Michel Talagrand

Capacités invariantes par translation

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° 15, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, n° 15, 11 p.

19 février et 4 mars 1976

CAPACITÉS INVARIANTES PAR TRANSLATION

par Michel TALAGRAND

L'objet de ce travail est l'étude, dans certaines situations, de l'ensemble des points extrémaux d'un simplexe de mesures de Radon sur un espace localement compact, qui sont invariantes par l'action d'un groupe localement compact. Le cas que nous étudions plus précisément, celui des capacités, peut aussi se voir comme une généralisation naturelle du shift de Bernoulli sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

I. Préliminaires.

On désigne par G un groupe localement compact, par m une mesure de Haar à gauche sur G, et par E un espace localement compact. Notons bien que ni E, ni G ne sont a priori supposés métrisables ou dénombrables à l'infini.

On suppose que G opère sur E par une application

$$G \times E \longrightarrow E$$

$$(g, x) \rightarrow g.x$$

continue. L'élément g de G étant fixé, l'application $x \rightarrow g.x$ est donc un homéomorphisme de E. Notre objet est l'étude du cône $\mathfrak{J}$ des mesures de Radon $\geqslant 0$ sur E qui sont invariantes par l'action de G, et de l'ensemble $\mathcal{E}(\mathfrak{J})$ des points de $\mathfrak{J}$ qui sont sur des génératrices extrémales de $\mathfrak{J}$. On munira $\mathfrak{J}$ de la topologie vague.

Désignant par $\mathcal{K}(T)$ l'espace des compacts d'un espace topologique T, on dira que G agit proprement sur E si la condition suivante est vérifiée

(AP) $\qquad \forall K \in \mathcal{K}(E)\ ,\ \exists L \in \mathcal{K}(G)\ :\ g \notin L \Rightarrow K \cap g.K = \emptyset$.

Supposons (AP) vérifiée. Alors l'application θ_x

$$\theta_x : \begin{array}{l} G \rightarrow E \\ g \rightarrow g.x \end{array}$$

est propre, donc la mesure μ_x, image de m par θ_x, est bien définie.

Désignons par $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence, définie sur $\mathbb{R}_+^* \times E$ par

$$(\alpha , x)\ \mathcal{R}\ (\alpha' , x') \Longleftrightarrow \exists\ s \in G \quad \begin{cases} x' = s.x \\ \alpha' = \alpha\, \Delta(s) \end{cases}$$

où Δ désigne la fonction module de G. On montre, sans trop de peine, que (grâce à (AP)) l'espace topologique $T = (\mathbb{R}_+^* \times E)/\mathcal{R}$ est séparé et localement compact.

Ceci étant, on a le résultat suivant, qui décrit complètement la situation :

THÉORÈME 1. - L'application

$$\underset{\sim}{R}_+^* \times E \to \mathfrak{J}$$

$$(\alpha , x) \to \alpha\mu_x$$

est compatible avec $\mathcal{R}$ et définit un homéomorphisme de T et $\mathcal{E}(\mathfrak{J})$. De plus,

$$\mathcal{E}(\mathfrak{J}) \cup \{0\}$$

est fermé.

Il est naturel de se demander, dans le cas général, quelles relations il y a entre le fait que $\mathfrak{J}$ possède une base compacte (resp. soit bien coiffée) et les propriétés de l'action de G . C'est ce que nous allons examiner maintenant.

Désignons par $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence sur E , définie par

$$x \mathcal{R}' y \Longleftrightarrow x \in G.y ,$$

et par T' l'espace topologique $E/\mathcal{R}$. Lorsque (AP) est vérifiée, T' est séparé et localement compact.

ASSERTIONS 2. - Considérons les assertions suivantes

(a) $\mathfrak{J}$ possède une base compacte.

(b) Il existe un compact X de E tel que $G.X = E$.

(c) T' est compact.

(d) $\mathfrak{J}$ est bien coiffé.

(e) Il existe une famille dénombrable $(X_n)_n$ de compacts de E tels que

$$\bigcup_n G.X_n = E .$$

(f) Toute partie discrète fermée de T' est dénombrable.

(g) T' est dénombrable à l'infini.

Ceci étant, nous avons les implications suivantes.

THÉORÈME 3. - (a) $\Rightarrow$ (b) et (e) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (f) .

