Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gabriel Debs

Cônes simpliciaux en théorie du potentiel

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 7, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 7, 2 p.
12 décembre 1974

CÔNES SIMPLICIAUX EN THÉORIE DU POTENTIEL

par Gabriel DEBS

(d'après J. BLIEDTNER et W. HANSEN)

On rappelle qu'un cône de fonctions continues sur un espace localement compact est dit simplicial, si le balayage qu'il définit associe à toute mesure ≥ 0 une mesure minimale unique. Le but de cet exposé est de démontrer qu'un certain cône de fonctions surharmoniques est simplicial, et d'exprimer les mesures minimales en termes potentialistes.

Notations :

Y est un espace localement compact à base dénombrable, muni d'une structure d'espace $\mathcal{P}$-harmonique,

H^* le cône des fonctions surharmoniques sur Y,

P le cône des potentiels finis et continus sur Y.

Pour toute partie A de Y, on note :

$b(A)$ l'ensemble des points de Y où A n'est pas mince,

μ^A la mesure balayée (au sens de la théorie du potentiel) de la mesure μ.

Si S est un cône simplicial sur X, les balayées minimales des ε_x, $x \in X$, forment un noyau sur X, qu'on note M^S,

$$\partial_S X = \{x \in X \ ; \ M^S(x, .) = \varepsilon_x\} .$$

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de Y. On considère le cône

$$S(\mathcal{U}) = \{s \in C(\overline{\mathcal{U}}) \ ; \ \exists\, p \in P, \ |s| \leq p/\overline{\mathcal{U}} \text{ et } s \text{ surharmonique sur } \mathcal{U}\},$$

si $\mathcal{U}$ est relativement compact. On obtient ainsi, toutes les fonctions continues sur $\overline{\mathcal{U}}$ et surharmoniques sur $\mathcal{U}$.

THÉORÈME 1. - Le cône $S(\mathcal{U})$ est simplicial, et l'on a :

$$\forall\, p \in P, \quad M^{S(\mathcal{U})} p = \sup\{q \in P \ ; \ q \leq p \text{ et } q/\mathcal{U} \text{ harmonique}\} .$$

COROLLAIRE. - Pour toute partie compacte K de $\partial_{S(\mathcal{U})} \overline{\mathcal{U}}$ et toute fonction continue f sur K, il existe un prolongement continu de f en une fonction harmonique sur $\mathcal{U}$.

Définition. - Soit $A \subset Y$, on note $\beta(A)$ la plus grande partie de $A \cup b(A)$ qui ne soit mince en aucun de ses points.

$$\beta(A) = \bigcup_{C \subset A \cup b(A), C \subset b(C)} C .$$

THEORÈME 2. - $\forall\, p \in P$, $R_p^{\beta(A)} = \sup\{q \in P \ ; \ q \leqslant p \ \text{ et } \ R_q^{\beta(A)} = q\}$.

THÉORÈME 3. - Soient A un fermé de Y et $q \in P$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $R_q^{\beta(A)} = q$,

(ii) $\hat{R}_q^A = q$,

(iii) q/A^c est harmonique.

THÉORÈME 4.

(a) $\forall\, x \in \overline{\mathcal{U}}$, $M^{S(\mathcal{U})}(x\ ,\ .) = \varepsilon_x^{\beta(C\mathcal{U})}$,

(b) $\partial_{S(\mathcal{U})}\overline{\mathcal{U}} = \overline{\mathcal{U}} \cap \beta(C\mathcal{U})$.

THÉORÈME 5. - On a, plus précisément,

$$M(x\ ,\ .) = \begin{cases} \varepsilon_x & \text{si } \ x \in \partial_{S(\mathcal{U})}\overline{\mathcal{U}} \ , \\ \varepsilon_x^{\partial_{S(\mathcal{U})}\overline{\mathcal{U}}} & \text{si } \ x \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \partial_{S(\mathcal{U})}\overline{\mathcal{U}} \ . \end{cases}$$

(Texte reçu le 19 décembre 1974)

Gabriel DEBS
Equipe d'Analyse
Université de Paris-VI
4 place Jussieu, Tour 46
75230 PARIS CEDEX 05