Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

MICHEL TALAGRAND

Les fonctions affines sur $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ayant la propriété de Baire faible sont continues

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. nº C7, p. C1-C3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A17_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, Communication n° 7, 3 p.

Janvier 1976

LES FONCTIONS AFFINES SUR $[0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$ AYANT LA PROPRIÉTÉ DE BAIRE FAIBLE SONT CONTINUES

par Michel TALAGRAND

Dans [1], Michèle CAPON a prouvé que toute fonction affine et borélienne (donc bornée) sur $[0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$, est continue. Nous allons prouver le résultat plus précis suivant :

THÉORÈME. - Toute fonction affine sur $[0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$, possédant la propriété de Baire faible est continue.

Notons bien que l'on ne suppose pas a priori la fonction bornée.

Démonstration. - Soit φ une telle fonction, que l'on peut supposer nulle en 0. Prouvons tout d'abord que φ est bornée sur un résiduel. Puisque

$$[0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}} = \bigcup_n \varphi^{-1}([-n\ ,\ n])\ ,$$

il existe un entier n tel que $A = \varphi^{-1}([-n\ ,\ n])$ ne soit pas maigre. Puisque A possède la propriété de Baire, il existe un ouvert V non vide tel que $A \cap V$ soit un résiduel de V. Par définition de la topologie de $[0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$, il existe un entier p, un nombre $\varepsilon > 0$ et des $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ tels que

$$W = \{(x_n)\ ;\ \ i \leqslant p \Longrightarrow |x_i - a_i| \leqslant \varepsilon\} \subset V\ .$$

Puisque $[0\ ,\ 1]^P$ est compact, il existe des éléments $b^1, \ldots, b^m$ de $[0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$, avec $b^i_k = 0$ pour $k > p$, et tels que

$$[0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}} = \bigcup_{i=1}^m (b^i + W) \cap [0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}\ .$$

Il en résulte que

$$B = \bigcup_{i=1}^m (b^i + A) \cap [0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$$

est un résiduel, sur lequel φ est bornée. Soit $|\varphi| \leqslant M$ sur B.

Précisons quelques notations. Pour toute partie I de $\underset{\sim}{N}$, soit θ_I l'homéomorphisme de $[0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$ sur lui-même, défini par $\theta_I(x) = (y_n)_n$ avec

$$y_n = 1 - x_n \quad \text{si } n \in I$$
$$y_n = x_n \quad \text{si } n \notin I\ .$$

Pour toute partie J de $\underset{\sim}{N}$, notons π_J la projection canonique de $[0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$ sur $[0\ ,\ 1]^J$ ($[0\ ,\ 1]^J$ étant identifié à un sous-ensemble de $[0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$). Pour tout x de $[0\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$, on a

$$x + \theta_I(x) = e_I + 2\pi_{I^c}(x) \tag{1}$$

où $e_I = (X_I(n))_n$. Enfin, pour alléger l'écriture, posons $e_i = e_{\{i\}}$.

Montrons maintenant que l'on peut se ramener au cas $\varphi(e_n) = 0$, $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$.

Fixons un ensemble I fini. Prouvons d'abord que $|\varphi|$ est $\leq M+1$ sur un résiduel C de $[0\,,\,1]^{I^c}$. Si $\delta > 0$ est assez petit, on a $|\varphi(\sum_{i\in I} x_i\, e_i)| \leq 1$ dès que $|x_i| < \delta$ pour tout i dans I . L'ensemble

$$D = B \cap [0\,,\,\delta]^I \times [0\,,\,1]^{I^c}$$

est un résiduel de $[0\,,\,\delta]^I \times [0\,,\,1]^{I^c}$, sur lequel $|\varphi| \leq M$. Il suffit alors de choisir $C = \pi_{I^c}(D)$.

L'application π_{I^c} est continue et ouverte, donc $A \cap \theta_I^{-1}(A) \cap \pi_{I^c}^{-1}(C)$ est un résiduel de $[0\,,\,1]^{\underset{\sim}{N}}$. En particulier, il n'est pas vide. Si l'on applique φ à l'égalité (1), où x est choisi dans ce résiduel, il vient $|\varphi(e_I)| \leq 4M + 2$. Puisque $\varphi(e_I) = \sum_{i\in I} \varphi(e_i)$, il en résulte que la série $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(e_i)|$ converge. Ainsi, la fonction h , définie sur $[0\,,\,1]^{\underset{\sim}{N}}$, par

$$h : (x_i)_{i\in \underset{\sim}{N}} \longrightarrow \sum_{i\in \underset{\sim}{N}} x_i\, \varphi(e_i)$$

est affine continue. En remplaçant φ par $\varphi - h$, on peut donc supposer $\varphi(e_i)=0$, $\forall\, i \in \underset{\sim}{N}$.