De plus, si (AP) est vérifiée, on a aussi

$$(a) \Longleftrightarrow (b) \Longleftrightarrow (c) \quad \text{et} \quad (g) \Longleftrightarrow (e) \Rightarrow (d) \Rightarrow (f) .$$

Supposons de nouveau (AP) vérifiée. Puisque, grâce au théorème 1, on connait les génératrices extrémales de $\mathfrak{J}$, il faut se demander quand un point de $\mathfrak{J}$ peut se représenter par une mesure sur T . Il n'y a pas en général de représentation canonique. Nous devrons nous contenter d'un résultat partiel. L'application

$$\underset{\sim}{R}_+^* \times E \to E$$

$$(\alpha , x) \to x$$

définit, par passage au quotient, une application continue de $T \simeq \mathcal{E}(\mathfrak{I})$ sur T'. Supposons que cette application admette une sélection continue $\theta : T' \to \mathcal{E}(\mathfrak{I})$ (Ce sera le cas si G est unimodulaire. Voir aussi le théorème 8 plus bas).

Désignons par $\mathcal{C}_c(E)$ l'ensemble des fonctions continues sur E à support compact, on a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - Pour toute mesure μ de $\mathfrak{I}$, il existe une unique mesure de Radon ν sur T' telle que, pour toute φ de $\mathcal{C}_c(E)$, on ait

$$\mu(\varphi) = \int_{T'} \theta(x)(\varphi)\, d\nu(x) .$$

En particulier, pour tout compact L de E, on a

$$\mu(L) = \int_{T'} \theta(x)(L)\, d\nu(x) .$$

De plus, la correspondance ainsi définie est un homéomorphisme lorsque $\mathfrak{I}$ et l'espace $M^+(T')$ des mesures de Radon ≥ 0 sur T sont munis de la topologie vague.

Nous allons maintenant traduire les résultats obtenus dans un autre langage, celui des capacités. Pour toute référence concernant les capacités, voir l'ouvrage de base de G. CHOQUET [1]. Voir aussi [2] pour des précisions concernant les théorèmes de représentation des capacités.

Considérons d'abord le cas des capacités monotones d'ordre infini sur E. L'espace $\mathcal{K}(E)$ des compacts de E, muni de la topologie classique, est localement compact. Étant donné un compact L de E, définissons

$$\underset{\sim}{L} = \{L' \in \mathcal{K}(E) ;\ L' \subset L\}$$

c'est un compact de $\mathcal{K}(E)$. Ceci étant, le résultat fondamental est le théorème de représentation suivant.

THÉORÈME 5 (CHOQUET). - A chaque capacité f, monotone d'ordre infini, sur E, correspond une unique mesure μ sur $\mathcal{K}(E)$ telle que, pour tout compact K de E, on ait

$$f(K) = \mu(\underset{\sim}{K}) .$$

De plus, cette correspondance définit un homéomorphisme lorsque le cône des capacités monotones d'ordre infini sur E et $M_+(\mathcal{K}(E))$ sont munis de la topologie vague.

Désignons par $\mathfrak{M}$ le cône des capacités monotones d'ordre infini sur E qui sont invariantes par l'action de G, et par $\mathcal{E}(\mathfrak{M})$ l'ensemble des points de $\mathfrak{M}$ qui sont sur des génératrices extrémales de $\mathfrak{M}$.

Puisque G agit sur E, il agit naturellement sur $\mathcal{K}(E)$. Le théorème 5 montre que la situation est du type précédemment étudié, au remplacement près de E par $\mathcal{K}(E)$.

LEMME 6. - L'action de G sur E vérifie (AP) si, et seulement si, l'action de

G sur $\mathcal{K}(E)$ vérifie (AP).

Supposons désormais (AP) vérifiée, jusqu'au théorème 8 inclus.

