Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

MICHEL TALAGRAND

Il existe sur $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ des moyennes invariantes et non topologiquement invariantes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. nº C9, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A19_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, Communication C9, 2 p.

IL EXISTE SUR $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ DES MOYENNES INVARIANTES ET NON TOPOLOGIQUEMENT INVARIANTES

par Michel TALAGRAND

Une moyenne m sur $\mathbb{R}$ est une forme linéaire positive sur l'espace $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$, qui de plus est telle que $m(1) = 1$. Une moyenne m sera dite <u>invariante</u> si elle vérifie, pour toute f de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et tout réel r :

$$m(f) = m(f_r) ,$$

où f_r est donnée par $f_r(t) = f(t + r)$. Une moyenne m sera dite <u>topologiquement invariante</u>, si, pour toute f de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, toute φ de $L_1(\mathbb{R})$, on a

$$\varphi \geqslant 0 , \|\varphi\| = 1 \Rightarrow m(f) = m(\varphi * f) .$$

Nous allons montrer qu'il existe des moyennes invariantes, non topologiquement invariantes ce qui résoud un problème de [1] (p. 28).

Désignons par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Etant donné un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, réunion finie d'intervalles disjoints, désignons par A' la réunion des intervalles de même milieu que ceux de A et de longueur double.

Soit D la famille des réunions finies A d'intervalles de $\mathbb{R}$, à extrémités rationnelles, et telles que

$$(1) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \lambda([t , t + 1] \cap A') \leq \frac{1}{2} .$$

La famille D' étant dénombrable, il en existe une énumération $D = (A_n)$.

Il existe une suite croissante (a_n) de réels telle que l'intervalle

$$[a_n + 1 , a_{n+1} - 1]$$

contienne un translaté $A_n + t_n$ de A_n.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

- $0 \leq f \leq 1$,
- $f|\bigcup_n (A_n + t_n) \equiv 1$,
- $f|\mathbb{R} \setminus \bigcup_n (A'_n + t_n) \equiv 0$.

Si m est une moyenne topologiquement invariante, on a

$$m(f) = m(x \to \int_x^{x+1} f(t)\, dt) .$$

Mais d'après (1) et la construction de f, on a

$$0 \leq \int_x^{x+1} f(t)\, dt \leq \frac{1}{2}, \quad \forall\, x \in \underset{\sim}{R}$$

d'où nécessairement $0 \leq m(f) \leq \frac{1}{2}$.

D'autre part, si F est une partie finie de $\underset{\sim}{R}$, il est clair qu'il existe un A de D tel que $F \subset A$. Il existe dont un réel t tel que :

$$\forall\, x \in P, \qquad \varphi_t(x) = 1.$$

On déduit alors de [2], théorème 4, qu'il existe une moyenne μ sur $\underset{\sim}{R}$, invariante, et telle que $\mu(f) = 1$.

Ainsi μ est une moyenne invariante qui n'est pas topologiquement invariante.

C. Q. F. D.

Remarque. - Ce résultat s'étend, avec une démonstration analogue, à tout groupe localement compact métrisable, dénombrable à l'infini, non discret (*), et qui possède une moyenne invariante sur l'ensemble des fonctions bornées (non nécessairement continues).

BIBLIOGRAPHIE

[1] GREENLEAF (F. P.). - Invariant means on topological groups. - New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1969 (Van Nostrand mathematical Studies, 16).

[2] MITCHELL (T.). - Constant functions and left unvariant means on semi groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 119, 1965, p. 244-261.

(Texte reçu le 11 juin 1976)

Michel TALAGRAND
Equipe d'analyse, Tour 46
Université P. et M. Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05

(*) et non compact !