Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

JEAN SAINT RAYMOND

Représentation intégrale dans certains convexes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 2, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 2, 11 p.

7 novembre 1974

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DANS CERTAINS CONVEXES

par Jean SAINT RAYMOND

On expose essentiellement ici les résultats de G. A. EDGAR [2], démontrés avec des méthodes légèrement différentes, et complétés de quelques résultats nouveaux, comme le théorème d'unicité (théorème 18). Si C est un convexe fermé borné d'un espace de Banach séparable E, et si tout sous-convexe fermé de C est dentable (cf. [4]), on démontre que tout point de C est résultante d'une mesure de Radon portée par l'ensemble des points extrémaux de C. Ceci est donc vrai en particulier si C est relativement compact dans E pour une topologie localement convexe moins fine que la topologie de la norme.

On désignera, dans toute la suite, par C un convexe fermé borné d'un espace de Banach séparable E, et par $\mathcal{S}$ le cône des fonctions convexes continues bornées de C dans $\underset{\sim}{R}$. Si μ et ν sont deux mesures positives sur C, on dira que ν est plus diffuse que μ, et on notera $\mu \prec \nu$, si pour tout f de $\mathcal{S}$, on a

$$\int_C f \, d\mu \leq \int_C f \, d\nu .$$

On définit ainsi une relation d'ordre sur le cône $\mathfrak{M}^+(C)$ des mesures positives sur C (cf. [5]) telle que deux mesures comparables ont même masse totale et même barycentre.

THÉORÈME 1. - <u>Toute mesure maximale sur</u> C <u>est portée par l'ensemble des points extrémaux de</u> C.

Soient $\mathcal{E}(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C, et μ une mesure maximale sur C. Puisque $\mathcal{E}(C)$ est un complémentaire d'analytique, il est μ-mesurable. L'application m définie de l'espace polonais $\{(x , y) ; (x , y) \in C \times C , x \neq y\}$ dans C par $m(x , y) = (x + y)/2$ est continue et a pour image $C \setminus \mathcal{E}(C)$. Il existe donc (cf. [3]) deux applications universellement mesurables de $C \setminus \mathcal{E}(C)$ dans C, r_0 et r_1 telles que

$$\forall x \notin \mathcal{E}(C) , \quad r_0(x) \neq r_1(x) \quad \text{et} \quad r_0(x) + r_1(x) = 2x .$$

Si on prolonge r_0 et r_1 par l'identité sur $\mathcal{E}(C)$, on obtient deux applications universellement mesurables de C dans C telles que

$$\forall x \in C , \quad x = (r_0(x) + r_1(x))/2$$

et

$$(x \in \mathcal{E}(C)) \Longleftrightarrow (r_0(x) = r_1(x)) .$$

Si on définit alors

$$\nu = \int_C \frac{1}{2} (\varepsilon_{r_0(x)} + \varepsilon_{r_1(x)}) \, d\mu(x) ,$$

on vérifie immédiatement que $\mu \prec \nu$. De plus, si ψ est une fonction continue strictement convexe, ce qui existe puisque E est séparable, on a :

$$\int \psi \, d\nu - \int \psi \, d\mu = \int_C \left(\frac{1}{2}\left[\psi(r_0(x)) + \psi(r_1(x))\right] - \psi(x)\right) d\mu(x) .$$

Puisque μ est maximale, on a $\mu = \nu$. De plus, puisque ψ est strictement convexe, on a $\psi(r_0(x)) + \psi(r_1(x) \geq 2\psi(x)$ avec inégalité stricte pour tout x non extrémal. Il en résulte que, pour μ-presque tout x , $x \in \mathcal{E}(C)$, ce qui signifie que μ est portée par $\mathcal{E}(C)$.

On peut remarquer que si C ne possède pas de point extrémal, il n'existe aucune mesure maximale non nulle.

LEMME 2. - <u>Soient</u> P <u>un espace polonais, et</u> $(\mu_s)_{s\in S}$ <u>une famille de mesures positives sur</u> P <u>indexées par l'ensemble</u> S <u>des suites finies de nombres entiers. On suppose que, pour tout</u> s <u>de</u> S , <u>on a</u>

$$\mu_s = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{s,n} .$$

<u>Alors il existe une mesure positive</u> λ <u>sur</u> $\Sigma = \underset{\sim}{N}^N$ <u>et une application étroitement borélienne</u> $\sigma \longrightarrow \mu_\sigma$ <u>de</u> Σ <u>dans</u> $\mathfrak{M}_1^+(P)$ <u>telle que</u> :

(i) Pour λ-presque tout σ de Σ , $\lim_{s\prec\sigma} \mu_s/\|\mu_s\| = \mu_\sigma$,

(ii) $\mu_\emptyset = \int_\Sigma \mu_\sigma \, d\lambda(\sigma)$.

