MARC ROGALSKI

Espaces de Banach séparables contenant $l^1(N)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. nº 5, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, n° 5, 8 p.

20 novembre 1975

ESPACES DE BANACH SÉPARABLES CONTENANT $\ell^1(\underset{\sim}{N})$

par Marc ROGALSKI

(d'après ODELL, PELCZYNSKI et ROSENTHAL)

Cet exposé a pour but de montrer le théorème suivant, qui rassemble des travaux dus surtout à ODELL, PELCZYNSKI et ROSENTHAL, entre 1968 et 1974 ([6], [7], [8], [9]) :

THÉORÈME. - Soit B un espace de Banach séparable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $B \supset \ell^1(\underset{\sim}{N})$;

(2) $\operatorname{Card}(B'') > \operatorname{Card}(B)$;

(3) il existe un élément de B'' qui n'est limite faible pour $\sigma(B'', B')$ d'aucune suite d'éléments de B ;

(4) il existe une suite bornée de B qui ne possède aucune sous-suite faiblement de Cauchy pour $\sigma(B, B')$;

(5) il existe une suite bornée de B'' qui ne possède aucune sous-suite faiblement convergente pour $\sigma(B'', B')$;

(6) $L^1([0, 1]) \subset B'$;

(7) il existe un ensemble Γ non dénombrable tel que $\ell^1(\Gamma) \subset B'$;

(8) $C([0, 1])$ est l'image linéaire continue de B ;

(9) il existe un ensemble convexe borné $\sigma(B', B)$ fermé de B' qui n'est pas l'enveloppe convexe fermée en norme de ses points extrémaux ;

(10) il existe sur la boule unité de B' une fonction affine bornée qui ne vérifie pas le calcul barycentrique.

Dans cet énoncé, $V \subset B$ signifie que l'espace de Banach V est isomorphe à un sous-espace fermé de l'espace de Banach B. De même, $V \twoheadrightarrow B$ signifiera que B est image linéaire continue de V. Enfin, f vérifie le calcul barycentrique si $\int f \, d\mu = f(b_\mu)$, où b_μ est le barycentre de la mesure de probabilité μ.

Remarque.

(a) Les implications suivantes sont vraies sans l'hypothèse de séparabilité : (1) $\Longleftrightarrow$ (4) $\Longleftrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (7) et (9), (7) $\Longrightarrow$ (1) si $\operatorname{Card}(\Gamma) > \dim(B)$.

(b) Nous nous limiterons au cas réel, mais les résultats sont vrais dans le cas complexe.

Donnons deux corollaires immédiats de ce théorème (cf. [5]).

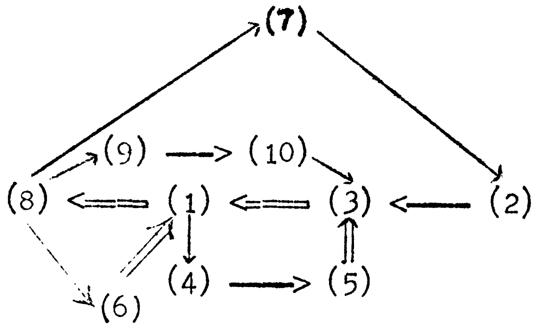
COROLLAIRE 1. - Si B est un espace de Banach (éventuellement non séparable) séquentiellement faiblement complet, alors ou bien B est réflexif, ou bien (exclusivement) $B \supset \ell^1(\underset{\sim}{N})$.

COROLLAIRE 2. - Si B vérifie la propriété de Schur (toute suite faiblement convergente l'est fortement), tout sous-espace fermé de dimension infinie de B contient $\ell^1(\underset{\sim}{N})$.

Plan de la démonstration.

$\longrightarrow$: facile

$\Longrightarrow$: difficile



Nous noterons $\mathcal{B}_1(B)$ l'ensemble des éléments de B'' limites pour $\sigma(B'' , B')$ d'une suite d'éléments de B , et K la boule unité de B' . Remarquons que si $\ell \in \mathcal{B}_1(B)$, ℓ est limite pour $\sigma(B'' , B')$ d'une suite bornée d'éléments de B .