Prouvons maintenant que $\varphi(e_I) = 0$, pour toute partie I de $\underset{\sim}{N}$. Pour tous entiers n et k , l'ensemble $\varphi^{-1}([(k/2^n)\,,\,((k+1)/2^n)[)$ a la propriété de Baire. Puisque $\varphi(e_i) = 0$ pour tout i , l'appartenance de x à cet ensemble ne dépend pas des premières coordonnées de x . On en déduit, d'après la propriété dite "loi 0 – 1 " que cet ensemble est soit résiduel, soit maigre. Donc pour chaque n existe un seul entier, soit k_n , tel que $\varphi^{-1}([(k_n/2^n)\,,\,((k_n+1)/2^n)[)$ soit résiduel. Et si l'on pose $\alpha = \bigcap_n [(k_n/2^{n+1})\,,\,((k_n+1)/2^n)[$, alors $\varphi^{-1}(\alpha)$ est un résiduel. Montrons que $\alpha = 0$. Ceci va résulter du lemme suivant.

LEMME (CHRISTENSEN, [2], p. 97). – *Pour tout résiduel A de $[0\,,\,1]^{\underset{\sim}{N}}$, il existe $x\,,\,y\,,\,z$ dans A tels que $x = y + z$.*

Démonstration. – Les deux fonctions g et h , définies par

$$g(a\,,\,b) = a.(e_{\underset{\sim}{N}} - b)$$
$$h(a\,,\,b) = a.b$$

sont continues, surjectives et ouvertes de $[0\,,\,1]^{\underset{\sim}{N}} \times [0\,,\,1]^{\underset{\sim}{N}}$ sur $[0\,,\,1]^{\underset{\sim}{N}}$. On en déduit que $g^{-1}(A) \cap h^{-1}(A) \cap (A \times [0\,,\,1]^{\underset{\sim}{N}})$ est un résiduel donc non vide. Si $(a\,,\,b)$ est un point de cet ensemble, il suffit de prendre $x = a$, $y = g(a\,,\,b)$, $z = h(a\,,\,b)$.

C. Q. F. D.

En appliquant ce lemme avec $A = \varphi^{-1}(\alpha)$, on voit que $\alpha = \alpha + \alpha$, d'où $\alpha = 0$.

Fixons la partie I de $\underset{\sim}{N}$. Pour tout x de $B = A \cap \theta_I^{-1}(A)$, on a

$$x + \theta_I(x) = e_I + 2\pi_{I^c}(x) ,$$

d'où $\varphi(\pi_{I^c}(x)) = - \varphi(e_I)/2$. Ainsi $\pi_{I^c}(B)$ est un résiduel de $[0 , 1]^{I^c}$ sur lequel φ est constante. Si I^c est infini, le lemme montre que cette constante est nulle, donc que $\varphi(e_I) = 0$. Si I^c est fini, on a encore $\varphi(e_I) = 0$, puisque $\varphi|_{[0,1]^{I^c}} \equiv 0$.

Prouvons enfin que φ est nulle. Fixons $a \in [0 , 1]^{\underset{\sim}{N}}$. Soit ψ l'application de $[0 , 1]^{\underset{\sim}{N}}$ dans lui-même, donné par $\psi(x) = (y_n)_n$, où

$$\begin{aligned} y_n &= a_n + x_n & &\text{si } a_n + x_n \leq 1 \\ &= a_n + x_n - 1 & &\text{si } a_n + x_n > 1 . \end{aligned}$$

La restriction de ψ au G_δ dense $\{x \in [0 , 1]^{\underset{\sim}{N}} ; \ \forall n \quad x_n \notin \{0,1-a_n,1\}\}$ est un homéomorphisme de cet ensemble sur le G_δ dense

$$\{x \in [0 , 1]^{\underset{\sim}{N}} ; \ \forall n \quad x_n \notin \{0 , a_n , 1\}\} .$$

Il en résulte que l'image réciproque par ψ de tout résiduel est encore un résiduel.

Soit x un point de l'ensemble $A \cap \psi^{-1}(A)$ qui est non vide, étant un résiduel. Soit I l'ensemble des n tels que $a_n + x_n > 1$. On a $\psi(x) = a + x - e_I$ par définition de ψ . Et puisque $\varphi(a) = \varphi(\psi(a)) = \varphi(e_I) = 0$, on a $\varphi(a) = 0$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CAPON (Michèle). - Etude des fonctions affines boréliennes sur la boule unité de $\ell^\infty(\underset{\sim}{N})$, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 14e année, 1974/75, communication n° 1, 4 p.

[2] CHRISTENSEN (J. R. C.). - Topology and Borel structure. - Amsterdam, North-Holland publishing Company ; New York, American Elsevier publishing Company, 1974 (North-Holland Mathematics Studies, 10 ; Notas de Matematica, 51).

(Texte reçu le 30 janvier 1976)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05