Étant donné un compact K de E, désignons par f_K la capacité donnée par

$$f_K(L) = m(\{t \ ; \ t.K \subset L\})$$

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\underset{\sim}{R}_+^* \times \mathcal{K}(E)$, définie par

$$(\alpha , K) \ \mathcal{R} \ (\alpha' , K') \iff \exists \ s \in G \quad \begin{cases} K' = s.K \\ \alpha' = \Delta(s) \ \alpha \end{cases}$$

Ces notations étant fixées, on déduit du théorème 1 le théorème suivant :

THÉORÈME 7. - L'application

$$\underset{\sim}{R}_+^* \times \mathcal{K}(E) \to \mathcal{M}$$

$$\alpha , K \to \alpha f_K$$

est compatible avec $\mathcal{R}$, et définit, par passage au quotient, un homéomorphisme de $(\underset{\sim}{R}_+^* \times \mathcal{K}(E))/\mathcal{R}$ sur $\mathcal{E}(\mathcal{M})$. De plus, $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \cup \{0\}$ est fermé.

Prenons par exemple $E = G$, avec l'opération de G sur lui-même, définie par les translations à gauche. On peut alors préciser les résultats des théorèmes 3 et 4. Pour cela, soit $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{K}(E)$, définie par

$$K \ \mathcal{R}' \ K' \iff \exists \ s \in G , \qquad K' = s.K .$$

Désignons par $\dot{K}$ la classe d'équivalence d'un compact K, et par $\mathcal{U}$ l'espace topologique localement compact $\mathcal{K}(E)/\mathcal{R}$.

Pour un compact K, désignons par g_K la capacité

$$g_K = \sup_{s \in K} \Delta^{-1}(s).f_K .$$

Elle ne dépend que de $\dot{K}$.

Ceci étant, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 8.

1° $\mathcal{M}$ possède une base compacte si, et seulement si, G est compact.

2° $\mathcal{M}$ est bien coiffé si, et seulement si, G est dénombrable à l'infini.

3° Pour toute f de $\mathcal{M}$, il existe une unique mesure de Radon ν sur $\mathcal{U}$ telle que

$$f(L) = \int_{\mathcal{U}} g_K(L) \ d\nu(\dot{K}) \quad \text{pour tout compact } L \text{ de } G .$$

De plus, cette correspondance définit une homéomorphie lorsque $\mathcal{M}$ et $M^+(\mathcal{U})$ sont munis de la topologie vague.

Considérons maintenant le cas des capacités alternées d'ordre infini sur E. Soit

$\mathfrak{F}(E)$ l'ensemble des fermés non vides de E. Étant donné un compact L de E, définissons

$$\tilde{L} = \{F \in \mathfrak{F}(E) \; ; \; F \cap L \neq \emptyset\} .$$

Plaçons sur $\mathfrak{F}(E)$ la topologie usuelle (une base de voisinages d'un fermé F est constituée d'ensembles de la forme $\tilde{L}_1 \cap \ldots \cap \tilde{L}_p \cap \tilde{L}^c$, où, pour $i = 1, \ldots, p$, $F \cap \overset{\circ}{L}_i \neq \emptyset$, et où $F \cap L = \emptyset$). Pour cette topologie, $\tilde{L}$ est compact. On a le résultat suivant, analogue du théorème 5, et également dû à CHOQUET.

THÉORÈME 9. – <u>A chaque capacité f alternée d'ordre infini sur E correspond une unique mesure de Radon μ sur $\mathfrak{F}(E)$ telle que, pour tout compact K de E, on ait</u>

$$f(K) = \mu(\tilde{K}) .$$

<u>De plus, cette correspondance définit un homéomorphisme lorsque le cône des capacités alternées d'ordre infini sur E, et $\mathcal{M}_+(\mathfrak{F}(E))$, sont munis de la topologie vague.</u>

Désignons par $\mathfrak{a}$ le cône des capacités alternées d'ordre infini sur E qui sont invariantes par l'action de G, et par $\mathcal{E}(\mathfrak{a})$ l'ensemble des points de $\mathfrak{a}$ qui appartiennent à des génératrices extrémales de $\mathfrak{a}$.

G opère de façon naturelle sur $\mathfrak{F}(E)$, de sorte que l'étude de $\mathfrak{a}$ revient, grâce au théorème 9, à celle d'un cône de mesures invariantes. Mais, et c'est là que les choses deviennent intéressantes, l'action de G sur $\mathfrak{F}(E)$ ne vérifie (AP) que si G est compact. Le cas où G est non compact et où l'action de G sur E vérifie (AP) est suffisamment précis pour qu'il y ait beaucoup à dire, tout en étant infiniment plus riche que le cas traité par le théorème 1. C'est l'étude de ce cas qui fait l'objet des paragraphes suivants. Avant de l'aborder, et pour conclure le précédent paragraphe, terminons-en avec le cas où G est compact, ce qui est maintenant affaire de routine.