Si l'on désigne par Ω_s l'ensemble des suites $\sigma \in \Sigma$ prolongeant s , il existe une mesure de Radon positive unique λ sur Σ telle que

$$\lambda(\Omega_s) = \|\mu_s\|$$

puisque, d'après la positivité des μ_s , on a :

$$\|\mu_s\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{s,n}\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|\mu_{s,n}\| .$$

Il existe une suite croissante (K_n) de compacts de P telle que

$$\mu_\emptyset(P \setminus K_n) \longrightarrow 0 .$$

Comme on a $\mu_s(P - K_n) \leq \|\mu_s\|$, la mesure de Radon λ_n sur Σ , définie par $\lambda_n(\Omega_s) = \mu_s(P - K_n)$, est inférieure à λ , donc absolument continue par rapport à λ . Il en résulte que, pour tout σ n'appartenant pas à un ensemble λ-négligeable H_n de Σ , on a :

$$\varphi_n(\sigma) = \lim_{s\prec\sigma} \frac{\lambda_n(\Omega_s)}{\lambda(\Omega_s)} \text{ existe.}$$

De plus,

$$\int_{\Omega_s} \varphi_n(\sigma) \, d\lambda(\sigma) = \lambda_n(\Omega_s) = \mu_s(P - K_n) .$$

Sur le complémentaire de l'ensemble λ-négligeable $\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$, la suite φ_n est décroissante. Donc

$$\int_\Sigma \left[\inf_n \varphi_n(\sigma)\right] d\lambda(\sigma) = \inf_n \mu_\emptyset(P - K_n) = 0 .$$

Il existe donc un ensemble λ-négligeable H' hors duquel la suite φ_n tend vers 0. Si σ n'appartient pas à H', et si $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $\varphi_n(\sigma) < \varepsilon$. Il existe donc $s < \sigma$ tel que, pour tout t, $s < t < \sigma$, on ait

$$\frac{\mu_t(P - K_n)}{\|\mu_t\|} = \frac{\lambda_n(\Omega_t)}{\lambda(\Omega_t)} < \varepsilon .$$

De plus, il existe $n_1 \geqslant n$ tel que

$$\mu_\emptyset(P - K_{n_1}) < \varepsilon\mu_s(P) .$$

Alors, si $t < \sigma$, on a

$$\frac{\mu_t(P - K_{n_1})}{\|\mu_t\|} \leqslant \frac{\mu_t(P - K_{n_1})}{\|\mu_s\|} \leqslant \frac{\mu_\emptyset(P - K_{n_1})}{\|\mu_s\|} < \varepsilon .$$

Alors, pour tout $t < \sigma$, on a

$$\frac{\mu_t}{\|\mu_t\|}(P - K_{n_1}) < \varepsilon .$$

Ceci signifie que la suite $(\mu_t/\|\mu_t\|)_{t<\sigma}$ vérifie la condition de Prokhorov, donc est étroitement relativement compacte dans $\mathfrak{M}^+(P)$ (cf. [1]), pour tout $\sigma \notin H'$.

Il existe, puisque P est séparable, une suite g_k de fonctions continues bornées sur P, qui sépare les mesures de Radon sur P. Désignons par λ'_k la mesure de Radon sur Σ définie par

$$\lambda'_k(\Omega_s) = \int_P g_k(x)\ d\mu_s(x) .$$

Comme précédemment, il existe un ensemble λ-négligeable H''_k hors duquel

$$\lim_{s<\sigma} \lambda'_k(\Omega_s)/\lambda(\Omega_s)$$

existe. Soit H'' la réunion des H''_k. Si σ est un point de Σ, qui n'appartient ni à H', ni à H'', la famille $(\mu_s/\|\mu_s\|)_{s<\sigma}$ possède au plus une valeur d'adhérence étroite, puisque si ν_1 et ν_2 sont deux valeurs d'adhérence, on aura, pour tout k,

$$\int g_k\ d\nu_1 = \lim \frac{1}{\|\mu_s\|}\int g_k\ d\mu_s = \int g_k\ d\nu_2 .$$

