

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

RICHARD BECKER

Mesures coniques et intégrale de Daniell

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° 24, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A10_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MESURES CONIQUES ET INTÉGRALE DE DANIELL

par Richard BECKER

Partie I : Préliminaires.

1. Notations et rappels. — L'expression "E espace faible" signifie que E est un espace vectoriel muni d'une topologie faible séparée ; E' désigne le dual de E pour cette topologie ; quelquefois, il pourra arriver qu'un même espace vectoriel E soit mis en dualité avec plus d'un s. e. v. de E^* (dual algébrique de E) : cela sera alors explicitement précisé.

On dit qu'un cône convexe, contenu dans un espace faible E, est dans la classe \mathcal{C} lorsque ce cône est une partie complète de E ; \mathcal{S} désigne la classe des éléments saillants de \mathcal{C} .

Rappelons que, si V est un espace vectoriel ordonné, V^+ désigne le cône des éléments ≥ 0 de V, et V_b^* le s. e. v. de V^* engendré par $(V^*)^+$.

Soit E espace faible ; on note $h(E)$ l'espace vectoriel réticulé (e. v. r.) de fonctions définies sur E engendré par E' , et $S(E)$ la famille des éléments convexes de $h(E)$.

On pose $M(E) = h(E)_b^*$; les éléments de $M(E)$ sont appelés mesures coniques sur E. On dit que $\mu \in M^+(E)$ est portée par un cône $X \subset E$ lorsque ($f \in h(E)$ et $f|_X \geq 0$) entraîne ($\mu(f) \geq 0$) ; $\mu(f)$ ne dépend alors que de $f|_X$. On dit que $\mu \in M(E)$ est portée par X si, et seulement si, μ^+ et μ^- sont portées par X.

Soient E espace faible, et $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$; $\forall \mu \in M^+(E)$, lorsque μ est portée par X, il existe un élément $r(\mu) \in X$ tel que, $\forall \ell \in E'$, $\mu(\ell) = \ell(r(\mu))$ ([4], 30.7 proposition) ; on dit que $r(\mu)$ est la résultante de μ . On pose

$$K_\mu = \{r(\lambda) ; \lambda \in M^+(E) \text{ avec } \lambda \leq \mu\} ;$$

c'est une partie convexe et compacte de X ([4], 38.2 proposition).

Il existe un plus petit élément de \mathcal{C} qui porte μ , à savoir $\overline{\text{Un}K_\mu}$ ([4], 38.5 corollaire).

Soient E espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, et $\lambda, \mu \in M^+(E)$, λ et μ étant portées par X. On dit que λ est plus concentrée que μ , et on note $\lambda < \mu$ lorsque, $\forall f \in S(E)$, $\lambda(f) \leq \mu(f)$ (ordre de Choquet) ([4] 30.11). On appelle mesure maximale sur X toute mesure maximale pour cet ordre ([4] 30.13). Il est évident que s'il existe une mesure maximale sur X, alors $X \in \mathcal{S}$.

2. Introduction. — G. CHOQUET ([4] 38.13) a démontré qu'une mesure conique $\mu \geq 0$ sur un espace E faiblement complet (i. e. $E \in \mathcal{C}$) était une intégrale de Daniell

(i. e. $\forall (f_n) \in h(E)$, avec $f_n \downarrow 0$ sur E , on a $\mu(f_n) \rightarrow 0$).

Mais μ n'est pas nécessairement une intégrale de Daniell pour la convergence sur un cône $X \in \mathcal{C}$ qui porte μ (cf. n° 8). Le problème se pose alors de tenter d'édifier une théorie de l'intégration pour une mesure conique ≥ 0 portée par un cône donné de la classe \mathcal{C} , et de comparer cette théorie avec la théorie classique de Daniell.

3. Plan. - Après ces quelques préliminaires (partie I), et étant donné un espace faible E , et $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, nous montrerons, dans la partie II, que, pour ainsi dire, la notion de mesure conique portée par X ne change pas lorsque l'on renforce la topologie de E en rajoutant à E' des éléments de E^* dont la restriction à X est continue.

Soient E espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, et $\mu \in M^+(E)$ portée par X .

Nous définirons alors (partie III) l'analogie de l'intégrale supérieure de la théorie classique, pour des fonctions sous-linéaires et s. c. i., définies sur X (n° 12); nous prouverons une propriété de continuité pour l'intégrale supérieure (n° 17), grâce à un "lemme de Fatou conique" (n° 9).

Nous introduisons un espace vectoriel réticulé $\Lambda^1(\mu)$ (n° 18) de fonctions sur K_μ contenant $h(E)$, sur lequel un prolongement de μ est défini grâce à l'intégrale supérieure, et nous comparerons $\Lambda^1(\mu)$ avec l'espace $L^1(\mu)$ déduit de μ et de $h(E)$ à l'aide de la théorie classique de Daniell (n° 21 et 23). Le cas où $X \in \mathcal{S}$ et où μ est maximale est particulièrement intéressant (n° 19).

Enfin dans la partie IV, nous prolongerons μ aux fonctions sous-linéaires définies sur X (n° 25); on prouve une propriété de continuité séquentielle de ce prolongement (n° 29), et on introduit un certain espace de fonctions affines sur X (n° 31).

Partie II : Une remarque concernant la définition des mesures coniques.

Soit X un cône convexe contenu dans un espace vectoriel; on pose $E = X - X$, et on suppose que $X \in \mathcal{C}$ lorsque E est mis en dualité avec un certain espace vectoriel $F \subset E^*$. Il est bien connu ([2] chap. II, §3, p. 7) que $X \in \mathcal{C}$ lorsque E est mis en dualité avec l'espace vectoriel F des éléments de E^* dont la restriction à X est continue, X étant muni de la trace de $\sigma(E, F)$.