Désignons par $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathfrak{F}(E)$, définie par

$$F \,\mathcal{R}\, F' \iff \exists\, s \in G , \quad F' = s.F$$

(G étant compact, la fonction module vaut identiquement 1).

Étant donné un fermé F de E, soit f_F la capacité sur E donnée par

$$f_F(L) = m(\{t \in G \; ; \; (t.F) \cap L \neq \emptyset\})$$

pour tout L de $\mathcal{K}(E)$. Ceci étant, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 10. – <u>L'application</u>

$$\mathfrak{F}(E) \to \mathfrak{a}$$

$$F \to f_F$$

<u>est compatible avec $\mathcal{R}$. L'application de $\mathbb{R}_+^* \times (\mathfrak{F}(E)/\mathcal{R})$ dans $\mathfrak{a}$ que l'on en déduit est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times (\mathfrak{F}(E)/\mathcal{R})$ sur $\mathcal{E}(\mathfrak{a})$. De plus, $\mathcal{E}(\mathfrak{a}) \cup \{0\}$ est</u>

fermé.

II. Capacités invariantes : premiers résultats.

On suppose désormais G non compact. Par capacité sur E , on entendra maintenant "capacité alternée d'ordre infini sur E invariante par l'action de G ". L'on s'autorisera tout abus de langage possible en identifiant une capacité et la mesure sur $\mathfrak{F}(E)$ qui la représente.

On suppose que l'action de G sur E vérifie (AP) uniquement lorsque il en est fait mention .

Une capacité f sur D sera dite bornée ou non bornée suivant que $\sup_{K\subset E} f(K)$ est fini ou non, c'est-à-dire suivant que la mesure représentative de f est bornée ou non.

La proposition suivante, conséquence facile du théorème 3, est utile pour montrer que $\mathfrak{a}$ possède des éléments extrémaux.

PROPOSITION 11. - $\mathfrak{a}$ possède une base compacte si, et seulement si, il existe un compact X de E tel que $G.X = E$.

Supposons que l'action de G sur E vérifie (AP). Alors, étant donnés deux compacts K et L de E , l'ensemble $\{t \in G \ ; \ t.K \cap L \neq \emptyset\}$ est compact. On peut donc définir la capacité f_K par

$$f_K(L) = m(\{t \in G \ ; \ t.K \cap L \neq \emptyset\}) \ .$$

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{K}(E)$ par

$$(\alpha , K) \,\mathcal{R}\, (\alpha' , K') \iff \exists\, s \in G \quad \begin{cases} K' = s.K \\ \alpha' = \Delta(s)\,\alpha \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant, qui montre que la situation est beaucoup plus compliquée que dans les cas étudiés dans le paragraphe 1.

THÉORÈME 12.

(i) L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{K}(E) &\to \mathfrak{a} \\ \alpha , K &\to \alpha f_K \end{aligned}$$

est continue et à valeurs dans $\mathcal{E}(\mathfrak{a})$. L'application quotient n'est pas un homéomorphisme.

(ii) Il existe un élément de $\mathcal{E}(\mathfrak{a})$ non borné qui n'est pas de la forme αf_K .

Dans la deuxième assertion de ce théorème, on précise "non borné", car nous verrons plus tard (théorème 20) qu'il y a beaucoup d'éléments extrémaux bornés. La démonstration est assez technique, mais se simplifie beaucoup, quand G est moyennable, grâce au théorème 24 et au fait que l'ensemble des points extrémaux d'un convexe compact est fortement tamisable.

III. Construction et exemples de capacités "extrémales" ([1]).

Nous allons tout d'abord étudier une méthode permettant de construire des capacités extrémales à l'aide d'éléments extrémaux d'autres cônes (cônes de mesures, de capacités, etc.).

Revenons à la situation du groupe G opérant sur un espace E , et soit μ une mesure de Radon sur E . On dit qu'un ensemble μ-mesurable B est μ-invariant, si, pour tout élément t de G , $B \Delta (t.B)$ est localement μ-négligeable. L'idée du lemme suivant est bien classique en théorie ergodique.

LEMME 13. - Soit $\mu \in \mathfrak{J}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) μ est dans $\mathcal{E}(\mathfrak{J})$.

