenant une technique de transport à l'aide de la formule suivante [5] :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} P_n(x_0 + px) \ .$$

Puisque $P_n(x_0 + \alpha B) \subset B_{n_0}$, on en déduit que

$$P_n(\alpha B/n) \subset \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} B_{n_0} \ .$$

Comme B_{n_0} est convexe, on obtient

$$P_n(\alpha B/n) = \frac{\alpha^n}{n^n} P_n(B) \subset \frac{2^n}{n!} B_{n_0} \ ,$$

c'est-à-dire

$$P_n(B) \subset (2n/\alpha)^n \frac{1}{n!} B_{n_0} \ , \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N} \ .$$

D'après la formule de Stirling on conclut que

$$P_n(B) \subset (2e/\alpha)^n B_{n_0} \ , \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N} \ .$$

Ce qui prouve que la suite $(P_n)_n$ est pseudo-équibornée.

Remarque. - Le théorème précédent est valable dans le cas plus général où F est un e. v. b. (espace vectoriel bornologique) exponentiellement galbé, c'est-à-dire tel que pour tout borné B de F, l'ensemble $\bigcup_{N\geq 0} \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} B$ est encore borné (ces espaces sont étudiés dans [17].)

COROLLAIRE. - *Si E est une algèbre bornologique convexe complète (non nécessairement commutative) dont la bornologie est à base dénombrable saturée, alors la famille $(x^n)_n$ est pseudo-équibornée si, et seulement si, toutes les fonctions entières opèrent dans E.*

Démonstration. - Si les fonctions entières opèrent dans l'algèbre E, cela signifie que, pour toute fonction entière $(a_n)_n$, la suite de fonctions $x \to a_n x^n$ est simplement bornée. Ce sont des polynômes homogènes bornés, donc, d'après le théorème précédent, pour toute fonction entière $(a_n)_n$, la suite de fonctions $x \to a_n x^n$ est pseudo-équibornée. Par conséquent, d'après le théorème 6, la suite $x \to x^n$ est pseudo-équibornée.

Inversement, supposons qu'il en soit ainsi. Tout borné est donc équirégulier, en particulier tout élément est régulier. Soit $(C_n)_n$ une fonction entière ; pour tout élément x de E, il existe un borné disqué, complétant et idempotent, tel que x appartienne à l'algèbre de Banach E_B. Il est clair alors que la série $\sum_n C_n x^n$ converge dans E_B.

5. Algèbres de Silva.

On se propose, dans ce qui suit, de caractériser, dans le cas non nécessairement commutatif, les algèbres bornologiques convexes de Silva sur lesquelles opèrent toutes les fonctions entières (ou tout au moins celles d'une sous algèbre fermée $\mathfrak{F}$ de l'algèbre $\mathcal{E}$ des fonctions entières).

Rappelons qu'un e. b. c. E (espace bornologique convexe) est de Schwartz si tout disque borné A de E est absorbé par un disque borné B, tel que l'injection canonique $E_A \to E_B$ soit compacte. Un e. b. c. de Schwartz, à base dénombrable, est appelé e. b. c. de Silva ou espace de Silva. Une algèbre bornologique convexe est une algèbre de Silva si l'e. b. c. sous-jacent est de Silva.

La démonstration du théorème suivant, fondée sur la théorie des fonctions analytiques, est de nature différente de celles qu'on a vues jusqu'à maintenant.

THÉORÈME 10. - *Soient E et F deux e. b. c. topologiques (c'est-à-dire dont la bornologie est définie par la famille des parties bornées d'un e. l. c.) complets, tels que E soit de Schwartz. Si $(P_n)_n$ est une suite de polynômes homogènes bornés, avec P_n de degré n, $\forall n \in \mathbb{N}$, simplement bornée, alors la suite $(P_n)_n$ est équibornée.*