A priori, les notions de mesure conique sur E portée par X lorsque E est muni de $\sigma(E, F)$, et lorsque E est muni de $\sigma(E, \tilde{F})$, sont différentes; nous allons voir qu'en fait il n'en est rien grâce aux propositions 4 et 5.

Nous noterons (E, F) ou (E, \tilde{F}) pour indiquer que \tilde{E} est muni de $\sigma(E, F)$ ou de $\sigma(E, \tilde{F})$; remarquons que tout élément de $M(E, F)$ induit par restriction un élément de $M(E, F)$.

4. PROPOSITION. - Tout élément de $M(E, \tilde{F})$ porté par X est bien déterminé par sa restriction à $h(E, F)$.

5. PROPOSITION. - Tout élément $\mu \in M(E, f)$ porté par X se prolonge univoquement en un élément $\tilde{\mu} \in M(E, \tilde{F})$ porté par X . L'application $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$ est bijective linéaire, et positive.

Ces deux propositions résultent du lemme suivant.

6. LEMME. - Soit $\mu \in M^+(E, F)$ portée par X ; pour toute $f \in h(E, \tilde{F})$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $u, v \in h(E, f)$ tels que $u \leq f \leq v$ sur X et $\mu(v - u) \leq \varepsilon$.

Preuve. - Il suffit de prouver le lemme avec f convexe.

Si $f = \sup(f_i)$, $f_i \in \tilde{F}_i$, $1 \leq i \leq n$, prenons $\forall i$, $u_i, v_i \in F$ tels que $\forall i$, $u_i \leq f_i \leq v_i$ sur X , et $v_i(r(\mu)) - u_i(r(\mu)) \leq \varepsilon/n$ (de tels u_i, v_i existent, à cause du théorème de séparation de Hahn-Banach, appliqué dans l'espace $E \times \mathbb{R}$ au convexe fermé $\{(x, k); x \in X, k \geq f_i(x)\}$ et au point

$$(r(\mu), f_i(r(\mu)) - \varepsilon/2n),$$

puis au convexe fermé $\{(x, k); x \in X, k \leq f_i(x)\}$ et au point

$$(r(\mu), f_i(r(\mu)) + \varepsilon/2n);$$

$$u = \sup(u_i) \text{ et } v = \sup(v_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

répondent à la question puisque l'on a, sur X ,

$$v - u \leq \sum_1^n (v_i - u_i).$$

7. Remarques.

1° Il résulte alors des deux propositions précédentes que les e. v. r. constitués par les éléments de $M(E, F)$ (resp. $M(E, \tilde{F})$) portés par X sont canoniquement isomorphes, ce qui justifie la notation $M(X)$. Pour exprimer ce fait nous dirons que, si $X \in \mathcal{C}$, $M(X)$ ne dépend que du cône X et de sa topologie.

2° Notons également que la notion d'ordre de Choquet sur $M^+(X)$, associée à $S(E, F)$, est la même que celle associée à $S(E, \tilde{F})$: étant donnés $f \in S(E, \tilde{F})$ et $\lambda, \mu \in M^+(X)$ avec $\lambda(g) \leq \mu(g)$, $\forall g \in S(E, F)$, il existe grâce à 6 une suite (f_n) de $S(E, F)$ avec $\lambda(f_n) \rightarrow \lambda(f)$ et $\mu(f_n) \rightarrow \mu(f)$. La notion d'ordre de Choquet, et donc aussi de mesure maximale, sur $M^+(X)$ ne dépend donc que du cône $X \in \mathcal{C}$ et de sa topologie; on notera $\max(X)$ l'ensemble des éléments maximaux de $M^+(X)$ pour cet ordre.

Partie III : L'intégrale supérieure des fonctions sous-linéaires et s. c. i.

8. Exemples.

1° Soit $E = L^\infty$ (classes de fonctions mesurables bornées sur $[0, 1]$ muni de dx), muni de la topologie faible telle que $E' = L^1$, $X = E^+$, et μ la mesure

maximale sur X qui représente la constante $1 \in X$. μ n'est pas de Daniell sur $h(E)|_X$:

$\forall k$ et n entiers avec $1 \leq k \leq 2^n$, soit $e(k, n)$ le segment

$$((k-1)/2^n, k/2^n) \text{ de } (0, 1) ;$$

soit $h_n \in h(E)$, définie par

$$\forall f \in L^\infty, h_n(f) = \sup_{1 \leq k \leq 2^n} \left(\int_{e(k,n)} f dx \right) ;$$

on a $h_n|_X \rightarrow 0$ en décroissant, et $\mu(h_n) = 1, \forall n$.

2° Le disque unité D , considéré comme partie de R^2 et le cercle unité U muni de la mesure de Haar, permettent de construire une mesure conique λ sur R^3 , portée par un élément $X \in \mathcal{S}$, telle que λ ne soit pas de Daniell sur $h(R^3)|_{K_\lambda}$:

Soit $X \subset R^3$ le cône de \mathcal{S} admettant $D \times 1$ pour base ; on a $R^+ \cdot K_\lambda \setminus 0 = \overset{\circ}{X}$ (intérieur de X) ; noter qu'il existe une suite (f_n) de fonctions continues définies sur D telle que $f_n = 1$ sur U , et (f_n) décroît vers 0 sur

$$\overset{\circ}{D} = D \setminus U .$$

Soit $\mu \in M^+(X)$ avec $X \in \mathcal{C}$; nous allons chercher à prolonger μ à des fonctions définies sur X et positivement homogènes, mais non nécessairement continues. Pour cela, le lemme suivant, du genre Fatou, est fondamental :

9. LEMME. - Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, $\mu \in M^+(X)$, et $f \in h(E)$. Pour tout filtre \mathfrak{F} sur $S(E)$ tel que, en tout point de K_μ ,

$$f \leq \liminf (\mathfrak{F}),$$

on a

$$\mu(f) \leq \liminf (\mu(\mathfrak{F})) .$$

Preuve. - Soit $X_i, 1 \leq i \leq n$, une famille de cônes polyédraux ([4], 30.1 définition) recouvrant X , telle que, $\forall i, \exists \tilde{f}_i \in E^+$ avec $f|_{X_i} = (\tilde{f}_i)|_{X_i}$; une telle famille existe ([4], 30.2 proposition).