(ii) Pour tout ensemble μ-mesurable, B , qui est μ-invariant, soit B , soit B^c , est localement μ-négligeable.

Ce lemme est la clef du théorème suivant.

THÉORÈME 14. - Soient E_1 et E_2 des espaces localement compacts sur lesquels G opère continûment. Soit $\mu_1 \in \mathcal{E}(\mathfrak{J}_1)$. Soit D_1 un sous-ensemble de E_1 qui est μ_1-mesurable et invariant par l'action de G . Soit φ une application de D_1 dans E_2 , vérifiant les propriétés suivantes :

- φ commute avec l'action de G .
- φ est mesurable lorsque E_1 est muni de la tribu des ensembles μ_1-mesurables et E_2 de sa tribu de Baire.
- Pour tout K compact G_δ de E_2 , on a $\mu_1(\varphi^{-1}(K)) < +\infty$.

Alors la mesure image μ_2 de μ_1 par φ est définie et appartient à $\mathcal{E}(\mathfrak{J}_2)$.

Lorsque E_2 est métrisable et dénombrable à l'infini, la preuve est à peu près immédiate. Dans le cas général, il y a quelques complications techniques, mais standards.

Le théorème 14 est la base du théorème suivant, qui nous intéresse plus directement.

THÉORÈME 15. - Soient E et E' deux espaces localement compacts sur lesquels G opère continûment. Soit μ un élément de $\mathcal{E}(\mathfrak{J}')$. Soit h une application de $\mathcal{K}(E)$ dans l'ensemble des parties μ-mesurables de E' , de mesure finie, qui commute avec l'opération de G , et qui vérifie, pour tous compacts K et L de E :

$$h(K \cup L) = h(K) \cup h(L) .$$

([1]) Par abus de langage, nous dirons parfois extrémale au lieu de "sur une génératrice extrémale".

Alors l'application f , définie par

$$f(K) = \inf_{K\subset \mathring{L}, L\in\mathcal{K}(E)} \mu(h(L)) ,$$

est une capacité extrémale.

Ce théorème a pour corollaire un certain nombre de résultats analogues où l'on définit une capacité à partir d'objets divers (capacités, applications alternées d'ordre infini, valuations) qui peuvent se représenter par des mesures (voir [2]). Il serait fastidieux de les énoncer, aussi allons-nous donner des exemples concrets.

Exemple 16. - Prenons $E = G$, et supposons que G ne soit pas unimodulaire. Il existe alors des fermés F non compacts de G tels que, pour tout compact K de G , on ait $m(KF) < \infty$ (Par exemple $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} t^n$, ou $\Delta(t) < 1$). Alors l'application $K \to m(KF)$ est une capacité extrémale. De plus, si $m(KF) = \alpha m(KF')$ pour tout K , alors il existe $s \in G$ tel que $F = F' s$ et $\Delta(s) = \alpha$.

Exemple 17. - Supposons G discret et infini, et toujours $E = G$.

Soit A un compact, et λ une mesure ≥ 0 de masse 1 sur A . Munissons $B = A^G$ de la mesure produit μ . Le groupe G opère canoniquement sur B par l'application (shift)

$$(t , (a_s)_{s\in G}) \to (a_{st})_{s\in G} .$$

La mesure μ est invariante et extrémale dans l'ensemble des mesures invariantes. Ainsi, si M est un ensemble mesurable, l'application

$$K \to \mu(\bigcup_{k\in K} k.M)$$
$$\mathcal{K}(G) \to \underset{\sim}{R}$$

est une capacité extrémale.

Exemple 18. - Soit H un groupe localement compact opérant sur E , et θ un homomorphisme continu de G dans H , tel que $\overline{\theta(G)} = H$. Cet homomorphisme définit une opération continue de G sur E . Soit L un compact de E , et g une capacité extrémale de $\mathfrak{a}_H$ (ensemble des capacités alternées d'ordre infini sur E invariantes par l'action de H). Alors l'application

$$K \to g(\theta(K).L)$$

est extrémale dans le cône $\mathfrak{a}_G$.

