Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Alain Louveau

Détermination des jeux et théorie descriptive des ensembles

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° 9, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A4_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, n° 9, 7 p.
8 janvier 1976

DÉTERMINATION DES JEUX ET THÉORIE DESCRIPTIVE DES ENSEMBLES

par Alain LOUVEAU

Depuis une dizaine d'années, l'outil de la détermination des jeux infinis à information parfaite a acquis une importance croissante en théorie descriptive des ensembles. Les logiciens l'ont utilisé principalement pour étendre les résultats de structure et de régularité connus depuis longtemps pour les premières classes de la hiérarchie de Lusin à l'ensemble des classes projectives. Mais il est également possible d'utiliser ce moyen très puissant pour obtenir des résultats nouveaux concernant les ensembles analytiques, ainsi que des démonstrations, très courtes et très simples des principaux résultats de la théorie classique.

Cet exposé est destiné à familiariser les participants au Séminaire avec l'outil de la détermination des jeux. Aussi, plutôt que d'exposer les résultats les plus récents, et les plus remarquables, comme le théorème de Martin sur les jeux boréliens, ou comme les travaux de Moschovakis et Kéchris sur la théorie structurelle des ensembles projectifs à partir de l'axiome de détermination projective, avons-nous préféré montrer sur quelques exemples tirés de la théorie classique la manière dont la détermination des jeux peut être utilisée.

1. Les jeux infinis à information parfaite.

Soient X un ensemble, et A un sous-ensemble de $X^{\underset{\sim}{N}}$. On définit un jeu infini $G_X(A)$ à deux joueurs I et II de la manière suivante. Les deux joueurs choisissent alternativement des éléments de X, I commençant. Durant une partie, I produit des éléments x_0, x_2, x_4, ... et II x_1, x_3, ... Soit f la fonction qui à n associe x_n. On dit que I gagne $G_X(A)$ si $f \in A$. Sinon, c'est le joueur II qui gagne.

Le jeu est supposé à information parfaite, c'est-à-dire que chaque joueur connaît les choix précédents à chaque coup de la partie. Une stratégie pour le joueur I est par suite une fonction σ de domaine l'ensemble $\mathrm{Seq}\, X$ des suites finies d'éléments de X, à valeurs dans X. Le joueur I joue selon σ si $x_0 = \sigma(\emptyset)$, et, pour tout n, $x_{2n} = \sigma(\langle X_0, \ldots, X_{2n-1}\rangle)$. On définit de la même manière une notion de stratégie par le joueur II. Si I joue selon σ, et II selon τ, on note $\sigma * \tau$ le résultat de la partie.

La stratégie σ est dite gagnante pour I s'il peut gagner, II suivant n'importe quelle stratégie, c'est-à-dire si, $\forall \tau$, $\sigma * \tau \in A$.

De même, τ est gagnante pour II si, $\forall \sigma$, $\sigma * \tau \notin A$.

Enfin, on dit que le jeu $G_X(A)$, ou l'ensemble A , est <u>déterminé</u> si l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser au problème de savoir quels sont les jeux déterminés.

GALE et STEWART, qui ont introduit ces jeux, en 1953 [2], ont démontré que dans $\{0 , 1\}^{\underset{\sim}{N}}$, les ensembles ouverts (et les ensembles fermés) sont déterminés. De plus, avec l'axiome du choix, il est possible de construire un jeu sur $\{0 , 1\}$ non déterminé.

Le résultat de GALE et STEWART a été amélioré par WOLFE, en 1954, pour les G_δ et les F_σ , puis par M. DAVIS, en 1964, pour les $G_{\delta\sigma}$ (et les $F_{\sigma\delta}$) .

Pour les boréliens de classe supérieure, le problème s'est avéré beaucoup plus complexe. Une méthode inventée par D. MARTIN pour étudier la détermination d'un sous-ensemble A de $\{0 , 1\}^{\underset{\sim}{N}}$ consiste à ramener l'existence d'une stratégie gagnante dans le jeu $G_{\{0,1\}}(A)$ à celle d'une stratégie gagnante dans un jeu $G_X(B)$, où X est beaucoup plus compliqué, mais B est un ouvert de l'espace $X^{\underset{\sim}{N}}$ (muni de la topologie produit de la topologie discrète de X).

Cette méthode a permis à J. P. PARIS de démontrer la détermination des jeux $G_{\delta\sigma\delta}$ (avec $X = 2^{\aleph_0}$), en 1972, puis à D. MARTIN de démontrer la détermination des jeux boréliens (en utilisant, pour un borélien de classe $\alpha < \aleph_1$, pour X , l'ensemble $\aleph_\alpha$).