$\forall i, \exists \mu_i \in M^+(X_i), 1 \leq i \leq n$, avec $\mu = \sum \mu_i$; soit $x_i = r(\mu_i)$; on a

$$x_i \in X_i \cap K_\mu .$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists F_\varepsilon \in \mathfrak{F}$ tel que $g(x_i) \geq f(x_i) - \varepsilon/n$ pour tout i , et $\forall g \in F_\varepsilon$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, $\forall h \in S(E)$, on a :

$$\mu(h) = \sum \mu_i(h) \geq \sum h(x_i) ,$$

et $\forall g \in F_\varepsilon$

$$\mu(g) \geq \sum f(x_i) - \varepsilon = \mu(f) - \varepsilon ;$$

d'où le lemme.

10. Notation. - Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$; on note $C_i(X)$ la famille des fonctions sous-linéaires et s. c. i., définies sur X et à valeurs dans $R \cup (+\infty)$.

Cette famille est stable par sup quelconque et par multiplication par $\lambda \geq 0$. Remarquons que $C_i(X)$ ne dépend que du cône X et de sa topologie.

Nous aurons également besoin de la remarque suivante.

11. PROPOSITION. - Soit E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$; toute

$$f \in C_i(X)$$

est limite filtrante croissante sur X d'éléments de $S(E)$.

Preuve. - Remarquons que, dans l'espace produit $E \times R$, le sur-graphe G de f ($G = \{(x, \lambda) ; x \in X \text{ et } \lambda \geq f(x)\}$) est un cône convexe fermé.

Si $x \in X$ est tel que $f(x) < +\infty$, il suffit de séparer strictement G et $(x, f(x) - \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, par un hyperplan fermé, à l'aide du théorème de Hahn-Banach.

Si $f(x) = +\infty$, on séparera strictement G et le segment ayant pour extrémités $(0, -1)$ et (x, k) pour tout $k \in R$.

12. Définition. - Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, et $\mu \in M^+(X)$; pour toute $f \in C_i(X)$, on pose

$$\mu^*(f) = \sup\{\mu(g) ; g \in S(E) \text{ et } g \leq f \text{ sur } X\}.$$

On a $\mu^*(\lambda f) = \lambda \mu^*(f)$, $\forall \lambda > 0$. Notons que $\mu^*(f) \in R \cup (+\infty)$.

Grâce à la proposition suivante, qui résulte du lemme 9, l'application μ^* ne dépend que du cône X et de sa topologie.

13. PROPOSITION. - Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, et

$$\mu \in M^+(X).$$

Pour toute $f \in C_i(X)$ et tout filtre \mathfrak{F} sur $S(E)$, admettant une partie formée d'éléments $\leq f$ sur K_μ , et tel que $\mathfrak{F} \rightarrow f$ sur K_μ , on a

$$\mu^*(f) = \lim(\mu(\mathfrak{F})).$$

14. COROLLAIRE. - $\forall f, g \in C_i(X)$, on a

$$(f \leq g \text{ sur } K_\mu) \implies (\mu^*(f) \leq \mu^*(g)).$$

$\forall f, g \in C_i(X)$, on a

$$\mu^*(f + g) = \mu^*(f) + \mu^*(g).$$

$\forall \mu, \nu \in M^+(X)$, on a

$$(\mu + \nu)^*(f) = \mu^*(f) + \nu^*(f), \quad \forall f \in C_i(X).$$

Pour toute famille f_i d'éléments ≥ 0 de $C_i(X)$, on a $\mu^*(\sum f_i) = \sum \mu^*(f_i)$.

15. Notations. - Soient E un espace faible, et $\mu \in M^+(E)$; on note $C_i(\mu)$ la famille des fonctions sous-linéaires et s. c. i., définies sur $R^+ \cdot K$, à valeurs dans $R \cup (+\infty)$, minorées par un élément (non fixé) de E' . Comme $\forall X \in \mathcal{C}$, tel que $X \subset E$ et $\mu \in M^+(X)$, tout élément de $C_i(\mu)$ est la restriction à $R^+ \cdot K_\mu$ d'un élément de $C_i(X)$, on peut donc parler, $\forall f \in C_i(\mu)$, par abus de langage, de $\mu^*(f)$.

Soit $C_i^1(\mu) = \{f; f \in C_i(\mu) \text{ et } \mu^*(f) < \infty\}$.

16. PROPOSITION. - Soit $f \in C_i^1(\mu)$; $\forall \kappa \in K_\mu$, on a $f(x) \leq \mu^*(f)$.

Preuve. - C'est une conséquence immédiate de la proposition 13.

17. PROPOSITION. - Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$ et

$$\mu \in M^+(X);$$

soient $f \in C_i(\mu)$ et $f_1 \in C_i^1(\mu)$; pour tout filtre \mathfrak{F} sur $C_i(\mu)$ tel que, en tout point de K_μ , $f - f_1 \leq \lim \inf(\mathfrak{F})$, on a

$$\mu^*(f) - \mu^*(f_1) \leq \lim \inf(\mu^*(\mathfrak{F})).$$

Preuve. - En raisonnant sur f et sur le filtre $(\mathfrak{F} + f_1) = (F; \exists \tilde{F} \in \mathfrak{F} \text{ avec } F = \tilde{F} + f_1)$, on voit, grâce au corollaire 14, qu'il suffit de démontrer le résultat de l'énoncé avec $f_1 = 0$; de plus, d'après la définition 12, il suffit d'envisager le cas où $f \in h(E)$.