Supposons maintenant $E = H$, et $g = \nu$ une mesure de Haar à gauche sur G . On peut montrer alors que la capacité $K \to \nu(\theta(K).L)$ admet une écriture canonique. Plus précisément, il existe un compact L' de H tel que $\nu(\theta(K) L) = \nu(\theta(K) L')$ pour tout compact K de G , et que $\nu(\theta(\mathring{K}).(\overline{\mathcal{O}} \cap L')) > 0$ dès que l'ouvert $\mathcal{O}$ rencontre L' et que $K \neq \emptyset$. Réciproquement, si L' et L'' sont deux compacts de H vérifiant la propriété précédente, et tels que, pour tout compact K de G , on ait

$$\nu(\theta(K).L') = \alpha\nu(\theta(K).L'') ,$$

alors il existe $t \in H$ tel que $L' = L'' t$ et $\alpha = \Delta_H(t)$.

Il serait intéressant de trouver d'autres cas d'une telle écriture canonique.

Exemple 19. - Soit $\check{G}$ le compactifié de Stone-Čech de G . C'est un compact, sur lequel opère G . Supposons qu'il existe sur $\check{G}$ une probabilité ν invariante par l'action de G (on dit alors que G est moyennable. Voir [3] pour une excellente introduction aux groupes moyennables). L'ensemble de ces probabilités (on les appelle des moyennes) forme alors un simplexe. Supposons que ν soit un point extrémal de ce simplexe. Soit F un fermé de E . Alors la fonction de compacts

$$K \to \inf_{K \subset L^\circ} \nu(\overline{\{t \in G \; ; \; tL \cap F \neq \emptyset\}}^{\check{G}})$$

est une capacité extrémale.

Cet exemple est très important, car il admet une réciproque partielle (voir théorème 25).

Voici maintenant une méthode complètement différente pour construire des capacités extrémales.

THÉORÈME 20. - Soit f une capacité sur E vérifiant la propriété suivante :

(P) Pour toutes familles finies $(K_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(K_i')_{i=1,\dots,n}$ de compacts de E et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un point t de G tel que

$$f(K_i \cup tK_i') \geq f(K_i) + f(K_i') - \varepsilon \; .$$

Alors $g : K \to 1 - e^{-f(K)}$ est une capacité extrémale.

Lorsque (AP) est vérifiée, les capacités du type f_K vérifient (P).

Lorsque G est moyennable, le théorème 20 peut être précisé. Avec les mêmes notations, nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 21. - Supposons G moyennable. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

(i) f vérifie (P).

(ii) Pour tout compact K de t et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un point f de G tel que $f(K \cup tK) \geq 2f(K) - \varepsilon$.

(iii) f ne majore (au sens de $\mathfrak{a}$) aucune capacité bornée.

(iiii) g est extrémale et $\sup_{K \in \mathcal{K}(E)} g(K) = 1$.

PROPOSITION 22. - Supposons G et E métrisables, et E dénombrable à l'infini. Alors, s'il existe un élément de $\mathfrak{a}$ borné, il n'existe pas d'ensemble analytique de $\mathfrak{F}(E)$ qui rencontre chaque classe d'équivalence modulo l'action de G en un point unique (2).

(2) Il y avait une erreur dans notre démonstration, et nous ne savons prouver que le cas où G est discret et agit proprement sur E .

D'après les résultats précédents, cette situation est réalisée dès qu'il existe un point x de E tel que l'application $t \to t.x$ de G dans E soit propre.

Lorsque G est discret, on peut même remplacer "analytique" par "universellement mesurable" dans l'énoncé de la proposition 21.

IV. Étude plus fine dans le cas où G est moyennable.

On suppose désormais que l'action de G sur E vérifie (AP).

PROPOSITION 23. - Prenons $E = G$. Supposons que l'ensemble des capacités de la forme αf_K soit vaguement dense dans $\mathfrak{A}$. Alors G est moyennable.

Le théorème suivant est bien surprenant.

THÉORÈME 24. - Supposons G moyennable. Alors, pour tous compacts $L_1, \ldots, L_n$ de E, tout élément f de $\mathfrak{A}$, et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel α et un compact K de E tels que

$$|f(L_i) - \alpha f_K(L_i)| \leq \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

En particulier, l'ensemble des capacités de la forme αf_K est vaguement dense dans $\mathfrak{A}$.

Dans la preuve de ce théorème, la moyennabilité de G s'utilise à travers la condition de FOLKNER (Voir [3]).