Démonstration. Soit B' un disque borné complétant de E. Pour tout entier $n \in \underset{\sim}{N}$, considérons la restriction de P_n à l'espace de Banach $E_{B'}$. L'application P_n est continue de $E_{B'}$ dans l'e. l. c. F (muni de la topologie à laquelle est associée la bornologie de F). $E_{B'}$ étant un espace de Baire, d'après le théorème (5.2.) de [6], la fonction $A(x) = \sum_n P_n(x)$ est analytique de $E_{B'}$ dans l'e. l. c. E, au sens de [6] (cf. définition p. 90). C'est donc une fonction continue. Soit B un disque borné de E, fermé pour la topologie de E, donc M-fermé pour la bornologie de E. Puisque E est un e. b. c. de Schwartz, il existe un disque borné complétant B' dans E, contenant B et tel que B soit relativement compact dans $E_{B'}$; donc B est compact dans $E_{B'}$. Mais, d'après le début de cette démonstration, la fonction A est continue de $E_{B'}$ dans F, donc $A(B)$ est un borné de F. Ce qui montre que la fonction A est bornée. Si C est un disque borné complétant de F, tel que $A(B) \subset C$, alors la fonction A est analytique de l'espace de Banach E_B dans l'espace de Banach F_C. D'après la formule de Cauchy on a :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} A^{(n)}(0).x^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \frac{A(\lambda x)}{\lambda^{n+1}} d\lambda \text{ ;}$$

donc on a

$$\|P_n(x)\|_C \leqslant M \text{ (constante) }, \quad \forall\, x \in B$$

car $x \to A(\lambda x)$ (λ tel que $|\lambda| = 1$) est bornée de E_B dans F_C, ce qui signifie que $P_n(B) \subset MB'$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$ et que la suite $(P_n)_n$ est équibornée.

COROLLAIRE 11. - Si E est une algèbre bornologique convexe, complète, topologique et bornologiquement de Schwartz et si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ est une série de puissances (où, $\forall\, n$, P_n est un polynôme homogène borné, de degré n) qui opère dans l'algèbre E, alors la suite $(P_n)_n$ est équibornée.

THÉORÈME 12. - Dans une algèbre bornologique convexe de Silva E, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1.) Les fonctions entières d'une sous-algèbre fermée $\mathfrak{F}$ de l'algèbre $\mathcal{E}$, opèrent dans E.

(2) Toute fonction entière opère dans E.

(3.) La suite de fonctions $x \to x^n$ $(n \in \underset{\sim}{N})$ est pseudo-équibornée.

Dans le cas où E est commutative, E est une a. b. m. c. si, et seulement si, E vérifie l'une des trois propriétés précédentes.

Démonstration. - D'après le corollaire 11, ci-dessus, nous savons que, pour toute fonction entière $(C_n)_n$ opérant dans E, la suite de fonctions $x \to C_n x^n$ est équibornée. Si $(B_k)_{k \in N}$ désigne une base dénombrable de la bornologie de E, formée de disques bornés M-fermés, et si B est un borné disqué de E, on considère, pour tout entier $k \in \underset{\sim}{N}$, le sous-ensemble de $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F}_k = \{(C_n)_n \in \mathfrak{F} \ ; \ \forall\, x \in B \ , \ \forall\, n \in \underset{\sim}{N} \ , \ C_n x^n \in B_k\} \ .$$

Puisque, pour tout k , B_k est un disque fermé de E , il en est de même de $\mathfrak{F}_k$, dans l'algèbre de Fréchet $\mathfrak{F}$. Par application du théorème de Baire, un raisonnement identique à celui du théorème 6, montre que la suite des fonctions puissances $x \to x^n$ est pseudo-équibornée. On vient donc de montrer que (1) entraîne (3).

Comme dans le corollaire 9, on montre facilement que, si dans une algèbre bornologique convexe complète, la suite des fonctions puissances $x \to x^n$ est pseudo-équibornée, alors tout élément est régulier, et les fonctions entières opèrent dans l'algèbre. Ainsi (3) entraîne (2), alors que l'implication inverse est évidente.

Enfin, si l'algèbre E est commutative, nous savons déjà, d'après la proposition 3, que E est une a. b. m. c. si, et seulement si, la suite $(x^n)_n$ est pseudo-équibornée.

<u>Remarques et problèmes</u>. — Nous nous sommes efforcés dans ce qui précède de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur une algèbre bornologique E , convexe, à base dénombrable et complète, pour que les fonctions entières opèrent dans E , dans le cas où E n'est pas forcément commutative. Le problème de savoir si ces conditions sont équivalentes à la multiplicativité de la bornologie de E , reste ouvert. Les démonstrations données dans les propositions 3 et 4 dépendent de façon essentielle de l'hypothèse de commutativité (formule de polarisation par exemple).