1. Implications faciles.

(4) $\Longrightarrow$ (5) est évident

(2) $\Longrightarrow$ (3) , car $\operatorname{Card} \mathcal{B}_1(B) = c$ et $\operatorname{Card}(B) = c$.

(7) $\Longrightarrow$ (2) , car $B'' \twoheadrightarrow \ell^\infty(\Gamma)$, et $\operatorname{Card} \ell^\infty(\Gamma) \geq 2^c > c = \operatorname{Card}(B)$.

(10) $\Longrightarrow$ (3) , car si f_0 vérifie l'hypothèse de (10), $f_0 = \ell_{|K} + a$, où $\ell \in B''$, et $\ell \notin \mathcal{B}_1(B)$, sinon, par le théorème de Lebesgue, $\ell_{|K}$, et donc f_0 , vérifierait le calcul barycentrique.

(8) $\Longrightarrow$ $\{M([0 , 1]) \subset B'$, avec $\sigma(M , c([0 , 1])) = \sigma(M , B)\}$, car si $u : B \twoheadrightarrow c$, M est isomorphe à $[u^{-1}(0)]^0$.

$\{M([0 , 1]) \subset B'\}$ $\Longrightarrow$ (6) et (7), car $L^1([0 , 1]) \subset M([0 , 1])$ et

$$\ell^1([0 , 1]) \subset M([0 , 1]) .$$

$\{M([0 , 1]) \subset B'$ et $\sigma(M , c) = \sigma(M , B)\}$ $\Longrightarrow$ (9), car la boule unité M_1 de $M([0 , 1])$ est $\sigma(B' , B)$ fermée, mais l'enveloppe convexe fermée en norme de l'ensemble des $\pm\, \delta_x$ pour x dans $[0 , 1]$ n'est pas tout M_1 .

(9) $\Longrightarrow$ (10), car soit H un convexe borné $\sigma(B' , B)$ fermé dans B' , avec un

point $x \in H$ qui ne soit pas dans l'enveloppe convexe fermée en norme Y de l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de H. Si un élément ℓ de B'' sépare x de Y, $\ell_{|K}$ ne peut vérifier le calcul barycentrique sur K, sinon il en serait de même sur H pour $\ell_{|H}$, et comme x est barycentre d'une mesure de probabilité portée par $\mathcal{E}$, on aurait une contradiction (H est métrisable car B séparable, on applique le théorème de CHOQUET (cf. [1]).

(1) ==> (4), car la suite $(\delta_n)_n$, base canonique de $\ell^1(\underset{\sim}{N})$, ne peut manifestement contenir aucune sous-suite de Cauchy faible.

2. Le critère de compacité dans les fonctions de Baire et l'implication (5) ==> (3) (ROSENTHAL).

Rappelons le résultat de ROSENTHAL, démontré par Michèle CAPON dans l'exposé précédent.

PROPOSITION 1. - Soit K un espace polonais, et A un sous-ensemble de l'espace $B_1(K)$ des fonctions de première classe de Baire sur K. Alors A est relativement compact dans $B_1(K)$ pour la convergence simple sur K si, et seulement si, de toute suite de A on peut extraire une sous-suite convergente dans $B_1(K)$ pour la convergence simple sur K. (cf. [3], [9].)

(5) ==> (3) Supposons que (3) soit faux, et que $B'' = \mathcal{B}_1(B)$. Soit A la boule unité de B''. Le sous-ensemble $A_{|K}$ de $B_1(K)$ est compact pour la convergence simple. Donc de toute suite de $A_{|K}$ on peut extraire une sous-suite simplement convergente vers un élément de $A_{|K}$ par la proposition 1, et ceci contredit (5).

3. Le critère de "discontinuité totale" et l'implication (3) ==> (1) (ODELL et ROSENTHAL).

LEMME 1. - Si B est un espace de Banach séparable, et K la boule unité de B', on a l'égalité

$$B_1(K) \cap B''_{|K} = \mathcal{B}_1(B)_{|K} .$$

L'inclusion $B_1(K) \cap B''_{|K} \supseteq \mathcal{B}_1(B)_{|K}$ est évidente. Inversement, si

$$\ell \in B_1(K) \cap B''_{|K} ,$$

ℓ vérifie le calcul barycentrique par un théorème de CHOQUET, et est alors de première classe affine par un théorème de MOKOBODZKI, c'est à-dire appartient à $\mathcal{B}_1(B)_{|K}$ (cf. [1], [4]).