Il en résulte qu'en dehors de $H' \cup H''$, la suite converge étroitement. Il existe donc une application borélienne $\sigma \longmapsto \mu_\sigma$ de Σ dans $\mathfrak{M}^+(P)$ telle que

$$\forall\, \sigma \notin H' \cup H'' , \qquad \mu_\sigma = \lim_{s<\sigma} \mu_s/\|\mu_s\| .$$

Si on désigne par $\sigma|n$ la suite de longueur n que prolonge σ, on a :

$$\int_\Sigma \mu_\sigma\ d\lambda(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \int_\Sigma \frac{\mu_{\sigma|n}}{\|\mu_{\sigma|n}\|}\ d\lambda(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \sum_{|s|=n} \mu_s = \mu_\emptyset .$$

LEMME 3. - <u>Si</u> ν_1, ν_2 <u>et</u> μ <u>sont des mesures de Radon positives sur</u> C, <u>et si</u> $\nu_1 + \nu_2 < \mu$, <u>il existe deux mesures de Radon positives</u> μ_1 <u>et</u> μ_2 <u>sur</u> C, <u>respectivement plus diffuses que</u> ν_1 <u>et</u> ν_2, <u>et de somme</u> μ.

Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_b(C)$ des fonctions continues bornées sur C, la fonction ρ_1 (resp. ρ_2), définie par

$$\rho_1(h) = \nu_1(\inf_{f\in -\mathcal{S}, f\geq h} f) \quad (\text{resp. } \rho_2(h) = \nu_2(\inf_{f\in -\mathcal{S}, f\geq h} f)) ,$$

est sous-linéaire. La forme linéaire μ vérifie

$$\mu(h) \leq \rho_1(h) + \rho_2(h) .$$

Il en résulte qu'il existe deux formes linéaires μ_1 et μ_2 sur $\mathcal{C}_b(C)$ de somme μ telles que

$$\mu_1 \leq \rho_1 \quad \text{et} \quad \mu_2 \leq \rho_2 .$$

Si $h \leq 0$, $\mu_1(h) \leq \rho_1(h) = \nu_1(\inf_{f\in -\mathcal{S}, f\geq 0} f) \leq \nu_1(0) = 0$.

Donc μ_1 (resp. μ_2) est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_b(C)$, c'est-à-dire une mesure de Radon sur le compactifié βC. Comme $\mu_2 \geq 0$, $\mu_1 \leq \mu$; par conséquent, $\beta C \setminus C$, qui est μ-négligeable, est μ_1-négligeable.

Donc μ_1 (resp. μ_2) est une mesure de Radon sur C. De plus, si $f \in \mathcal{S}$,

$$\mu_1(-f) \leq \rho_1(-f) = \nu_1(-f) .$$

Donc $\nu_1 \prec \mu_1$, et de même $\nu_2 \prec \mu_2$.

LEMME 4. - <u>Si</u> $(\nu_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ <u>et</u> μ <u>sont des mesures de Radon positives, et si</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nu_n \prec \mu ,$$

<u>il existe une suite de mesures de Radon</u> (μ_n) <u>de somme</u> μ, <u>telles que</u>

$$\forall\, n \in \underset{\sim}{N} , \qquad \nu_n \prec \mu_n .$$

Définissons $\nu'_n = \sum_{q=n+1}^{\infty} \nu_q$. On définit alors par récurrence des mesures μ_n et μ'_n, de sorte que

$$\nu_n \prec \mu_n \qquad \nu'_n \prec \mu'_n$$

en appliquant le lemme 3 à $\nu'_n = \nu'_{n+1} + \nu_{n+1} \prec \mu'_n$. Comme on a

$$\|\mu'_n\| = \|\nu'_n\| = \sum_{q=n+1}^{\infty} \|\nu_q\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty$$

et

$$\|\mu - \sum_{q=0}^{n} \mu_q\| = \|\mu'_n\| ,$$

il en résulte que

$$\mu = \sum_{q=0}^{\infty} \mu_q .$$

THÉORÈME 5. - <u>Si</u> μ <u>et</u> ν <u>sont deux mesures positives sur</u> C <u>telles que</u> $\nu \prec \mu$, <u>il existe une application étroitement borélienne</u> $x \longmapsto q_x$ <u>de</u> C <u>dans</u> $\mathfrak{M}_1^+(C)$ <u>telle que</u>

pour ν-presque tout x de C, x est barycentre de q_x,

$\mu = \int_C q_x \, d\nu(x)$.