Il peut sembler étonnant que pour démontrer un théorème (sans axiome du choix!) sur les boréliens de $\{0 , 1\}^{\underset{\sim}{N}}$ il faille utiliser des ensembles aussi gros que les $\aleph_\alpha$, $\alpha < \aleph_1$. Et cependant, il est possible de prouver (FRIEDMAN, 1970) que c'est absolument nécessaire. Il s'agit sans doute d'une des premières fois où un tel phénomène apparaît.

Enfin terminons cette revue des principaux résultats en indiquant que la détermination des jeux analytiques de $\{0 , 1\}^{\underset{\sim}{N}}$ est une conséquence de l'existence d'un cardinal mesurable, mais n'est pas démontrable en théorie des ensembles : Il s'agit d'une hypothèse de grand cardinal.

Dans la pratique, le résultat le plus utile est le théorème de Gale et Stewart.

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> X <u>un ensemble, muni de la topologie discrète, et</u> $X^{\underset{\sim}{N}}$ <u>de la topologie produit. Soit</u> A <u>un ouvert de</u> $X^{\underset{\sim}{N}}$. <u>Le jeu</u> $G_X(A)$ <u>est déterminé (par suite, il en est de même si</u> A <u>est fermé</u>).

<u>Démonstration</u>. - Soit A ouvert, et supposons que I n'a pas de stratégie gagnante. Soit T l'ensemble des suites $s \in \operatorname{Seq} X$ de longueur paire telles que I n'a pas de stratégie gagnante à partir de s . D'après l'hypothèse, $\emptyset \in T$. Si $s \in T$, et $x \in X$, il existe x' tel que $s^\frown x^\frown x' \in T$ (le signe $^\frown$ désigne la concaténation des suites). En effet, sinon il existe un $x_0 \in X$ tel que, pour tout

$y \in X$, I a une stratégie gagnante à partir de $s^\frown x_0^\frown y$. Mais alors clairement, I a une stratégie gagnante à partir de s , en commençant par jouer ce x_0 .

Par suite, II peut toujours jouer de sorte que les débuts de longueur paire du jeu soient dans T . Ceci est une stratégie gagnante pour II. En effet, supposons que I gagne cependant. Le jeu f est donc élément de A , qui est ouvert. Par suite, il existe un entier n tel que, à partir de $f_{|2n}$, les deux joueurs savent que I a gagné, en jouant n'importe quoi ensuite. Ceci est une stratégie gagnante pour le joueur I, donc $f_{|2n} \notin T$, ce qui est contradictoire.

Les jeux $G_X(A)$ ne sont pas symétriques (I joue en premier), donc on ne peut pas en déduire directement que tout jeu fermé A est déterminé. On peut cependant le déduire facilement de la détermination des ensembles $(A_x)^c$, où

$$A_x = \{f \in X^{\underset{\sim}{N}} , \quad x^\frown f \in A\} .$$

Il est remarquable que ce théorème, à la démonstration si simple, ait tant d'applications, tout-à-fait non triviales, comme nous allons le voir sur quelques exemples dans le second paragraphe.

2. Quelques exemples d'applications.

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, cet exposé ne se veut pas du tout exhaustif du sujet, mais simplement d'introduction. Aussi nous n'avons pas cherché à donner ici une liste des principaux types de jeux utilisés et des résultats qui en découlent. Une bonne exposition peut en être trouvée dans [3] ou [1]. Nous avons simplement choisi deux exemples de jeux qui nous ont paru typiques des possibilités d'utilisation de cet outil.

EXEMPLE 1. - Le théorème de réduction des coanalytiques (ou "second théorème de séparation").

Cet exemple est historiquement important : c'est le premier exemple, dû à BLACKWELL, d'utilisation du théorème de Gale et Stewart en théorie des ensembles. La présentation que nous en donnons suit celle de MOSCHOVAKIS, et peut être généralisée à des ensembles plus complexes.

Rappelons le théorème de réduction, dû à LUSIN :

Soient A et B deux coanalytiques de $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$; il existe deux coanalytiques A_1 et B_1 qui satisfont

1° $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$,

2° $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_1 \cup B_1 = A \cup B$.