Une démonstration directe de ce résultat est donnée par ODELL et ROSENTHAL (cf. [6]), ce qui fournit une démonstration élémentaire du résultat de CHOQUET dans le cas métrisable, compte tenu d'un résultat classique de BAIRE que nous utiliserons plus loin.

PROPOSITION 2. ("critère de discontinuité totale"). - Soit M un espace compact ou métrique complet, et f une fonction numérique sur M, n'ayant aucun point de continuité. Alors il existe un fermé non vide L, $r \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout ouvert U de L, il existe $y, z \in U$ vérifiant

$$f(y) > r + \delta \quad \text{et} \quad f(z) < r .$$

1er pas. - Soit A_n l'ensemble des x de M tels que pour tout voisinage U de x, il existe y et z dans U vérifiant $f(y) - f(z) > \frac{1}{n}$. L'ensemble A_n est fermé, et on a $M = \bigcup_n A_n$. Donc il existe n_0 tel que $\overset{0}{A}_{n_0} \neq \emptyset$. Soit alors $M_0 = \overline{U}_0$, où $U_0 = \overset{0}{A}_{n_0}$. Pour tout ouvert $U \neq \emptyset$ de M_0, $U \cap U_0$ est voisinage d'un point x au moins de $U \cap U_0$, donc il existe $y, z \in U$ tels que $f(y) - f(z) > \frac{1}{n}$.

2e pas. - Soit $(r_n)_n$ une énumération de $\mathbb{Q}$, et soit $\delta = 1/3n_0$. Considérons l'ensemble B_n des points x de M_0 tels que, pour tout voisinage U de x, il existe y et z dans $U \cap M_0$ vérifiant $f(y) > r_n + \delta$ et $f(z) < r_n$. L'ensemble B_n est fermé, et si on montre que $M_0 = \bigcup_n B_n$, il existera n_1 tel que $V = \overset{0}{B}_{n_1} \neq \emptyset$. Alors l'ensemble $L = \overline{V}$, et les nombres $r = r_{n_1}$ et $\delta = 1/3n_0$ conviennent.

Montrons donc que l'on a $M_0 = \bigcup_n B_n$. Sinon, soit x dans $M_0 \setminus \bigcup_n B_n$; on peut trouver p et q tels que $r_q + \delta < f(x) < r_p$ et $r_p - r_q < 2\delta$. Alors, puisque pour tout n il existe un voisinage U_n de x tel que, ou bien $f(U_n) \geqslant r_n$, ou bien $f(U_n) \leqslant r_n + \delta$, on a nécessairement $f(U_q) \geqslant r_q$ et $f(U_p) \leqslant r_p + \delta$. Soit $U = U_p \cap U_q$; alors on a $r_q \leqslant f(U) \leqslant r_p + \delta$, donc pour tout y, z de U on a $f(y) - f(z) \leqslant r_p + \delta - r_q < 3\delta = 1/n_0$, ce qui contredit la définition de M_0.

LEMME 2. - Soient M, f, L, r et δ connus à la proposition 2, et soit G un ensemble uniformément borné de fonctions continues sur L, tel que f soit adhérent à G pour la convergence simple. Alors il existe une suite $(g_n)_n$ dans G telle que, si l'on définit les ensembles A_n et B_n par

$$A_n = \{x \in L \; ; \; g_n(x) > r + \delta\} \quad \text{et} \quad B_n = \{x \in L \; ; \; g_n(x) < r\} ,$$

la suite $(A_n, B_n)_n$ soit "indépendante" au sens suivant :

$A_n \cap B_n = \emptyset$, et pour tous ensembles finis disjoints F_1, F_2 de $\mathbb{N}$, on a $(\bigcap_{n \in F_1} A_n) \cap (\bigcap_{n \in F_2} B_n) \neq \emptyset$.

1er pas. - Soient y_1, y_2 dans L, tels que $f(y_1) > r + \delta$, et $f(y_2) < r$. Il existe g_1 dans G telle que $g_1(y_1) > r + \delta$ et $g_1(y_2) < r$, ce qui fournit A_1 et B_1 ouverts non vides, d'intersection vide.

