Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gustave Choquet

Sur certaines moyennes associées à un opérateur positif

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. nº 11, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A7_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
14e année, 1974/75, n° 11, 3 p.
23 janvier 1975

SUR CERTAINES MOYENNES ASSOCIÉES A UN OPÉRATEUR POSITIF (*)

par Gustave CHOQUET

Il s'agit d'une suite à une conférence du Séminaire, 1972/73, sur des travaux de CHOQUET-FOÏAS.

Notations. - T est un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(K)$, où K est un compact. On dit qu'il est presque-multiplicatif, et associé à un couple (α , φ), où $\alpha \in \mathcal{C}^+(K)$ et $\varphi \in \mathcal{C}(K , K)$ si, pour toute $f \in \mathcal{C}(K)$, on a

$$(Tf)(x) = \alpha(x)\, f(\varphi(x)) \ , \text{ i. e. } \ T_f = \alpha.(f \circ \varphi) \ .$$

On note

$$\mathcal{S}_n^f = (f + Tf + \ldots + T_f^{n-1})/n \ ; \text{ et } \ \sigma_f = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{S}_n^f \ .$$

On note aussi

$$g_n = (T_1^n)^{1/n} \ ; \quad \gamma = \liminf_{n\to\infty} (g_n) \ ; \quad \Gamma = \limsup_{n\to\infty} (g_n) \ .$$

On désire étudier le comportement des suites $(\mathcal{S}_n^f)$ et (g_n).

Rappels.

THÉORÈME 1.

Si $\inf_n \{T_1^n\} < 1$, la suite des T_1^n converge uniformément vers 0.

Si $\sup_n \{T_1^n\} > 1$, la suite des T_1^n converge uniformément vers $+\infty$.

COROLLAIRE 2.

(1) $\lim_{n\to\infty} [\max g_n] = \sup \gamma = \sup \Gamma$.

(2) $\lim_{n\to\infty} [\min g_n] = \inf \gamma = \inf \Gamma$.

COROLLAIRE 3. - Si $\lim g_n =$ constante, la convergence des g_n est uniforme.

Ces énoncés s'étendent à des $f > 0$ de $\mathcal{C}(K)$, par exemple à cause du fait qu'alors $\liminf (T_f^n)^{1/n}$ et $\limsup (T_f^n)^{1/n}$ sont indépendants de f, donc égales à γ et Γ.

1. Etude des moyennes $\mathcal{S}_n^f$.

THÉORÈME 4. - Pour une $f \geqslant 0$, si les $\mathcal{S}_n^f$ convergent simplement vers une fonction continue $\sigma > 0$, la suite des T^n est équicontinue, et la convergence des

---

(*) Le texte définitif fera l'objet d'une publication aux Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, 1975.

$\mathbb{S}_n^f$ vers σ est uniforme.

Par contre, le cas où σ a des zéros pose le problème suivant.

PROBLÈME 5 (on a pris $f = 1$ pour simplifier). - Existe-t-il un opérateur T tel que la suite des $\mathbb{S}_n^1$ converge de façon non uniforme vers une fonction continue σ ?

En particulier, en existe-t-il un qui soit presque-multiplicatif ?

Les théorèmes existant permettent d'affirmer que, pour un tel T presque-multiplicatif, les faits suivants ont lieu :

(a) La suite des T_1^n n'est pas équi-bornée ,

(b) σ prend la valeur 0 , des valeurs non nulles < 1 , et des valeurs > 1 ,

(c) $\sigma^{-1}(0)$ et son complémentaire sont tous deux T-stables,

(d) Il n'existe aucun voisinage fermé de $\sigma^{-1}(0)$ qui soit T-stable et sur lequel $\sigma < 1$.

Il peut être utile de remarquer qu'un a alors l'identité suivante sur le complémentaire de $\sigma^{-1}(0)$:

$$\mathbb{S}_n^1 = \sigma \mathbb{S}_n^{1/\sigma} \qquad \text{(et partout } \sigma = \alpha.(\sigma \circ \varphi) \text{).}$$

2. Etude des racines $g_n = (T_1^n)^{1/n}$.

C'est un prolongement de l'étude des corollaires 2 et 3.

