Gabriel Mokobodzki

Représentation des fonctions affines semi-continues inférieurement

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. nº C1, p. C1-C4
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A11_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, Communication n° 1, 4 p.
Septembre 1975

REPRÉSENTATION DES FONCTIONS AFFINES SEMI-CONTINUES INFÉRIEUREMENT

par Gabriel MOKOBODZKI

Introduction.

Dans de nombreux problèmes d'analyse on rencontre la situation suivante : on a un espace compact X métrisable, un ensemble convexe K de mesures $\geqslant 0$ sur X, héréditaire pour l'ordre défini par $\mathfrak{M}^+(X)$, une fonction affine f (numérique) sur K, nulle en 0, et le problème se pose de savoir s'il existe une fonction v borélienne, ou mesurable, sur X telle que, pour toute $\mu \in K$, v soit μ-intégrable et que l'on ait $\int v \, d\mu = f(\mu)$.

Si T est une mesure de probabilité sur K de barycentre $\mu \in K$, on a

$$\int \left(\int v \, d\alpha\right) dT(\alpha) = \int v \, d\mu .$$

Il est donc nécessaire de supposer que f est mesurable, et que $\int f \, dT = f(\mu)$.

Dans un travail antérieur, réalisé en collaboration avec M. AJLANI [1], nous avons résolu le problème pour K convexe compact, et f continue.

La solution v est alors borélienne.

Dans [4], j'ai montré que si K est analytique, fortement convexe (c'est-à-dire fermé pour l'opération de barycentre), et si f est borélienne et vérifie le calcul barycentrique, il existe une solution v qui est universellement mesurable. On emploie pour cela la technique des limites médiales.

Dans [5], on considère des convexes compacts particuliers associés à des capacités alternées d'ordre infini et des fonctions affines de 1re classe de Baire. On peut alors construire des solutions v qui sont boréliennes.

Dans ce travail, nous résoudrons en particulier le problème posé pour K convexe compact héréditaire quelconque, et f semi-continue inférieurement (s. c. i.) de 1re classe de Baire.

La solution construite sera alors borélienne. La méthode employée s'inspire largement de [1].

1. Préliminaires.

Le mot fonction désigne habituellement une fonction numérique.

Soient E un espace vectoriel localement convexe séparé, E' son dual, C un cône convexe fermé saillant de E dont le dual $C^0 = \{f \in E' \; ; \; f \geqslant 0 \text{ sur } C\}$ engendre E', c'est-à-dire $E' = C^0 - C^0$. On suppose de plus que C est faiblement complet.

On note $\leqslant$ la relation d'ordre définie par C ; une partie A de C est héréditaire si $(x \in A)$ et $(0 \leqslant y \leqslant x)$ entraînent que y appartient aussi à A. Pour $x \in C$, on note $[0\ ,\ x] = \{y \in C\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant C\}$.

On se donne une partie convexe compacte héréditaire $K \subset C$.

La condition $E' = C^0 - C^0$ entraîne en particulier que $[0\ ,\ x]$ est compact dans E. Il en résulte facilement le lemme suivant.

LEMME 1. - *Soit* f *une fonction semi-continue supérieurement sur* C. *La fonction* $\overline{f} : x \longrightarrow \sup \{f(y)\ ;\ y \in [0\ ,\ x]\}$ *est semi-continue supérieurement sur* C.

Si, de plus, f *est affine, alors* $\overline{f}$ *est concave.*

THÉORÈME 2. - *Soit* $f \in E'$ *telle que* $\sup_K f \leqslant M$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $g \in C^0$ *tel que* $g \geqslant f$ *sur* C *et* $\sup_K g \leqslant M + \varepsilon$.

Démonstration. - Pour $g \in C^0$, les conditions $(g \geqslant f)$ et $(g \geqslant \overline{f})$ sont équivalentes. Il revient au même de dire que $\overline{f}$ est s. c. s., ou que son sous-graphe est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.

$F = \{(x\ ,\ \lambda) \in E \times \mathbb{R}\ ;\ \lambda \leqslant \overline{f}(x)\}$ est un cône convexe fermé.

Considérons dans $E \times \mathbb{R}$ l'enveloppe convexe $\tilde{K}$ de 0 et de $K \times \{M\}$. C'est un convexe compact qui ne rencontre pas le sous-graphe strict de f sur C, ou encore, les ensembles F et $\tilde{K}_\varepsilon = \tilde{K} + \{0\ ,\ \varepsilon\}$ sont disjoints pour tout $\varepsilon > 0$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe alors

$$h = (g\ ,\ \alpha) \in E' \times \mathbb{R} = (E \times \mathbb{R})'$$

tel que h soit positif sur F et inférieur à -1 sur $\tilde{K}_\varepsilon$.

On obtient successivement :

$-1 > h(0\ ,\ \varepsilon) = -\alpha\varepsilon$, ce qui donne $\alpha > \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{1}{\alpha} < \varepsilon$.