Récurrence. - Changeons les notations et posons $\varepsilon_i A_i = A_i$ si $\varepsilon_i = 1$, et $\varepsilon_i A_i = B_i$ si $\varepsilon_i = -1$ (avec $\varepsilon_i = \pm 1$), et, supposant $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ choisis, posons $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$. L'hypothèse de récurrence est que, pour tout ε , $U_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i A_i$ est non vide et <u>ouvert</u> ; donc il existe des points y_1^ε et y_2^ε de U_ε tels que $f(y_1^\varepsilon) > r + \delta$ et $f(y_2^\varepsilon) < r$. On choisit alors g_n dans G telle que l'on ait $g_n(y_2^\varepsilon) < r$ et $g_n(y_1^\varepsilon) > r + \delta$ pour les 2^n couples $(y_1^\varepsilon , y_2^\varepsilon)$ choisis ; les ensembles A_n et B_n associés à g_n vérifient les relations $A_n \cap B_n = \emptyset$ et $\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i A_i \neq \emptyset$.

LEMME 3. - <u>Soient</u> M , f , L , r , δ , G , $(g_n)_n$ <u>et</u> $(A_n , B_n)_n$ <u>comme au lemme 3. Alors pour toute suite</u> $(c_n)_n$ <u>nulle à partir d'un certain rang, telle que</u> $\sum_n |c_n| = 1$, <u>on a l'inégalité</u>

$$\sup_{u\in L} |\sum_n c_n g_n(u)| \geq \delta/2 .$$

Soit P l'ensemble des n tels que $c_n > 0$, et N l'ensemble des n pour lesquels $c_n < 0$, et soient x dans l'ensemble $(\bigcap_{n\in P} A_n) \cap (\bigcap_{n\in N} B_n)$ et y dans l'ensemble $(\bigcap_{n\in N} A_n) \cap (\bigcap_{n\in P} B_n)$.

Si n est dans P , $g_n(x) > r + \delta$ et $c_n g_n(x) > |c_n|(r + \delta)$; si n est dans N , $g_n(x) < r$ et $c_n g_n(x) > c_n r = - |c_n| r$. Donc on a l'inégalité

$$\sum_n c_n g_n(x) > \sum_{n\in P} |c_n|(r + \delta) - \sum_{n\in N} |c_n| r .$$

On voit de même que l'on a

$$- \sum_n c_n g_n(y) > \sum_{n\in N} |c_n|(r + \delta) - \sum_{n\in P} |c_n| r .$$

Si $g = \sum_n c_n g_n$, on a $g(x) - g(y) > \delta$ pour x , y dans L , donc

$$\mathrm{Sup}_{u\in L} |g(u)| \geq \delta/2 .$$

<u>Démonstration de</u> (3) $\Longrightarrow$ (1). - Soit ℓ un élément de B'' qui n'appartient pas à $\mathcal{B}_1(B)$, et posons $g = \ell_{|K}$. D'après le lemme 1, g n'appartient pas à $B_1(K)$. Or <u>un résultat classique de BAIRE</u> affirme que g appartient à $B_1(K)$ si, et seulement si, pour tout fermé non vide M de K , $g_{|M}$ a un point de continuité (cf. [2]). Donc il existe un compact non vide M de K tel que $f = g_{|M}$ n'ait aucun point de continuité. Soient alors L , r , δ donnés par la proposition 2. On peut supposer que $\|\ell\| \leq 1$, donc ℓ est adhérent à la boule unité de B pour $\sigma(B'' , B')$, donc f est adhérent à l'ensemble G des restrictions des éléments de la boule unité de B à K , pour la convergence simple sur K . Par lemme 2, il existe une suite $(x_n)_n$ dans la boule unité de B , telle que $(g_n)_n = (x_{n|L})_n$ vérifie le lemme 3.