Puisque C est polonais sans point isolé, il existe une application continue bijective φ de $\underset{\sim}{N}^{N}$ sur C. Si g_s est la fonction caractéristique de $\varphi(\Omega_s)$ dans C, g_s est borélienne, et l'on a :

$$g_s = \sum_{n=0}^{\infty} g_{s,n}$$

et donc :

$$g_s.\nu = \sum_{n=0}^{\infty} g_{s,n}.\nu \ .$$

On peut donc construire, pour toute suite finie s d'entiers, par récurrence sur la longueur de s, en utilisant le lemme 4, des mesures μ_s telles que

$$g_s.\nu < \mu_s \quad \text{et} \quad \mu_s = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{s,n} \ .$$

Si λ est la mesure sur $\Sigma = \underset{\sim}{N}^{N}$, définie par

$$\lambda(\Omega_s) = \|\mu_s\| = \|g_s.\nu\| = \nu(\varphi(\Omega_s)) \ ,$$

on voit que ν est l'image de λ par φ. Il résulte du lemme 2 qu'il existe une application étroitement borélienne $\sigma \longmapsto \mu_\sigma$ de Σ dans $\mathfrak{M}_1^+(C)$ telle que

$$\mu = \int_\Sigma \mu_\sigma \, d\lambda(\sigma) \ ,$$

pour λ-presque tout σ de Σ, $\mu_\sigma = \lim_{s<\sigma} \mu_s/\|\mu_s\|$.

L'application φ^{-1} de C dans Σ est borélienne. Il en résulte que l'application

$$x \longmapsto q_x = \mu_{\varphi^{-1}(x)}$$

est borélienne, et que

$$\mu = \int_\Sigma \mu_\sigma \, d\lambda(\sigma) = \int_C q_x \, d\varphi(\lambda)(x) = \int_C q_x \, d\nu(x) \ .$$

De plus, en vertu de la continuité de φ, on a, pour tout σ,

$$\lim_{s<\sigma} \frac{g_s.\nu}{\|g_s.\nu\|} = \varepsilon_{\varphi(\sigma)} \ .$$

et puisque

$$\frac{g_s.\nu}{\|g_s.\nu\|} < \frac{\mu_s}{\|g_s.\nu\|} = \frac{\mu_s}{\|\mu_s\|}$$

on a, pour λ-presque tout σ, $\varepsilon_{\varphi(\sigma)} < \mu_\sigma$, donc, pour ν-presque tout x, $\varepsilon_x < q_x$ ce qui, joint à l'égalité $\mu = \int_C q_x \, d\nu(x)$, donne le résultat cherché.

LEMME 6. - <u>Si</u> ψ <u>est une fonction continue strictement convexe sur</u> E, <u>bornée sur</u> C, <u>si</u> $\nu < \mu$ <u>et si</u> $\int_C \psi \, d\mu = \int_C \psi \, d\nu$, <u>on a</u> $\mu = \nu$.

Si x est un point de E, il existe une forme linéaire continue ℓ telle que

$$\forall \ y \in E \ , \quad \psi(y) \geqslant \psi(x) + \langle \ell \ , y - x \rangle \ .$$

Si $y \neq x$, on a

$$\psi(x) + \psi(y) > 2\psi\left(\frac{x+y}{2}\right) ,$$

$$\psi(y) > -\psi(x) + 2\psi(x) + 2\langle \ell , \frac{x+y}{2} - x\rangle$$
$$> \psi(x) + \langle \ell , y - x\rangle .$$

Donc, si $\varepsilon_x \prec q_x$ et si $q_x \neq \varepsilon_x$, on a

$$q_x(C - \{x\}) > 0$$

et donc

$$\int \psi(y)\, dq_x(y) > \int [\psi(x) + \langle \ell , y - x\rangle]\, dq_x(y)$$
$$> \psi(x) - \langle \ell , x\rangle + \int_C \langle \ell , y\rangle\, dq_x(y)$$
$$> \psi(x) - \langle \ell , x\rangle + \langle \ell , x\rangle = \psi(x) .$$

Il existe, en vertu du théorème 5, une application borélienne $x \longmapsto q_x$ telle que $\mu = \int q_x\, d\nu(x)$ et $\varepsilon_x \prec q_x$ pour ν-presque tout x. On a donc

$$0 = \int \psi\, d\mu - \int \psi\, d\nu = \int [\int \psi\, dq_x - \psi(x)]\, d\nu(x) .$$

Comme pour ν-presque tout x, on a $\int \psi\, dq_x \geq \psi(x)$, il résulte que pour ν-presque tout x, on a $\int \psi\, dq_x = \psi(x)$, ce qui entraîne $q_x = \varepsilon_x$. Donc

$$\mu = \int_C q_x\, d\nu = \int_C \varepsilon_x\, d\nu = \nu .$$

LEMME 7. - Si μ est une mesure positive sur C portée par les points extrémaux, μ est maximale.

