

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MICHEL TALAGRAND

Sommes vectorielles d'ensembles de mesure nulle

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 12, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A8_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOMMES VECTORIELLES D'ENSEMBLES DE MESURE NULLE

par Michel TALAGRAND

Résumé

Si A et B sont deux sous-ensembles d'un groupe G (noté multiplicativement), la somme vectorielle de A et B est l'ensemble

$$AB = \{ab ; a \in A, b \in B\} .$$

Il s'agit d'étudier, dans un groupe localement compact G , de mesure de Haar m , la mesure de AB , quand $m(A) = m(B) = 0$.

THÉORÈME 1. - Si A et B sont deux sous-ensembles K -sousliniens de G , et si $m(B) = 0$, on a :

$$m(AB) = \sup \{m(PB) ; P \text{ compact parfait contenu dans } A\} .$$

Il n'est pas possible, dans ce résultat, de supposer A ou B seulement m -mesurables. On a toutefois le résultat suivant :

THÉORÈME 2. - Soient G un groupe compact (resp. localement compact abélien), et A un sous-ensemble K -souslinien de G ne contenant aucun compact parfait. Si X est un sous-ensemble de G de mesure nulle, il en est de même de AX et XA .

Ces deux théorèmes montrent le rôle joué par les compacts parfaits. Le théorème 2 admet la réciproque suivante.

THÉORÈME 3. - Soient G un groupe de Lie (resp. localement compact abélien), et A un compact parfait de G . Il existe alors un compact parfait K de G , de mesure nulle, et tel que $\widehat{AK}^0 \neq \emptyset$.

En particulier, si G est métrisable, les seuls sous-ensembles K -sousliniens A de G , tels que

$$(m^*(X) = 0) \implies (m^*(AX) = 0) ,$$

sont les sous-ensembles dénombrables. On a même la réciproque.

THÉORÈME 4. - Soit G un groupe localement compact abélien. Alors G est métrisable si, et seulement si, tout sous-ensemble K -souslinien A de G , tel que

$$(m^*(X) = 0) \implies (m^*(AX)) ,$$

est dénombrable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] TALAGRAND (Michel). - Sommes vectorielles d'ensembles de mesure nulle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 853-855.

(Texte reçu le 5 mai 1975)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université de Paris-VI
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05
