Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michel Talagrand

Sommes vectorielles d'ensembles de mesure nulle

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 12, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A8_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 12, 2 p.

30 janvier 1975

SOMMES VECTORIELLES D'ENSEMBLES DE MESURE NULLE

par Michel TALAGRAND

Résumé

Si A et B sont deux sous-ensembles d'un groupe G (noté multiplicativement), la somme vectorielle de A et B est l'ensemble

$$AB = \{ab \; ; \quad a \in A \; , \quad b \in B\} \; .$$

Il s'agit d'étudier, dans un groupe localement compact G, de mesure de Haar m, la mesure de AB, quand $m(A) = m(B) = 0$.

THÉORÈME 1. - *Si* A *et* B *sont deux sous-ensembles* K-*sousliniens de* G, *et si* $m(B) = 0$, *on a* :

$$m(AB) = \sup \{m(PB) \; ; \quad P \text{ compact parfait contenu dans } A\} \; .$$

Il n'est pas possible, dans ce résultat, de supposer A ou B seulement m-mesurables. On a toutefois le résultat suivant :

THÉORÈME 2. - *Soient* G *un groupe compact* (*resp. localement compact abélien*), *et* A *un sous-ensemble* K-*souslinien de* G *ne contenant aucun compact parfait. Si* X *est un sous-ensemble de* G *de mesure nulle, il en est de même de* AX *et* XA.

Ces deux théorèmes montrent le rôle joué par les compacts parfaits. Le théorème 2 admet la réciproque suivante.

THÉORÈME 3. - *Soient* G *un groupe de Lie* (*resp. localement compact abélien*), *et* A *un compact parfait de* G. *Il existe alors un compact parfait* K *de* G, *de mesure nulle, et tel que* $\widehat{AK}^{\circ} \neq \emptyset$.

En particulier, si G est métrisable, les seuls sous-ensembles K-sousliniens A de G, tels que

$$(m^*(X) = 0) \Longrightarrow (m^*(AX) = 0) \; ,$$

sont les sous-ensembles dénombrables. On a même la réciproque.

THÉORÈME 4. - *Soit* G *un groupe localement compact abélien. Alors* G *est métrisable si, et seulement si, tout sous-ensemble* K-*souslinien* A *de* G, *tel que*

$$(m^*(X) = 0) \Longrightarrow (m^*(AX)) \; ,$$

est dénombrable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] TALAGRAND (Michel). - Sommes vectorielles d'ensembles de mesure nulle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 853-855.

(Texte reçu le 5 mai 1975)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université de Paris-VI
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05