Si ν est une mesure plus diffuse que μ, il existe une application $x \longmapsto q_x$ borélienne telle que

$$\nu = \int q_x\, d\mu \quad \text{et} \quad \varepsilon_x \prec q_x \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x .$$

Pour μ-presque tout x, x est extrémal, et $\varepsilon_x \prec q_x$ entraîne que $q_x = \varepsilon_x$. On a donc

$$\nu = \int q_x\, d\mu = \int \varepsilon_x\, d\mu = \mu .$$

ce qui prouve que μ est maximale.

LEMME 8. - Si $(\mu_i)_{i\in I}$ est une famille totalement ordonnée pour la diffusion de mesures positives sur C, il existe une suite croissante cofinale dans la famille.

Il existe une fonction ψ continue strictement convexe sur E, bornée sur C, puisque E est séparable. Puisque les μ_i ont toutes même masse totale, les intégrales $\int \psi\, d\mu_i$ sont bornées. Il existe donc une suite croissante $i_n \in I$ telle que

$$\int \psi\, d\mu_{i_n} > \sup_{i\in I} \int \psi\, d\mu_i - 2^{-n} .$$

S'il existe un $i_\infty \in I$ tel que $\int \psi\, d\mu_{i_\infty} = \sup_{i\in I} \int \psi\, d\mu_i$, il résulte du lemme 6 que μ_{i_∞} est le plus grand élément de la famille, et la suite constante (μ_{i_∞}) est cofinale. Sinon la suite (μ_{i_n}) est cofinale dans $(\mu_i)_{i\in I}$.

LEMME 9. - <u>Soit (μ_n) une suite croissante pour la diffusion de mesures positives sur C. Il existe un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \lambda)$, une suite $(\mathcal{T}_n)$ croissante de tribus, de borne supérieure $\mathcal{T}$, et une suite (π_n) d'applications $\mathcal{T}_n$-mesurables de X dans C, telles que</u>

$$\mu_n \text{ est l'image de } \lambda \text{ par } \pi_n$$

$$\forall S \in \mathcal{T}_n , \qquad \int_S \pi_{n+1}\, d\lambda = \int_S \pi_n \, d\lambda .$$

Posons $X = C^{\mathbb{N}}$; $\mathcal{T}$ sera la tribu de Borel de $C^{\mathbb{N}}$, et $\mathcal{T}_n$ la tribu engendrée par les n premières applications coordonnées $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ de X dans C.

Il existe, d'après le théorème 5, des applications boréliennes $x \longmapsto q_x^{(n)}$ de C dans $\mathcal{M}_1^+(C)$ telles que

$\mu_{n+1} = \int q_x^{(n)}\, d\mu_n(x)$,

pour μ_n-presque tout x, $\varepsilon_x < q_x^{(n)}$.

On construit alors par récurrence, pour tout n, une mesure λ_n sur C^n, en posant

$$\lambda_1 = \mu_1 , \quad \lambda_{n+1} = \int_{C^n} (\varepsilon_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \otimes q_{x_n}^{(n)})\, d\lambda_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

La projection de λ_{n+1} sur le produit des n premiers facteurs C est égale à λ_n. De plus, la projection de λ_{n+1} sur le $(n+1)^e$ facteur C est égale à μ_{n+1}. On le démontre par récurrence : C'est immédiat pour $n = 0$.

Si cette propriété est vraie pour λ_n la $(n+1)^e$ projection de λ_{n+1} vaut

$$\int_{C^n} q_{x_n}^{(n)}\, d\lambda_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_C q_{x_n}^{(n)}\, d\mu_n(x_n) = \mu_{n+1} .$$