Cela étant, la démonstration s'effectue exactement comme au lemme 9, en tenant compte du corollaire 14 et de la proposition 16 :

Soit (μ_i) , $1 \leq i \leq n$, une famille finie d'éléments de $M^+(E)$ telle que, en posant $x_i = r(\mu_i)$, $1 \leq i \leq n$, on ait

$$\mu = \sum \mu_i \text{ et } \mu_i(f) = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq n \text{ (cf. n° 9);}$$

$\forall g \in C_i(\mu)$, on a (cf. n° 14) $\mu^*(g) = \sum_i \mu_i^*(g)$, d'où

$$\mu^*(g) \geq \sum g(x_i) \text{ (cf. n° 16).}$$

$\forall \varepsilon > 0$ donné, $\exists F_\varepsilon \in \mathfrak{F}$ tel que $\forall g \in F_\varepsilon$, $g(x_i) \geq f(x_i) - \varepsilon/n$, $1 \leq i \leq n$, d'où $\mu^*(g) \geq \mu(f) - \varepsilon$.

18. Définition. - Soient E un espace faible, et $\mu \in M^+(E)$; on pose

$$\Lambda^1(\mu) = C_i^1(\mu) - C_i^1(\mu);$$

c'est un e. v. r. de fonctions sur $R^+ \cdot K$; l'application μ^* se prolonge canoniquement, grâce au corollaire 14, en un élément ≥ 0 de $\Lambda^1(\mu)^*$, noté encore μ^* . On munit $\Lambda^1(\mu)$ de la semi-norme $p(f) = \mu^*(|f|)$. Notons que $p(|f|) = p(f)$ et que, $\forall f, g \geq 0$ dans $\Lambda^1(\mu)$, on a $p(f + g) = p(f) + p(g)$.

19. PROPOSITION. - Soient $X \in \mathcal{C}$ et $\mu \in \max(X)$; alors $\Lambda^1(\mu)$ muni de $p(f)$ est un espace complet.

(La réciproque est fautive : prendre une somme finie de mesures coniques ponctuelles.)

Preuve. - Comme $h(E)$ est partout dense dans $\Lambda^1(\mu)$, il suffit de prouver que, pour toute suite (h_n) de $h(E)$ avec $p(h_n) \leq 1/2^n$, $\forall n$, la série $\sum h_n$ converge : soit $h_n = h_n^+ - h_n^-$; prouvons la convergence de $\sum h_n^+$: μ étant maximale, on a $p(h_n^+ - \check{h}_n^+) = 0$ (Si $f \in h(E)$, \check{f} désigne le plus grand élément de $C_i(X)$ tel que $f \leq f|_X$) ; or $\sum h_n^+ \in C_i(X)$; de plus (cf. n° 14)

$$\mu^*(\sum h_n^+) = \sum \mu^*(h_n^+) = \sum \mu^*(h_n^+) \leq \sum 1/2^n ,$$

d'où $\sum h_n^+ \in C_i^1(\mu)$; $\forall k$ entier, on a

$$p(\sum h_n^+ - \sum_1^k h_n^+) = \mu^*(\sum_{k+1}^\infty h_n^+) \leq 1/2^k ;$$

il y a donc convergence de $\sum h_n^+$ vers $\sum h_n^+$ au sens de p .

20. Remarque. - Munissons $\Lambda^1(\mu)$ de la semi-norme N , définie par $N(f) = \inf(\mu^*(f_1) + \mu^*(f_2))$; $f_1, f_2 \in C_i^1(\mu)$, $f_1, f_2 \geq 0$ et $f = f_1 - f_2$) ; on démontrerait que $\Lambda^1(\mu)$, muni de N , est un Banach.

Soient E un espace faiblement complet, $X \subset E$ avec $X \in \mathcal{C}$, et $\mu \in M^+(X)$; μ étant de Daniell sur $h(E)$ ([4] 38.13), on peut développer la théorie de l'intégrale de Daniell ([1] et [5] § 61), et chercher à comparer cette théorie avec ce qui précède.

Notons que la fonction φ_X , définie sur E , valant 0 sur X et $+\infty$ ailleurs, est dans $C_i(E)$, et que $\mu^*(\varphi_X|_X) = 0$.

21. PROPOSITION. - Lorsque φ_X est μ -intégrable pour la théorie de Daniell, alors μ est de Daniell sur $h(E)|_X$. De plus, lorsque $X \in \mathcal{S}$, E est isomorphe à R^N .

Preuve. - Lorsque φ_X est μ -intégrable pour la théorie de Daniell, alors l'ensemble $(E \setminus X)$, où $\varphi_X = \infty$, est μ -négligeable au sens de ([1] 6, et [5] § 61) ; on a donc ([1] 7, et [5] § 61) pour toute suite (f_n) de $h(E)$ qui $\rightarrow 0$ en décroissant, sauf peut-être sur $(E \setminus X)$, $\mu(f_n) \rightarrow 0$, ce qui est le résultat cherché.

Toute fonction μ -intégrable pour la théorie de Daniell est nulle sur un s. e. v. de E de codimension dénombrable, et donc au moins sur une droite de E lorsque E n'est pas isomorphe à R^N ; dans ce cas, φ_X ne peut pas être μ -intégrable si $X \in \mathcal{S}$, car alors X contiendrait une droite sur laquelle φ_X serait nulle.