Nous allons utiliser, pour la démonstration, le résultat suivant : Soit A un coanalytique de $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$. Il existe un ouvert O_A de $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}} \times \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$ tel que

$$(x \in A) \Longleftrightarrow (\forall\ y \in \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}} , \quad (x , y) \in O_A)$$

(Ce résultat est évidemment équivalent au fait qu'un analytique de $\underset{\sim}{N}^{N}$ est la projection d'un fermé de $\underset{\sim}{N}^{N} \times \underset{\sim}{N}^{N}$).

Soient alors A et B deux coanalytiques de $\underset{\sim}{N}^{N}$, O_A et O_B les ouverts associés de $\underset{\sim}{N}^{N} \times \underset{\sim}{N}^{N}$. Nous pouvons écrire $O_A = \bigcup_n O_A^n$, $O_B = \bigcup_n O_B^n$, où les O_A^n et les O_B^n sont ouverts et fermés.

Pour chaque $x \in \underset{\sim}{N}^{N}$, nous allons définir un jeu G_x de la manière suivante : I joue n_0 , n_1 , ... , et II n'_0 , n'_1 , ... Soient α et β les résultats de chaque jeu. Nous dirons que II gagne G_x si : ou bien $(x , \beta) \notin O_B$, ou bien $(x , \beta) \in O_B$, $(x , \alpha) \in O_A$, et $\inf\{n(x , \alpha) \in O_A^n\} \leq \inf\{n(x , \beta) \in O_B^n\}$.

Comme α ne dépend que du joueur I, et β du joueur II, le jeu G_x est trivial si $x \notin A \cap B$. Lorsque $x \in A \cap B$, la dernière condition va permettre de choisir l'ensemble, A_1 ou B_1 , dans lequel on va placer x .

1° Pour tout x , le jeu G_x est déterminé.

(i) Si $x \notin B$, il existe β tel que $(x , \beta) \notin O_B$. II a donc une stratégie gagnante évidente : jouer ce β .

(ii) Si $x \in B$,

$$\{(\alpha , \beta) , (x , \alpha) \in O_A \wedge \exists n , ((x , \alpha) \in O_A^n \wedge \forall m < n , (x , \beta) \notin O_B^m)\}$$

est ouvert. Par suite, le jeu G_x est un jeu fermé, donc déterminé.

2° On pose $A_1 = \{x \in A ;$ II a une stratégie gagnante dans le jeu $G_x\}$, et $B_1 = B - A_1$. D'après la définition, $A_1 \subset A$ et $B_1 \subset B$.

D'après (i), si $x \in A \dot{-} B$, $x \in A_1$. Par suite $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, et $A_1 \cup B_1 = A \cup B$. Il reste à prouver que A_1 et B_1 sont coanalytiques. Or

$$x \in A_1 \Longleftrightarrow x \in A \text{ et, } \forall \sigma , \exists \beta ,$$
$$[(x,\sigma(\beta)) \in O_A \wedge \exists n , ((x,\sigma(\beta)) \in O_A^n \wedge \forall m<n , (x,\beta) \notin O_B^m)] .$$

puisque II a une stratégie gagnante si, et seulement si, I n'en a pas (Si σ est une stratégie de I , et β un jeu de II, nous avons noté $\sigma(\beta)$ le jeu correspondant de I). On en déduit facilement que A_1 est coanalytique.

Soit

$$C = \{x ; \exists \sigma , \forall \alpha , \forall n , (x , \sigma(\alpha)) \in O_B^n \longrightarrow \exists m \leq n , (x , \alpha) \in O_A^m)\} .$$

C est clairement analytique. De plus, si $x \in B$, $x \in C$ si, et seulement si, $x \in A_1$, donc $B_1 = B - A_1 = B - C$ est coanalytique.

EXEMPLE 2. - Propriété de Baire des analytiques.

Nous allons montrer sur un exemple comment la détermination des jeux permet d'obtenir des résultats de régularité. Des résultats analogues peuvent être obtenus pour la mesurabilité-Lebesgue, la propriété de l'ensemble parfait, etc.

Pour chacune de ces notions d'approximation, il est possible de trouver un jeu, de telle manière que la détermination du jeu (pour un ensemble A) soit équivalente à la régularité de l'ensemble A . L'idée supplémentaire qui est mise en oeuvre est l'utilisation d'un jeu dérivé (jeu avec témoin) qui fournit le résultat de régularité des analytiques à partir de jeux ouverts (ou fermés).

Le jeu utilisé pour la propriété de Baire est appelé jeu de Banach-Mazur, et noté G^{**} : Soit A un sous-ensemble de $\underset{\sim}{N}^{N}$. Dans $G^{**}(A)$, les deux joueurs jouent des suites finies d'entiers (non vides) : I joue s_0 , s_2 , ... et II joue s_1 , s_3 ,... On note $\alpha = s_0{}^\frown s_1{}^\frown s_2{}^\frown \ldots$. I gagne $G^{**}(A)$ si, par définition, $\alpha \in A$.