Ce résultat implique en particulier que $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$ est dense dans $\mathfrak{A}$. Quand E est métrisable et dénombrable à l'infini, $\mathfrak{A}$ est métrisable, et $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$ est un G_δ dense de $\mathfrak{A}$, ce qui laisse bien peu d'espoir de pouvoir en déterminer les éléments.

Désignons par $\mathfrak{B}$ l'ensemble des capacités de $\mathfrak{A}$, telles que leur mesure représentative ait une masse ≤ 1. C'est un simplexe. Soit $\mathcal{E}(\mathfrak{B})$ l'ensemble de ces points extrémaux. Il serait intéressant de savoir si $\mathcal{E}(\mathfrak{B})$ est dense dans $\mathfrak{B}$. La difficulté provient de ce qu'on ne connait pas de famille assez "riche" d'éléments de $\mathcal{E}(\mathfrak{B})$. On a quand même le résultat partiel suivant.

THÉORÈME 25. - Supposons que G soit de la forme $\underset{\sim}{R}^n \times H$, où H est un groupe localement compact possédant un sous-groupe distingué compact H', tel que le quotient H/H' soit abélien, discret et semi-simple. Prenons $E = G$. Alors l'ensemble des capacités de la forme

$$K \to m_{G'}(\pi(K)L),$$

où G' désigne un quotient compact de G, de mesure de Haar normalisée $m_{G'}$, où π désigne l'homomorphisme canonique, et où L désigne un compact de G', est dense dans $\mathfrak{B}_m$ (et est contenu dans $\mathcal{E}(\mathfrak{B})$ d'après l'exemple 18).

Voici maintenant la réciproque partielle de l'exemple 19, annoncée plus haut.

THÉORÈME 26. - Supposons G et E dénombrables à l'infini, G moyennable et E

métrisable. Il existe alors un fermé F *de* E *tel que, pour tout* f *de* $\mathcal{B}$ *, il existe une moyenne* ν *vérifiant, pour tout compact* K *de* E

$$f(K) = \inf_{K \subset L^\circ} \nu(\overline{\{t \in G \; ; \; t.L \cap F \neq \emptyset\}}^{\check{G}}) \; .$$

De plus, si f *est extrémale, on peut choisir* ν *extrémale.*

Il serait fort intéressant d'obtenir un résultat analogue concernant les capacités non bornées. Il faudrait pour cela posséder des outils assez fins de théorie esgodique, qui n'existent pas encore. (Espérons que c'est pour bientôt !)

Dans un tout autre ordre d'idées, il est souhaitable d'obtenir une caractérisation des capacités de la forme αf_K dans l'ensemble des capacités extrémales. Supposons que G opère transitivement sur E . On a alors $E = G/G_0$ où G_0 , d'après (AP), est compact. Soit m' une mesure invariante de t . Ceci étant fixé, nous avons la caractérisation suivante :

THÉORÈME 27. - *Supposons* G *moyennable et unimodulaire* (*et* $E = G/G_0$). *Alors, pour une capacité* f *de* $\mathfrak{A}$ *les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) *Il existe* $c > 0$ *tel que, pour tout compact* K *de* E , *on ait*

$$f(K) \geqslant c m'(K) \; .$$

(ii) *La mesure représentative de* f *charge* $\{F_L \; : \; L \subset X\}$ *pour un certain compact* X *de* E .

En particulier, si f *est extrémale, la condition (i) équivaut au fait que* f *soit de la forme* αf_L (L *compact de* E).

D'après l'exemple 16, on voit qu'il est nécessaire de supposer G unimodulaire. Mais est-il nécessaire de supposer G moyennable ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). - Theory of capacities, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 5, 1952-1953, p. 131-297.

[2] TALAGRAND (M.). - Quelques exemples de représentations intégrales, Bulletin Sc. math. (à paraître).

[3] GREENLEAF (F. P.). - Invariant means on topological groups. - New York, Van Rostrand Reinhold Company, 1969 (Van Nostrand Mathematical Studies, 16).

(Reçu le 29 avril 1976)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05

Remarque (ajoutée à la correction des épreuves, 2 décembre 1976). - Une version améliorée des résultats précédents, ainsi que quelques résultats nouveaux, fait l'objet de deux Notes aux C. R. Acad. Sc. Paris, qui paraîtront au début de 1977.