Nous allons voir que $\Lambda^1(\mu)$ peut être regardé comme un sous-espace vectoriel-réticulé de $L^1(\mu)$ (espace classique déduit de $h(E)$ et de μ à l'aide de la

théorie de Daniell, où deux éléments f et g tels que $\mu(|f - g|) = 0$ sont identifiés). Nous dirons que $f, g \in \Lambda^1(\mu)$ sont μ -équivalents lorsque

$$\mu^*(|f - g|) = 0.$$

22. PROPOSITION. - $\forall f \in C^1_i(\mu)$ la famille des fonctions de $C^1_i(\mu)$, μ -équivalentes à f , admet un plus grand élément pour l'ordre usuel des fonctions.

Preuve. - D'après la proposition 17, il suffit de prouver que

$(u, v \in C^1_i(\mu) \text{ avec } u, v \text{ } \mu\text{-équivalentes à } f) \implies (\sup(u, v) \text{ } \mu\text{-équivalente à } f).$

Or on a

$$u + v = \sup(u, v) + \inf(u, v) \geq \sup(u, v) + w,$$

où w est l'élément de $C^1_i(\mu)$ ainsi obtenu : on se place dans $E \times R$; soit $\Gamma_\mu = (R^+ \cdot K_\mu) \times R$ et Γ_f le sur-graphe de f ;

$$\Gamma_f = \{(x, \lambda) ; x \in R^+ \cdot K_\mu \text{ et } \lambda \geq f(x)\} ;$$

Γ_u, Γ_v et Γ_f sont trois sous-cônes convexes, fermés, relatifs de Γ_μ , et on a $\Gamma_u + \Gamma_v \subset \Gamma_f$; w sera caractérisé par

$$\Gamma_w = \overline{(\Gamma_u + \Gamma_v)} \cap \Gamma_\mu ;$$

comme $f \in C^1_i(\mu)$, on a $f \leq w$ puisque $\Gamma_w \subset \Gamma_f$, et on a $f \in C^1_i(\mu)$; comme aussi $w \leq u$ et $w \leq v$, on a $\mu^*(w) = \mu^*(f)$.

On a donc $\mu^*(u) + \mu^*(v) \geq \mu^*(\sup(u, v)) + \mu^*(w)$; d'où

$$2\mu^*(f) \geq \mu^*(\sup(u, v)) + \mu^*(f),$$

soit $\mu^*(\sup(u, v)) = \mu^*(f)$ puisque $\sup(u, v) \geq f$.

La proposition suivante explicite la comparaison de $\Lambda^1(\mu)$ et de $L^1(\mu)$.

23. PROPOSITION. Il existe une injection canonique de $\Lambda^1(\mu)$, modulo la μ -équivalence, dans $L^1(\mu)$. Plus précisément :

1° Soit $f = C - C'$ avec $C, C' \in C^1_i(\mu)$; soient (C_n) et (C'_n) deux suites croissantes de $S(E)$ telles que $C_n \leq C, C'_n \leq C'$ sur K_μ , et

$$\mu(C_n) \rightarrow \mu^*(C), \quad \mu(C'_n) \rightarrow \mu^*(C').$$

À la classe de f dans $\Lambda^1(\mu)$ correspond la classe de $\lim(C_n) - \lim(C'_n)$ dans $L^1(\mu)$.

2° Réciproquement, soient (C_n) et (C'_n) deux suites croissantes de $S(E)$ telles que $\lim(C_n) < \infty$ et $\lim(C'_n) < \infty$. Soit g une fonction sur E telle que $g = \lim(C_n) - \lim(C'_n)$ en tout point où ces limites sont $< \infty$. La classe de g (qui est dans $L^1(\mu)$) est l'image de la classe dans $\Lambda^1(\mu)$ de la restriction de g à $R^+ \cdot K_\mu$.

Preuve. - On utilisera l'abréviation L pour "limite", dans les formules.

Pour le 1^o, il faut vérifier que $\forall S, S' \in C_1^1(\mu)$ et $\forall (S_n), (S'_n)$, suites croissantes de $S(E)$, telles que $S_n \leq S, S'_n \leq S'$ sur K_μ , et

$$\mu(S_n) \rightarrow \mu^*(S), \quad \mu(S'_n) \rightarrow \mu^*(S'),$$

on a

$$\begin{aligned} & (f \text{ et } S - S' \text{ sont } \mu\text{-équivalentes dans } \Lambda^1(\mu)) \\ & \Rightarrow (L(C_n) - L(C'_n) \text{ et } L(S_n) - L(S'_n) \text{ sont égales dans } L^1(\mu)). \end{aligned}$$

Par abus de langage, on notera encore μ le prolongement canonique de μ à $L^1(\mu)$; on a alors

$$\begin{aligned} & \mu(|(L(C_n) - L(C'_n)) - (L(S_n) - L(S'_n))|) \\ & = 2\mu(\sup(L(C_n) + L(S'_n), L(C'_n) + L(S_n))) - \mu(L(C_n) + L(S'_n) + L(C'_n) + L(S_n))) \\ & = \lim(2\mu(\sup(C_n + S'_n, C'_n + S_n)) - \mu(C_n + S'_n + C'_n + S_n)) \\ & = 2\mu^*(\sup(L(C_n) + L(S'_n), L(C'_n) + L(S_n)) \Big|_{R^+ \cdot K_\mu}) - \\ & \quad - \mu^*(L(C_n) + L(S'_n) + L(C'_n) + L(S_n)) \Big|_{R^+ \cdot K_\mu}). \end{aligned}$$

Pour prouver que la première partie de l'expression précédente vaut

$$2\mu^*(\sup(C + S', C' + S)),$$

il suffit d'utiliser la proposition 13 et la remarque suivante :

$\forall A, B, a, b \in C_1^1(\mu)$ avec $a \leq A, b \leq B$ et $\mu^*(a) = \mu^*(A), \mu^*(b) = \mu^*(B)$,

on a,

$$\mu^*(\sup(A, B)) = \mu^*(\sup(a, b)),$$

car $\sup(A, B) - \sup(a, b) \leq (A - a) + (B - b)$.