La situation est identique dans le cas topologique [21]. Si E est une algèbre de Fréchet non commutative, sur laquelle opèrent les fonctions entières, on sait, d'après un résultat de TURPIN que la suite $(x^n)_n$ est équicontinue, mais on ne sait pas, si dans ce cas, l'algèbre est nécessairement localement multiplicativement convexe. Un autre problème, de même nature que ceux qu'on vient d'évoquer, est le suivant : Est-ce qu'une algèbre bornologique convexe non commutative dont l'ensemble des éléments inversibles est Mackey-ouvert et telle que l'application $x \to x^{-1}$ soit M-continue, est nécessairement une a. b. m. c. ? On sait uniquement que, dans ce cas, tout borné est équirégulier [1]. Le même problème se pose pour une algèbre localement convexe à inverse continu ; est-elle localement multiplicativement convexe ? Dans le cas commutatif, cela est vrai d'après [16].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKKAR (M.). - Etude spectrale et structure d'algèbres topologiques et bornologiques complètes, Thèse Sc. math. Bordeaux, 1976.

[2] ALLAN (G. R.), DALES (H. G.), McCLURE (J. P.). - Pseudo-Banach algebras, Studia Math., Warszawa, t. 40, 1971, p. 55-69.

[3] ARENS (R.). - The space L^{ω} and convex topological ring, Bull. Amer. math. Soc., t. 52, 1946, p. 931-935.

[4] ARENS (R.). - A generalization of normed rings, Pacific J. Math., t. 2, 1952, p. 455-471.

[5] BOCHNAK (J.), SICIAK (J.). - Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces, Studia Math., Warszawa, t. 39, 1971, p. 59-76.

[6] BOCHNAK (J.), SICIAK (J.). - Analytic functions in topological vector spaces, Studia Math., Warszawa, t. 39, 1971, p. 77-112.

[7] BONNARD (M.). - Sur le calcul fonctionnel holomorphe multiforme dans les algèbres topologiques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 4, t. 2, 1969, p. 397-422.

[8] CRAW (I. G.). - A condition equivalent to the continuity of characters on a Frechet algebra, Proc. London math. Soc., t. 22, 1971, p. 452-464.

[9] CRAW (I. G.). - Functional calculus in commutative topological algebras, Thesis, Cambridge, 1969.

[10] HOGBE-NLEND (H.). - Théorie des bornologies et applications. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 213).

[11] HOGBE-NLEND (H.). - Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques, Bol. Soc. Brasil. Mat., t. 3, 1972, p. 19-56.

[12] HOUZEL (C.). - Séminaire Banach. - Berlin, Springer-Verlag, 1972 (Lecture Notes in Mathematics, 277).

[13] MICHAEL (E. A.). - Locally multiplicatively convex topological algebras. - Providence, American Mathematical Society, 1952 (Memoirs of the American mathematical Society, 11).

[14] MIEUSSENS (M.). - Fonctions entières dans les algèbres bornologiques, Thèse 3e cycle, Bordeaux, 1975.

[15] MIEUSSENS (M.). - Fonctions entières dans les algèbres bornologiques, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 277, 1973, p. 31-34.

[16] TURPIN (P.). - Une remarque sur les algèbres à inverse continu, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 270, 1970, p. 1686-1689.

[17] TURPIN (P.). - Convexités dans les espaces vectoriels topologiques, Thèse Sc. math. Orsay, 1974.

[18] WAELBROECK (L.). - Algèbres commutatives : éléments réguliers, Bull. Soc. math. Belgique, t. 9, 1957, p. 42-49.

[19] WAELBROECK (L.). - Topological vector spaces and algebras. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 230).

[20] ZELAZKO (W.). - Selected topics in topological algebras. - Aarhus, Aarhus Universitet, Matematisk Institut, 1971 (Lecture Notes Series, 31).

[21] ZELAZKO (W.), ROLEWICZ (S.), MITJAGIN (B.). - Entire functions in B_0-algebras, Studia Math., Warszawa, t. 21, 1962, p. 291-306.

(Texte reçu le 8 juillet 1976)

Mohamed AKKAR
U. E. R. de Mathématiques et Informatique
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE (France)