LEMME 6. - Pour tout $a \in K$, on a :

$\gamma(a) = (\sup \mu_a\text{-essentiel de } \gamma)$, où $\mu_a = \delta_a T$ (plus généralement $\mu_{a,p} = \delta_a T^p$) .

Et pour tout $k \geq 0$, $\{\gamma < k\}$ et $\{\gamma \leq k\}$ sont T-stables.

PROPOSITION 7. - Si γ est s. c. i., alors :

(1) $\gamma = \Gamma$, c'est-à-dire la suite (g_n) converge (limite notée g),

(2) Pour tout $a \in K$, $g(a) = (\sup$ de g sur le support de μ_a et des $\mu_{a,p})$,

(3) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $g_n \leq g + \varepsilon$ pour tout n assez grand.

COROLLAIRE 8. - Si γ est s. c. i. et si toute μ_a a pour support fermé K , γ est constante, et la suite (g_n) converge uniformément vers γ .

Ceci a lieu en particulier si K est fini, bien sûr !

PROPOSITION 9.

(1) On a toujours $T(\gamma f) \leq \gamma Tf$ pour toute $f \geq 0$,

(2) L'égalité sur toute f équivaut à dire que chaque $\{\gamma = k\}$ est T-stable,

(3) Si γ est continue avec $T(\gamma f) = \gamma Tf$ pour toute f, la suite (g_n) converge uniformément vers γ.

Il est faux qu'inversement la convergence uniforme des T^n entraîne l'identité $T(\gamma f) = \gamma Tf$.

THÉOREME 10. - Si T est presque-multiplicatif, et si γ est continue, les g_n convergent uniformément vers γ.

PROBLÈME. - Ceci s'étend-il à tout opérateur T ?

On va apporter trois réponses partielles à ce problème plus général.

LEMME 11. - Si pour des scalaires k_0, $k_1 \geqslant 0$, les ensembles $\{\gamma \geqslant k_1\} = K_1$, $\{\gamma \leqslant k_0\} = K_0$ sont fermés et disjoints (où $k_0 < k_1$), alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$g_n \leqslant (k_0 + \varepsilon) \text{ sur } K_0 \text{ ; } g_n \geqslant (k_1 - \varepsilon) \text{ sur } K_1 \text{ pour tout } n \text{ assez grand.}$$

THÉORÈME 12. - Si γ est continue, et si $\gamma(K)$ est totalement discontinu (par exemple si K est dénombrable), γ est limite uniforme des g_n.

Définition 13. - Soient f, et (f_n) des fonctions numériques sur E topologique. La suite (f_n) "majore" f au point $a \in E$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N et un $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f_n(x) \geqslant (f(a) - \varepsilon)$ pour tous $x \in V$ et $n \geqslant N$.

Définition 14. - Une famille (μ_i) de mesures positives sur K est dite uniformément continue par rapport à une $\mu \geqslant 0$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $k_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout i,

$$\mu_i = \varepsilon_i + \nu_i \text{ , où } \varepsilon_i \text{ , } \nu_i \geqslant 0 \text{ et } \|\varepsilon_i\| < \varepsilon \text{ , } \nu_i \leqslant k_\varepsilon . \mu \text{ .}$$

THÉORÈME 15. - Si γ est s. c. i. et si le support de toute μ_a est la fermeture de son intérieur, la suite (g_n) "majore" γ en tout point de K. Si de plus, γ est continue, les g_n convergent uniformément vers γ.

THÉORÈME 16. - Même conclusion si la condition sur les supports est remplacée par : "La famille des μ_x est uniformément continue par rapport à une μ".

C'est le cas par exemple si les μ_x ont des densités bornées par rapport à μ.

Essentiel du §2. - Les théorèmes 10, 12, 15, 16 apportent des solutions partielles au problème. En outre, la semi-continuité inf de γ entraîne la convergence des g_n.

(Texte reçu le 22 janvier 1975)

Gustave CHOQUET
16 avenue d'Alembert
92160 ANTONY