Pour achever de prouver ce 1^o, il suffit de remarquer que l'on a

$$0 = \mu^*(|(C - C') - (S - S')|) = 2\mu^*(\sup(C + S', C' + S)) - \mu^*(C + S' + C' + S).$$

Le 2^o est évident, une fois prouvé 1^o.

Partie IV : L'intégrale supérieure des fonctions sous-linéaires.

24. Notations. - Soient E un espace faiblement complet, $\mu \in M^+(E)$, $X \subset E$ tel que $X \in \mathcal{C}$, et $\mu \in M^+(X)$. Dans tout ce qui suit, Y désignera un cône convexe de E tel que :

$$1^\circ \quad K_\mu \subset Y \subset X.$$

2^o Y est une partie héréditaire de X pour le préordre induit par X . \mathcal{C}_Y désignera la famille des fonctions sous-linéaires, définies sur Y , à valeurs dans

$R \cup (+\infty)$, minorées par un élément (non fixé) de E' .

25. Définition. - $\forall f \in C_Y$, on pose

$$\mu_Y^*(f) = \inf(\mu^*(g) ; g \in C_i(X) \text{ et } f \leq g \text{ sur } Y).$$

Cette définition a toujours un sens, car la fonction valant $+\infty$ sur $X \setminus O$, et 0 en O , est dans $C_i(X)$ et majore tous les éléments de C_Y ; on a

$$\mu_Y^*(f) \in R \cup (+\infty),$$

car f est minoré par un élément de E' sur Y .

μ_Y^* ne dépend que du cône X et de sa topologie, μ et Y étant fixés, mais μ_Y^* ne dépend pas du cône X , E , E' , μ et Y étant fixés, vérifiant les conditions de 24.

26. Exemples (éclairant la définition 25).

1° (Notations de 8, 2°) Soit f une fonction affine, définie sur $R^+ \cdot K_\lambda$, telle que $f \geq 1$ sur $\hat{D} \times 1$; on a $\lambda_X^*(f) > 0$. Or, $\forall \varepsilon > 0$, il existe une suite (f_n) de $-S(R^3)$, ≥ 0 et croissant vers f sur K_λ , telle que $\lambda(f_n) \leq \varepsilon$, $\forall n$.

Il suffit de construire les restrictions des f_n à $D \times 1$: soit φ une fonction affine > 0 sur D ; $\forall \varepsilon > 0$, construisons une suite croissante (φ_n) de fonctions de $-S(R^2)$ telle que $0 \leq \varphi_n \leq \varepsilon$ sur U et $\varphi_n \rightarrow \varphi$ sur $\hat{D} = D \setminus U$. Soit (g_n) une suite auxiliaire de fonctions concaves continues sur D telle que (g_n) soit croissante, $g_n < \varphi$ partout sur D , $g_n = 0$ sur U , et $g_n \rightarrow \varphi$ sur \hat{D} ; on prendra $\varphi_1 \in -S(R^2)$ telle que $g_1 \leq \varphi_1 < \varphi$ sur D , et $\varphi_1 \leq \varepsilon/2$ sur U ; soit \hat{g}_2 la plus petite fonction concave et s. c. s. définie sur D , telle que $\hat{g}_2 \geq g_2$, et φ_1 ; on a $\hat{g}_2 < \varphi$ sur D , et $\hat{g}_2 = \varphi_1$ sur U , car dans $D \times R^+$, le sous-graphe de \hat{g}_2 , $((x, t); x \in D \text{ et } 0 \leq t \leq \hat{g}_2(x))$, est l'enveloppe convexe des sous-graphes de g_2 et φ_1 ; comme $\hat{g}_2|_U = \varphi_1|_U$ est continue, $\exists \varphi_2 \in -S(R^2)$ telle que $\hat{g}_2 \leq \varphi_2 < \varphi$ sur D , et $\varphi_2 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/4$ sur U .

Supposons construits les $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in -S(R^2)$ tels que $\varphi_i \leq \varphi_j$, pour $1 \leq i < j < n$ et, pour $1 \leq i \leq n$, $\varphi > \varphi_i > g_i$ sur D , et $0 \leq \varphi_i \leq \varepsilon/2 + \dots + \varepsilon/2^i$ sur U ; construisons φ_{n+1} : soit \hat{g}_{n+1} la plus petite fonction concave et s. c. s. sur D telle que $\hat{g}_{n+1} \geq g_{n+1}$ et φ_n ; on a, comme pour \hat{g}_2 , $\hat{g}_{n+1} < \varphi$ sur D , et $\hat{g}_{n+1} = \varphi_n$ sur U ; donc $\exists \varphi_{n+1} \in -S(R^2)$ telle que $\hat{g}_{n+1} \leq \varphi_{n+1} < \varphi$ sur D , et $\varphi_{n+1} \leq \varepsilon/2 + \dots + \varepsilon/2^{n+1}$ sur U . Il est clair que (φ_n) , ainsi construite, va être une suite de $-S(R^2)$ telle que $0 \leq \varphi_n \leq \varepsilon$ sur U , et (φ_n) croît vers φ sur \hat{D} .