Alors l'espace fermé V engendré par les (x_n) est le sous-espace cherché de B , isomorphe à $\ell^1(\underset{\sim}{N})$. Soit en effet $T : \ell^1(\underset{\sim}{N}) \longrightarrow B$ l'application

$$c = (c_n)_n \longmapsto Tc = \sum_n c_n x_n .$$

On a les inégalités suivantes d'après le lemme 3 :

$$\|c\|_{\ell^1} = \sum_n |c_n| \geq \|Tc\|_B \geq \mathrm{Sup}_{u\in L} |(Tc)(u)| = \lim_{K\to\infty} \mathrm{Sup}_{u\in L} |\sum_{n\leq K} c_n g_n|$$

$$\geq \lim_{K\to\infty} \delta/2 \sum_{n\leq K} |c_n| = (\delta/2)\|c\|_{\ell^1} ,$$

donc on a $\|c\| \geq \|Tc\| \geq (\delta/2)\|c\|$. Par suite $\ell^1(\underset{\sim}{N})$ est isomorphe par T à $V = T\ell^1(\underset{\sim}{N})$, sous-espace fermé de B engendré par les (x_n) , ce qui démontre (3) ==> (1).

4. L'espace $C([0\,,\,1])$ comme sous-espace de Banach séparables et l'implication (1) ==> (8) (PELCZYNSKI).

LEMME 4. - Tout espace de Banach séparable est l'image linéaire continue de $\ell^1(\underset{\sim}{N})$.

Soit $(x_n)_n$ une suite dense dans la boule unité de E , et $T : \ell^1(\underset{\sim}{N}) \to E$ définie par $T((c_n)_n) = \sum_n c_n x_n$; il suffit de montrer que T est surjective. Soit x dans la boule unité de E ; il existe x_{n_0} tel que $\|x - x_{n_0}\| \leq \frac{1}{2}$; si $y_0 = x - x_{n_0}$, il existe $n_1 > n_0$ tel que $\|y_0 - (1/2)x_{n_1}\| \leq 1/4$; si $y_1 = y_0 - (1/2)x_{n_1}$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $\|y_1 - (1/2^2)x_{n_2}\| \leq 1/2^3$, etc. Alors $x = x_{n_0} + (x_1/2) + \ldots + (x_{n_p}/2^p) + y_p$, et $(c_n)_n = (0\ldots010\ldots0\frac{1}{2}0\ldots0\frac{1}{2^2}0\ldots)$ a pour image le point x .

LEMME 5. - Soient $Y \subset B$ deux espaces de Banach, et $T : Y \to \ell^\infty(\underset{\sim}{N})$ linéaire continue. Alors il existe $\tilde{T} : B \to \ell^\infty(\underset{\sim}{N})$ qui prolonge T (et a même norme).

Soit $p_n : \ell^\infty(\underset{\sim}{N}) \to \underset{\sim}{R}$, l'application : $(x_m)_m \longmapsto x_n$, et

$$\ell_n = p_n \circ T : Y \to \underset{\sim}{R} .$$

Alors $\|\ell_n\| \leq \|T\|$; soit $\tilde{\ell}_n$ une extension de ℓ_n à B , de même norme que ℓ_n . On pose, pour $h \in B$, $\tilde{T}(h) = (\tilde{\ell}_n(h))_n$, et $\tilde{T} : B \to \ell^\infty(\underset{\sim}{N})$ est le prolongement cherché.

PROPOSITION 3 (PELCZYNSKI). - Si un espace de Banach séparable V contient un sous-espace C_1 isomorphe à $C([0\,,\,1])$, il existe un sous-espace C_2 de C_1 , facteur direct dans V , et isomorphe à $C([0\,,\,1])$.

Cette proposition résultera de la proposition 3 bis ci-dessous, version isométrique de celle-ci. Montrons déjà comment la proposition 3 permet de démontrer l'implication (1) ==> (8).

