Maurice Sion

Dérivation de mesures à valeurs vectorielles

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. nº 13, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A9_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 13, 4 p.

20 février 1975

DÉRIVATION DE MESURES À VALEURS VECTORIELLES

par Maurice SION

Dans la suite, S est un espace abstrait, H est une algèbre de parties de S, et X est un espace topologique vectoriel séparé.

1. Mesure et intégrale.

Etant donné $\tau : H \longrightarrow X$, on définit, pour tout $A \subset S$, $\mu(A) = \int_A d\tau$ par la formule

$$\mu(A) = \lim_{(P,\Delta)} \sum_{\alpha\in\Delta(P)} \tau(\alpha) ,$$

où $P \in \mathcal{O}(A) = \{Q ;\ Q$ est une famille dénombrable, disjointe, d'éléments de H qui recouvre $A\}$, Δ est une fonction sur $\mathcal{O}(A)$ telle que, pour tout $Q \in \mathcal{O}(A)$, $\Delta(Q)$ soit finie, et $\Delta(Q) \subset Q$, et l'on pose $(P , \Delta) \prec (P' , \Delta')$ si P' est plus fine que P, et $\Delta(Q) \subset \Delta'(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{O}(A)$.

THÉORÈME. - *Sous les hypothèses* :

(0) $S \in H_\sigma$,

(1) τ *est simplement additive*,

(2) $\tau[H]$ *est contenu dans un ensemble complet de* X,

(3) $\lim_n \tau(\alpha_n) = 0$ *pour toute suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments disjoints de* H,

on conclut :

(a) $\mu(A) \in X$ *pour tout* $A \subset S$,

(b) μ *est* σ-*additive sur une tribu* $\mathfrak{M}$ *qui contient* H. (*En effet*,

$$\mathfrak{M} = \{A ;\ \mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \text{ pour tout } T \subset S\}$$

et $\mathfrak{M}$ *contient la famille* $\mathfrak{N}$ *des ensembles nuls, c'est-à-dire*

$$\mathfrak{N} = \{A ;\ \mu(B) = 0 \text{ pour tout } B \subset A\} .)$$

(c) *pour tout* $A \subset S$, *on a*

$$\mu(A) = \lim_{B\in H_\sigma, A\subset B} \mu(B)$$

$$= \lim_{B\in H_\sigma, A\subset B} \lim_{\alpha\in H, \alpha\subset B} \tau(\alpha)$$

donc si τ *est* σ-*additive*, μ *est une extension de* τ.

Etant donnés des espaces X_1, X_2,

$$f : S \longrightarrow X_1$$
$$\lambda : H \longrightarrow X_2$$
$$\cdot : X_1 \times X_2 \longrightarrow X ,$$

pour toute fonction de choix $\xi : \alpha \in H \longmapsto \xi_\alpha \in \alpha$, on considère

$$\tau_\xi : \alpha \in H \longmapsto f(\xi_\alpha).\lambda(\alpha)$$

et on définit

$$\int_A f.d\lambda = \int_A d\tau_\xi$$

si celle-ci est indépendante du choix ξ .

2. Fonctions mesurables.

Etant données une tribu $\mathfrak{M}$ (de parties mesurables de S), une sous-famille $\mathfrak{N}$ (d'ensembles de mesure nulle), et $f : S \longrightarrow X$, on définit :

(1) f est partitionable $\Longleftrightarrow$ pour tout voisinage U de 0 dans X , il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ telle que $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $A_0 \in \mathfrak{N}$ et, pour $n \geqslant 1$,

$f[A_n]$ est contenu dans un translaté de U .

(2) f est quasi bornée $\Longleftrightarrow$ pour tout voisinage U de 0 dans X , il existe $S_0 \in \mathfrak{N}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tels que

$$f[S \setminus S_0] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X_n + U) .$$

Remarques. - Quand $X = \mathbb{R}$,

(f est partitionable) $\Longleftrightarrow$ (f est mesurable) .

Quand X = espace de Banach,

(f est partitionable) $\Longleftrightarrow$ (f est mesurable au sens de Bochner) .

Quand X = espace localement convexe muni de la topologie faible,

(f est partitionable) $\Longleftrightarrow$ (f est faiblement mesurable) .

THÉORÈME. - *Quand X est un espace localement convexe,*

(f est partitionable) $\Longleftrightarrow$ (f est quasi borné et faiblement mesurable) .

3. Dérivation.

Etant données une mesure extérieure non négative et bornée λ sur S ($\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ étant respectivement les familles d'ensembles mesurables et d'ensembles de mesure nulle), une mesure σ-additive $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow X$, et une base de dérivation $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire pour chaque $s \in S$, $\mathfrak{F}(s)$ est un filtre de familles

$$F \subset \{\alpha \in \mathfrak{M} ;\ \lambda(\alpha) > 0\} = \mathfrak{M}^+ ,$$

on définit la dérivée $D(s)$ de μ par rapport à λ au point s par

$$D(s) = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}(s)} \text{fermeture} \left\{\frac{\mu(\alpha)}{\lambda(\alpha)} ; \quad \alpha \in F\right\} .$$

Définition. - $\mathfrak{F}$ est une base de Vitali $\Longleftrightarrow$ pour tous $A \subset S$, $\varepsilon > 0$, et $G \subset \mathfrak{M}^+$, si la condition

(*) pour tout $s \in A$ et $F \in \mathfrak{F}(s)$ on a $G \cap F \neq \emptyset$

est satisfaite, alors il existe $G' \subset G$ tel que G' soit dénombrable, disjoint, $(A \setminus \bigcup_{\alpha \in G'} \alpha) \in \mathfrak{N}$ et

$$\sum_{\alpha \in G'} \lambda(\alpha) \leq \lambda(A) + \varepsilon .$$

THÉORÈME. - Sous les hypothèses :

1° X est localement convexe,

2° $\mathfrak{F}$ est une base de Vitali,

3° $\mu \ll \lambda$ (c'est-à-dire $\lambda(\alpha) = 0 \Longrightarrow \mu(\alpha) = 0$)

4° $D(s) \neq \emptyset$ pour tout $s \in S$,

5° D est quasi borné,

on conclut :

(a) pour chaque voisinage U de 0 dans X , il existe $N \in \mathfrak{N}$ tel que, pour $s \in S \setminus N$, $D(s) \subset$ translaté de U .

(b) D est partitionable

(c) $\mu(A) = \int_A D \, d\lambda$ pour $A \in \mathfrak{M}$.

4. Applications.

Pour les applications, on tâche de construire une base de Vitali $\mathfrak{F}$, et on impose des conditions qui garantissent que $D(s) \neq \emptyset$ presque sûrement, la condition 5° étant relativement facile à satisfaire. Par exemple, on demande que l'ensemble

$$M = \left\{\frac{\mu(\alpha)}{\lambda(\alpha)} ; \quad \alpha \in \mathfrak{M}^+\right\}$$

soit pré-compact ou dentable. Le plus souvent on obtient $\mathfrak{F}$ en considérant une suite de partitions de S de plus en plus fines. Le rôle du théorème de relèvement dans ce point de vue est de garantir l'existence d'une base de Vitali dans tous les cas.

On trouvera tous les détails dans [1]. Voir en particulier les références en pages 79 et 121.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SION (Maurice). - A theory of semigroup valued measures. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 355).

(Texte reçu le 10 septembre 1975)

Maurice SION
Dept of Mathematics
University of British Columbia
VANCOUVER, B. C. (Canada)