2° Il existe un convexe compact métrisable X , que l'on considérera comme la base d'un cône localement compact, une fonction f convexe et borélienne définie sur X , une mesure de Radon $\mu \geq 0$ dont le support contient $\mathcal{E}(X)$ (ensemble des points extrémaux de X), de sorte que $\mu(f) < \inf(\mu(g) ; g \geq f, g \text{ convexe}$

s. c. i. sur X) : on prendra pour X l'ensemble des mesures de Radon ≥ 0 et de masse 1 sur $[0, 1]$, pour μ la mesure maximale sur X représentant l'élément $(dx) \in X$, et pour f l'application définie par $\forall m \in X, f(m) = m_d(1)$ (m_d : partie diffuse de m), on a $\mu(f) = 0$, et $f(r(\mu)) = 1$; on voit que f est borélienne en notant que, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$(m; m \in X \text{ et } 1 - f(m) > k)$,

$$= \bigcup_{p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}} (m; \exists x_1, \dots, x_p \in [0, 1] \text{ et } \exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0 \\ \text{tels que } m \geq \sum_1^p \alpha_i \delta_{x_i} \text{ et } \sum_1^q \alpha_i \geq k + 1/q) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}} K_{p,q},$$

car chaque $K_{p,q}$ est une partie compacte de X .

f convient grâce à la proposition 16.

27. PROPOSITION.

$\forall f, g \in C_Y, (f \leq g) \implies \mu_Y^*(f) \leq \mu_Y^*(g)$.

$\forall f, g \in C_Y, \text{ on a } \mu_Y^*(f + g) \leq \mu_Y^*(f) + \mu_Y^*(g)$.

$\forall f \in C_Y \text{ et } \forall \lambda > 0, \text{ on a } \mu^*(\lambda f) = \lambda \mu_Y^*(f)$.

28. PROPOSITION. - Soient $\lambda, \mu \in M^+(X)$ avec $X \in \mathcal{S}$, et $(K_\lambda \cup K_\mu) \subset Y$; on a $(\lambda + \mu)_Y^* = \lambda_Y^* + \mu_Y^*$.

Preuve. - Il est évident que $(\lambda + \mu)_Y^* \geq \lambda_Y^* + \mu_Y^*$ à cause du corollaire 14. Soit $f \in C_Y$; il suffit d'envisager le cas où $\lambda_Y^*(f) + \mu_Y^*(f) < \infty$;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u, v \in C_i(X)$$

avec $f \leq u$ et v sur Y , et avec $\lambda^*(u) \leq \lambda_Y^*(f) + \varepsilon, \mu^*(v) \leq \mu_Y^*(f) + \varepsilon$. Il suffit alors de trouver $w \in C_i(X)$, avec $f \leq w \leq u$ et v sur Y ; déterminons w à l'aide de son sur-graphe Γ_w dans $X \times \mathbb{R}$: rappelons que le sur-graphe Γ_u de u dans $X \times \mathbb{R}$ est défini par $\{(x, k); x \in X \text{ et } f(x) \leq k\}$; on a Γ_u et $\Gamma_v \in \mathcal{S}$; Γ_u et Γ_v sont contenus dans un même cône de \mathcal{S} ([3] chap. II, § 6 n° 8, lemme 1 et prop. 11); w sera caractérisée par $\Gamma_w = \Gamma_u + \Gamma_v$; on a donc $\Gamma_w \in \mathcal{S}$ ([3] chap. II, § 6 n° 8, prop. 11) et $w \in C_i(X)$; de plus, comme Y est une partie héréditaire de X pour le préordre défini par X , la fonction w est $\geq f$ sur Y . w est bien l'élément cherché.

Comme nous ne considérerons plus qu'une seule mesure conique μ , on peut supposer que $X = \overline{(\mathbb{R}^+ \cdot K)_\mu}$, car alors $X \in \mathcal{C}$, et X porte μ ([4] 38.5).

29. LEMME. - Lorsque $X \in \mathcal{S}$, pour toute suite croissante (f_n) d'éléments de C_Y , on a

$$\mu_Y^*(\lim(f_n)) = \lim(\mu_Y^*(f_n)).$$

Preuve. - Il est clair que $\mu_Y^*(\lim(f_n)) \geq \lim(\mu_Y^*(f_n))$; de plus si $\lim(\mu_Y^*(f_n)) = +\infty$,

le résultat est évident. Supposons donc $\lim(\mu_Y^*(f_n)) < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$; $\forall n \geq 1$, $\exists h_n \in C_i(X)$ telle que $f_n \leq h_n$ sur Y , et $\mu^*(h_n) \leq \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon/2^n$; posons $g_n = \sup(h_1, h_2, \dots, h_n)$; on a $g_n \in C_i(X)$, $f_n \leq g_n$ sur Y , et (g_n) est une suite croissante; montrons que $\forall n \geq 1$,

$$\mu^*(g_n) \leq \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon(1 - 1/2^n).$$

Une fois prouvée cette inégalité, on en déduit que, $\forall n \geq 1$,

$$\mu^*(g_n) \leq \lim(\mu_Y^*(f_n)) + \varepsilon,$$

et en posant $g_0 = \lim(g_n)$, on a, comme (g_n) est une suite croissante et grâce à la proposition 17,

$$\mu^*(g_0) \leq \lim(\mu_Y^*(f_n)) + \varepsilon;$$

d'où le lemme, car on a, sur Y , $g_0 \geq \lim(f_n)$ et $g_0 \in C_i(X)$.

Pour prouver que, $\forall n \geq 1$, $\mu^*(g_n) \leq \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon(1 - 1/2^n)$, on procède par récurrence; le cas $n = 1$ étant évident, supposons l'inégalité établie pour l'entier n ; on a

$$g_{n+1} = \sup(g_n, h_{n+1});$$

soit φ l'élément de $C_i(X)$ dont le sur-graphe Γ_φ est l'enveloppe convexe des sur-graphes Γ_g et Γ_h de g_n et de h_{n+1} (φ existe grâce à des arguments déjà invoqués en 28: Γ_g et Γ_h sont contenus dans un même cône de \mathcal{S} , et $\Gamma_\varphi = \Gamma_g + \Gamma_h \in \mathcal{S}$). Comme Y est une partie héréditaire de X , pour le préordre défini par X , on a $\varphi \geq f_n$ sur Y , et $g_{n+1} + \varphi \leq g_n + h_{n+1}$; d'où:

$$\mu^*(\varphi) + \mu^*(g_{n+1}) \leq \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1})$$

et

$$\mu_Y^*(f_n) + \mu^*(g_{n+1}) \leq \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon(1 - (1/2^n)) + \mu_Y^*(f_{n+1}) + \varepsilon/2^{n+1};$$

ce qui est l'inégalité visée.