Démonstration de (1) ==> (8). - D'après le lemme 4, il existe

$$u : \ell^1(\underset{\sim}{N}) \twoheadrightarrow C([0\,,\,1]) .$$

Or l'espace $C([0\,,\,1])$ est isométrique à un sous-espace C_1 de $\ell^\infty(\underset{\sim}{N})$ (identifier $\underset{\sim}{N}$ à $\underset{\sim}{Q} \cap [0\,,\,1]$, et prendre l'application restriction), donc u est à valeurs dans $\ell^\infty(\underset{\sim}{N})$.

$$\begin{tikzcd}
\ell^1(\underset{\sim}{N}) \arrow[d] \arrow[dr, "u"] & \subset B \arrow[d, "\tilde{u}"] \arrow[dr, "\tilde{u}"] & \\
C_1 \subset & V \subset \arrow[dl, "p"] & \ell^\infty(\underset{\sim}{N}) \\
C_2 \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme 5, u admet un prolongement $\tilde{u} : B \longrightarrow \ell^\infty(\underset{\sim}{N})$, à valeurs en fait dans $V = \overline{\tilde{u}(B)}$, sous-espace séparable de $\ell^\infty(\underset{\sim}{N})$. Comme u est à valeurs dans V, l'espace C_1 est donc inclus dans V. D'après la proposition 3, il existe $p : V \twoheadrightarrow C_2$, projection continue, avec $C_2 \subset C_1$, C_2 isomorphe à $C([0\,,\,1])$. Alors $T = p \circ \tilde{u} : B \longrightarrow C_2 \simeq C([0\,,\,1])$ est l'application cherchée ; elle est surjective car $\tilde{u}(B) \supset C_1 \supset C_2$, donc $T(B) \supset pC_2 = C_2$.

PROPOSITION 3 bis (PELCZYNSKI). - Si un espace de Banach séparable W contient un sous-espace D_1 isométrique à $C(\Delta)$ (Δ ensemble de Cantor), il existe un sous-espace D_2 de D_1, isométrique à $C(\Delta)$, et image de W par une projection de norme 1.

La proposition 3 bis implique la proposition 3, car $C([0\,,\,1])$ est isomorphe à $C(\Delta)$, et on peut renormer V pour que le plongement de $C(\Delta)$ dans le nouvel espace W ainsi obtenu soit une isométrie.

On démontre la proposition 3 bis d'abord dans le cas $W = C(\Delta)$, par des arguments de "topologie polonaise", après avoir décrit l'isométrie $C(\Delta) \subsetneq W = C(\Delta)$ au moyen d'une application continue surjective $\varphi : Y \longrightarrow \Delta$, Y fermé de Δ. On termine la démonstration du cas général en remarquant que tout espace de Banach séparable W se plonge isométriquement dans $C(\Delta)$ (Pour plus de détails, cf. [7]).

5. Duaux contenant L^1 et l'implication (6) $\Longrightarrow$ (1) (PELCZYNSKI).

La démonstration est analogue, en plus simple, à celle de (3) $\Longrightarrow$ (1). On la trouvera dans [10].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFSEN (E. M.). - Compact convex sets and boundary integrals. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Ergebnisse der Mathematik, 57).

[2] BAIRE (R.). - Sur les fonctions de variables réelles, Annali Mat. pura appl., Serie 3, t. 3, 1899, p. 16-30.

[3] CAPON (M.). - Caractérisation des ensembles relativement compacts de $B_1(X)$ (d'après ROSENTHAL), Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 15e année, 1975/76, n° 4.

[4] CHOQUET (G.). - Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P.-A. Meyer, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6e année, 1961/62, n° 8, 13 p.

[5] FARAHAT (J.). - Espaces de Banach contenant ℓ^1, d'après H. P. Rosenthal, Séminaire Maurey-Schwartz : Espaces L^p, ... 1973/74, n° 26, 6 p. (Ecole Polytechnique).

[6] ODELL (E.) et ROSENTHAL (H. P.). - A double-dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ^1 , Israël J. Math., t. 20, 1975, p. 375-384.

[7] PELCZYNSKI (A.). - On C(S)-subspaces of separable Banach spaces, Stud. Math., t. 31, 1968, p. 513-522.

[8] ROSENTHAL (H. P.). - A characterization of Banach spaces containing ℓ^1 , Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 71, 1974, p. 2411-2413.

[9] ROSENTHAL (H. P.). - Point-wise compact subsets of the first Baire class (à paraître).

[10] PELCZYNSKI (A.). - On Banach spaces containing $L^1(\mu)$, Studia Math., t. 30, 1968, p. 231-246.

Marc ROGALSKI
1 rue Montbrun
75014 PARIS

(Texte reçu le 27 février 1976,
corrigé le 14 juin 1976)