Pour tout $x \in F$,

$$h(x\ ,\ \overline{f}(x)) = g(x) - \alpha\overline{f}(x) \geqslant 0\ ,$$

et pour tout $x \in K$,

$$h(x\ ,\ M + \varepsilon) = g(x) - \alpha(M + \varepsilon) \leqslant -1\ .$$

Posons $g' = \alpha^{-1} g$; on aura alors

$$g \geqslant f \quad \text{sur } C \quad \text{et} \quad g \leqslant M + \varepsilon - \frac{1}{\alpha} \leqslant M + \varepsilon \quad \text{sur } K\ .$$

PROPOSITION 3. - *Soit* f *une fonction affine semi-continue inférieurement sur* K, *nulle en* 0, *qui soit de 1re classe de Baire. Il existe alors une suite* $(k_n) \subset C^0$ *telle que, pour* $w = \sum k_n$, $\sup_K w \leqslant 1$, *et une fonction affine semi-continue inférieurement bornée* h, *définie sur l'ensemble*

$$K(w) = \{w < 1\} \quad \textit{telle que} \quad h|K = f\ .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $A(K)$ l'ensemble des fonctions affines continues sur K. On sait que f est l'enveloppe supérieure de l'ensemble filtrant croissant $B(f)$ des éléments de $A(K)$ strictement majorés par f sur K [3]. Comme de plus f est de 1re classe de Baire, il existe une suite $(f_n) \subset E'$ et une suite $(\varepsilon_n) \subset \underset{\sim}{R}^+$, telle que la suite $(f_n - \varepsilon_n)$ soit croissante sur K et d'enveloppe supérieure f sur K. Il en résulte, en particulier, que f est bornée sur K.

On peut supposer par exemple que $\varepsilon_n < 4^{-(n+1)}$, pour tout n. On aura alors $f_n - f_{n+1} < 4^{-n}$ sur K.

D'après le théorème précédent, il existe une suite $(g_n) \subset C^0$ telle que $f_n - f_{n+1} \leqslant g_n$ partout sur C^0 et $g_n \leqslant 4^{-n}$ sur K.

Posons alors

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n g_n \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} g_n .$$

La fonction ψ est alors continue sur $\{\varphi \leqslant 1\}$.

Posons aussi, pour $n \geqslant 0$,

$$u_n = g_n - f_n + f_{n+1}, \text{ et } u = \sum_{n \geqslant 0} u_n .$$

Sur l'ensemble $\{\varphi \leqslant 1\}$, on a les relations

$$f_0 - \psi + \sum_{p=0}^{n} u_p = f_{n+1} - \sum_{p > n+1} g_p$$

de sorte que la fonction $h = f_0 - \psi + u$ est s. c. i. sur cet ensemble, et $h|_K = f$, ce qui entraîne que u est bornée sur K par une constante M. On avait déjà $\sup_K \varphi \leqslant 1$.

Posons alors, pour $n \geqslant 0$,

$$k_{2n+1} = 2^{-n} g_{n+1}, \quad k_{2n} = M^{-1} . \tfrac{1}{2} u_n$$

la fonction $w = \sum_{n \geqslant 0} k_n$ est alors bornée par 1 sur K. Sur $\{w \leqslant 1\}$, les fonctions u et ψ sont bornées, u est s. c. i., ψ continue, et $h = f_0 - \psi + u$ prolonge f.

<u>Application</u>. - Soient X un espace compact métrisable, K une partie convexe compacte héréditaire de $\mathfrak{M}^+(X)$, muni de la topologie vague ; on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> f <u>une fonction affine s. c. i. sur</u> K, <u>nulle en</u> 0. <u>Il existe alors trois fonctions</u> u, ψ, w <u>semi-continues inférieurement et</u> $\geqslant 0$ <u>sur</u> X <u>telles que</u>

(a) $\sup_K w \leqslant 1$ <u>et</u> u, $\psi \leqslant Mw$ <u>pour un</u> $M \in \underset{\sim}{R}^+$

(b) ψ <u>est continue sur</u> $K(w) = \{\mu \in \mathfrak{M}^+(X) ; \langle \mu , w \rangle \leqslant 1\}$

(c) <u>pour toute</u> $\mu \in K$, $\int (u - \psi) d\mu = f(\mu)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AJLANI (M.) et MOKOBODZKI (G.). - Simplexes de mesures simpliciales et centrales, Acta Mathematica, Uppsala, t. 134, 1975, p. 87-110.

[2] ALFSEN (E. M.). - Compact convex sets and boundary integrals. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Ergebnisse der Mathematik, 57).

[3] MOKOBODZKI (G.). - Quelques propriétés des fonctions numériques (s. c. i. ou s. c. s.) sur un ensemble convexe compact, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6e année, 1961/62, n° 9, 3 p.

[4] MOKOBODZKI (G.). - Limites médiales et mesures médiales, Annales Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

[5] MOKOBODZKI (G.). - Sur la limite faible d'une suite de fonctions boréliennes, Séminaire de théorie du potentiel, Université Pierre et Marie Curie (à paraître).

(Texte reçu le 24 novembre 1975)

Gabriel MOKOBODZKI
Equipe d'Analyse, ERA CNRS 294, Tour 45
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05