30. COROLLAIRE. - On suppose $X \in \mathcal{S}$. Les deux parties suivantes de C_Y sont des cônes convexes stables par limites séquentielles croissantes:

$$1^\circ \gamma_1 = (f; f \in C_Y, \mu_Y^*(f) = \sup(\mu(g); g \in \mathcal{S}(E), g \leq f \text{ sur } Y)).$$

$$2^\circ \gamma_2 = (f; f \in C_Y, \mu_Y^*(f) = \sup(\mu(g); g \in h(E), g \leq f \text{ sur } Y)).$$

La seconde de ces deux familles contient la première.

Preuve. - Soient $f, g \in \gamma_1$; on a $\mu_Y^*(f + g) \leq \mu_Y^*(f) + \mu_Y^*(g)$; de plus, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists u, v \in \mathcal{S}(E)$ avec $u \leq f$ sur Y , $v \leq g$ sur Y , et $\mu(u) \geq \mu_Y^*(f) - \varepsilon$, $\mu(v) \geq \mu_Y^*(g) - \varepsilon$; d'où

$$\mu(u + v) \geq \mu_Y^*(f) + \mu_Y^*(g) - 2\varepsilon \geq \mu_Y^*(f + g) - 2\varepsilon;$$

γ_1 est donc un cône convexe.

γ_1 est stable par limite séquentielle à cause du lemme 29 et du fait que la fonctionnelle ψ , définie sur C_Y par

$$f \mapsto \psi(f) = \sup(\mu(g) ; g \in S(E), g \leq f \text{ sur } Y),$$

vérifie

$$((f_n) \in C_Y \text{ avec } (f_n) \text{ croissante}) \implies (\psi(\lim(f_n)) \geq \lim(\psi(f_n))) .$$

Même démonstration pour γ_2 ; on a $\gamma_1 \subset \gamma_2$, car $S(E) \subset h(E)$.

31. Définition. - Soit $\alpha_Y = (f ; f \in C_Y \cap (-C_Y))$ et $\mu_Y^*(f) = -\mu_Y^*(-f)$; c'est un espace vectoriel qui contient $(E')|_Y$.

32. PROPOSITION. - La restriction à K_μ de tout élément f de α_Y est continue sur K_μ . De plus, $\mu_Y^*(f) = f(r(\mu))$.

Preuve. - Soit $f \in \alpha_Y$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists f_1 \in C_{\frac{1}{2}}(\mu)$ et $f_2 \in -C_{\frac{1}{2}}(\mu)$ avec, sur Y , $f_2 \leq f \leq f_1$ et $\mu^*(f_1 - f_2) \leq \varepsilon$. On a donc, $\forall x \in K_\mu$, d'après la proposition 16, $f_1(x) - f_2(x) \leq \varepsilon$; comme f_1 est s. c. i., et f_2 s. c. s., on en déduit la continuité de $f|_{K_\mu}$.

Comme $f_1(r(\mu)) - f_2(r(\mu)) \leq \varepsilon$, on a $\mu_Y^*(f) = f(r(\mu))$.

33. PROPOSITION. - Lorsque $X \in \mathcal{S}$, la limite de toute suite croissante d'éléments de α_Y , majorée par un élément de α_Y , est dans α_Y .

Preuve. - Soient (f_n) une suite croissante de α_Y majorée par un élément de α_Y , et $f = \lim(f_n)$; on a $f \in C_Y \cap (-C_Y)$. Il reste à montrer que

$$\mu_Y^*(f) = -\mu_Y^*(-f) .$$

Or, d'après le lemme 29, $\mu_Y^*(f) = \lim(\mu_Y^*(f_n))$; comme $(-f_n)$ est une suite décroissante, on a $\mu_Y^*(-f) \leq \lim(\mu_Y^*(-f_n))$; d'où $\mu_Y^*(f) \leq -\mu_Y^*(-f)$. Comme $f + (-f) = 0$, on a toujours $\mu_Y^*(f) + \mu_Y^*(-f) \geq 0$, et donc $\mu_Y^*(f) = -\mu_Y^*(-f)$.

34. Remarque. - Dans 28, 29, 30, on peut éviter de supposer que $X \in \mathcal{S}$, mais il faut alors supposer que les adhérences des graphes des fonctions considérées ne contiennent pas de droite : cela permet en effet d'utiliser, dans les preuves, des sur-graphes de fonctions qui sont des cônes de \mathcal{S} .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BECKER (R.). - Mesures coniques et intégrale de Daniell, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283, 1976, p. 611-614.
- [2] BOURBAKI (N.). - Topologie générale, Chap. 1 et 4, Nouvelle édition. - Paris, Hermann, 1971.
- [3] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1 et 2, 2e édition. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1189 a ; Bourbaki, 115).

- [4] CHOQUET((G.)). - Lectures on analysis, vol. 1-3. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).
- [5] RIESZ (F.) et NAGY(B. Sz.-). - Leçons d'analyse fonctionnelle, 5e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1968.

(Texte reçu le 29 novembre 1976)

Richard BECKER
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05

Référence ajoutée lors de la correction des épreuves (janvier 1977) :

BECKER (R.). - Quelques remarques concernant l'intégrale de Daniell (à paraître).