Clairement, $G^{**}(A)$ est un jeu du type G sur l'ensemble $X = \mathrm{Seq}\ \underset{\sim}{N} \doteq \{\emptyset\}$. L'ensemble correspondant $\tilde{A} \subset (\mathrm{Seq}\ \underset{\sim}{N} - \{\emptyset\})^{\underset{\sim}{N}}$ est l'ensemble des suites infinies $(s_0 , s_1 , \ldots s_n , \ldots)$ telles que $s_0{}^\frown s_1{}^\frown s_2{}^\frown \ldots \in A$.

X est dénombrable, donc le jeu $G^{**}(A)$ peut être vu comme un jeu sur $\underset{\sim}{N}$, mais les ensembles du type $\tilde{A}$, $A \subset \underset{\sim}{N}^{N}$ sont plus réguliers que les ensembles A , ce qui explique que la détermination des jeux $G_X(\tilde{A}) = G^{**}(A)$ soit plus simple que la détermination des jeux du type G , comme nous allons le voir maintenant.

PROPOSITION 2. - <u>Si le joueur II a une stratégie gagnante pour</u> $G^{**}(A)$, <u>l'ensemble</u> A <u>est maigre dans</u> $\underset{\sim}{N}^{N}$.

<u>Démonstration</u>. - Soient τ une stratégie gagnante pour II, et $\alpha \in A$. Une suite $t = (s_0 , s_1 , \ldots , s_{2n+1})$ est α-bonne si II a suivi sa stratégie τ , et si $s_0{}^\frown s_1{}^\frown s_2{}^\frown \ldots{}^\frown s_{2n+1}$ est une section commençante de α .

Clairement, si toute suite α-bonne peut être étendue en une suite α-bonne, il existe une suite infinie $(s_0 , s_1 , \ldots)$ telle que II a joué selon τ et $\alpha = s_0{}^\frown s_1{}^\frown \ldots$ Mais comme $\alpha \in A$, ceci contredit le fait que τ est gagnante. Par suite, il existe une suite $t = (s_0 , \ldots , s_{2n+1})$ α-bonne et non étendable. Par suite,

$$\alpha \in F_t = \{\beta ;\ s_0{}^\frown \ldots{}^\frown s_{2n+1} \prec \beta , \text{ et}$$
$$(*) \quad \forall s \in \mathrm{Seq}\ \underset{\sim}{N} - \{\emptyset\} , s_0{}^\frown \ldots{}^\frown s_{2n+1}{}^\frown s^\frown \tau(s_0 ,\ldots, s_{2n+1} , s) \not\prec \beta\} .$$

F_t est un fermé, rare d'après (*). Définissant F_t pour chaque suite

$$t \in \mathrm{Seq}(\mathrm{Seq}\ \underset{\sim}{N} - \{\emptyset\}) ,$$

on en déduit que $A \subset \bigcup_t F_t$, donc est maigre.

COROLLAIRE 3. - <u>Si le joueur I a une stratégie gagnante dans</u> $G^{**}(A)$, <u>alors</u> A <u>est co-maigre sur un ouvert non vide de</u> $\underset{\sim}{N}^{N}$.

<u>Démonstration</u>. - Soit σ une stratégie gagnante pour le joueur I, et $s_0 = \sigma(\emptyset)$. Soit $O_{s_0} = \{\alpha \in \underset{\sim}{N}^{N} ,\ s_0 \prec \alpha\}$: O_{s_0} est ouvert et fermé. Soit

$$B = \{\alpha \in \underset{\sim}{N}^{N} ,\ s_0{}^\frown\alpha \in O_{s_0} \doteq A\} .$$

Clairement, le joueur II a une stratégie gagnante dans le jeu $G^{**}(B)$, donc, d'après la proposition 2, $O_{s_0} \dot{-} A$ est maigre.

Pour des classes suffisamment régulières d'ensembles, on peut déduire de la proposition 2 et du corollaire 3 le résultat sur la propriété de Baire, en utilisant un argument classique. Par exemple de l'assertion : "Tout jeu analytique est déterminé", on peut déduire que "Tout ensemble analytique a la propriété de Baire".

En fait l'assertion "Tout jeu analytique est déterminé" est un axiome de grand cardinal, dont on sait bien qu'il est inutile pour démontrer la propriété de Baire des analytiques. Nous n'avons pas encore utilisé le fait que les ensembles du type $\tilde{A}$ sont très réguliers, et c'est ce fait que va permettre d'utiliser des jeux fermés (jeux avec témoins) de la manière suivante :

Soit A un ensemble analytique de $\underset{\sim}{N}^{N}$. A est la projection d'un fermé B de $\underset{\sim}{N}^{N} \times \underset{\sim}{N}^{N}$. On joue alors le jeu $G(B)$ suivant :

I joue $n_0 \in \underset{\sim}{N}$, $s_0 \in \mathrm{Seq}\, \underset{\sim}{N} - \{\emptyset\}$; II joue s_1 ; I : n_1 et s_2 ; II : s_3 , etc. On note $\alpha = s_0{}^\frown s_1{}^\frown \ldots{}^\frown$, et $\beta = (n_0 , n_1 , \ldots)$. Par définition, I gagne $G(B)$ si $(\alpha , \beta) \in B$ (Le jeu $G(B)$ est analogue au jeu $G^{**}(A)$, sauf qu'on impose au joueur I qu'il construise un "témoin" β qui assure que $\alpha \in A$).

Il est facile de vérifier que le jeu $G(B)$ est un jeu fermé, donc déterminé. Par suite, le fait que tout analytique a la propriété de Baire résulte de la proposition suivante.

PROPOSITION 4.

(i) <u>Si le joueur I a une stratégie gagnante dans</u> $G(B)$, A <u>est co-maigre dans un ouvert non vide</u>.

(ii) <u>Si le joueur II a une stratégie gagnante dans</u> $G(B)$, <u>l'ensemble</u> A <u>est maigre</u>.

<u>Démonstration</u>. — Elle est très analogue à la démonstration de la proposition 2.

(i) Tout d'abord si I a une stratégie gagnante dans $G(B)$, il en a clairement une dans $G^{**}(A)$, qui est plus simple pour lui. D'après le corollaire 3, on en déduit que A est co-maigre sur un ouvert non vide.

(ii) Supposons que τ est une stratégie gagnante pour II dans $G(B)$, et à chaque suite $t = (s_0 , n_0 , s_1 , s_2 , n_1 , \ldots , s_{2k} , n_k , s_{2k+1} , n_{k+1})$, où II joue selon τ , associons le fermé rare

$$F_t = \{\gamma \in \underset{\sim}{N}^{N} ,\ s_0{}^\frown s_1{}^\frown \ldots{}^\frown s_{2k+1} < \gamma \text{ et, } \forall\, s \neq \emptyset ,\ s_0{}^\frown \ldots{}^\frown s_{2k+1}{}^\frown s^\frown \sigma(t,s) \not< \gamma\} .$$

Par un argument analogue à celui de la démonstration de la proposition 2, on peut montrer que si $\alpha \in A$, alors il existe une suite t telle que $\alpha \in F_t$. Puisque l'ensemble des suites t est dénombrable, A est donc maigre.

A partir de cette proposition, il est facile de démontrer que tout analytique a la propriété de Baire : Si A est analytique, on considère l'ensemble des ouverts O tels que $O \doteq A$ est maigre. Cet ensemble a un plus grand élément O_0 . Il reste à voir que $A - O_0$ est maigre : $A - O_0$ est analytique, donc on peut appliquer la proposition 4 à cet ensemble, et, d'après la définition de O_0 , on est nécessairement dans le cas (ii).

Dans un exposé ultérieur, nous appliquerons une technique analogue à la précédente pour l'étude de la régularité des ensembles analytiques vis-à-vis d'une autre notion de petitesse (cf. [4]), et leur application aux filtres sur $\underset{\sim}{N}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DAVIS (M.). - Infinite games of perfect information, "Advances in game theory", p. 85-101. - Princeton, Princeton University Press, 1964 (Annals of Mathematics Studies, 52).

[2] GALLE (D.) and STEWART (F. M.). - Infinite games with perfect information, "Contributions to the theory of games", p. 245-266. - Princeton, Princeton University Press, 1953 (Annals of Mathematics Studies, 28).

[3] KECHRIS (A.). - Descriptive set theory, Cours manuscrit (non publié).

[4] LOUVEAU (A.). - Ensembles K_I-bornés et filtres sur ω , "Colloque international de Logique [1975. Clermont-Ferrand] (à paraître).

(Texte reçu le 27 février 1976)

Alain LOUVEAU
92 rue du Dessous des Berges
75013 PARIS