Le système (C^n, λ_n) forme donc un système projectif, de limite projective $(C^{\mathbb{N}}, \lambda)$. Nous désignerons par p_n la projection de $C^{\mathbb{N}}$ sur C^n, produit des n premiers facteurs. On a alors

$$p_n(\lambda) = \lambda_n ,$$

$$\pi_n(\lambda) = \mu_n .$$

De plus, si S appartient à $\mathcal{T}_n$, il existe S_1 borélien de C^n tel que $S = p_n^{-1}(S_1)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_S \pi_{n+1}\, d\lambda &= \int_{S_1 \times C} x_{n+1}\, d\lambda_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\
&= \int_{S_1 \times C} x_{n+1} \Big[\int_{C^n} (\varepsilon_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \otimes q_{x_n}^{(n)})\, d\lambda_n(x_1, x_2, \ldots x_n)\Big] \\
&= \int_{S_1} \Big[\int x_{n+1}\, dq_{x_n}^{(n)}(x_{n+1})\Big]\, d\lambda_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= \int_{S_1} x_n \, d\lambda_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_S \pi_n\, d\lambda .
\end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré.

THÉORÈME 10. - <u>Si C possède la propriété de Radon-Nikodym (c'est-à-dire si tout</u>

sous-convexe fermé de C possède des tranches de diamètre arbitrairement petit), et si (μ_n) est une suite croissante pour la diffusion de mesures positives sur C, la suite (μ_n) converge étroitement vers une mesure μ qui est la borne supérieure de la suite.

Puisque C possède la propriété de Radon-Nikodym, on peut appliquer le théorème des martingales à la suite (π_n) construite dans le lemme 9. Il en résulte que pour λ-presque tout $\xi \in X$, $(\pi_n(\xi))_n$ converge dans C. Si f est une fonction continue bornée sur C, et si $\pi(\xi) = \lim_{n\to\infty} \pi_n(\xi)$, on a

$$\int_C f \, d\mu_n = \int_X f \circ \pi_n \, d\lambda \longrightarrow \int_X f \circ \pi \, d\lambda = \int_C f \, d(\pi(\lambda)) .$$

Soit μ la mesure image de λ par π. Il résulte de ce qui précède que μ est limite étroite des μ_n. Puisque $\mu_n \prec \mu_{n+p}$, on a

$$\mu_n \prec \lim \mu_{n+p} = \mu$$

et aussi, si $\forall n$, $\mu_n \prec \mu'$,

$$\mu = \lim_n \mu_n \prec \mu' .$$

La mesure μ est donc limite étroite et borne supérieure des μ_n.

LEMME 11. - L'ordre de diffusion sur $\mathfrak{M}^+(C)$ est inductif si C possède la propriété de Radon-Nikodym.

Ceci résulte immédiatement du lemme 8 et du théorème 10.

THÉORÈME 12. - Toute mesure positive sur un convexe fermé borné d'un espace de Banach séparable est moins diffuse qu'une mesure portée par les points extrémaux, si le convexe possède la propriété de Radon-Nikodym.

Sous les mêmes hypothèses, tout point du convexe est barycentre d'une mesure portée par l'ensemble des points extrémaux.

Le théorème résulte immédiatement du lemme 11 et du théorème 1. La seconde assertion est l'application de la première à la mesure ε_x.

COROLLAIRE 13. - Un convexe fermé borné dans un espace de Banach séparable est enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux quand il possède la propriété de Radon-Nikodym.

Dans la suite, C désignera toujours un convexe fermé de l'espace de Banach séparable E, qui possède la propriété de Radon-Nikodym, en sorte qu'on pourra appliquer le théorème 12 qui affirme l'existence de représentations intégrales dans C.

LEMME 14. - Si aucun point de C n'est barycentre de plus d'une mesure maximale sur C, le cône Γ engendré par $C \times \{1\}$ dans $E \times \underline{R}$, est réticulé.

En vertu du théorème 12, l'application R de $\mathfrak{M}^+(\mathcal{E}(C))$ dans Γ, qui à une mesure μ associe $(\int_C x\, d\mu(x)\,,\, \|\mu\|)$, est surjective. L'hypothèse du lemme fait que R est injective. Alors R est un isomorphisme d'ordre, et puisque $\mathfrak{M}^+(\mathcal{E}(C))$ est réticulé, il en est de même de Γ.

LEMME 15. - <u>Si le cône</u> Γ <u>engendré par</u> $C \times \{1\}$ <u>dans</u> $E \times \underset{\sim}{R}$ <u>est réticulé, si</u> μ_1 <u>et</u> μ_2 <u>sont deux mesures discrètes sur</u> C <u>de masse</u> 1 <u>et de même barycentre, il existe une mesure discrète</u> μ <u>sur</u> C <u>plus diffuse que</u> μ_1 <u>et que</u> μ_2.

Supposons que μ_1 et μ_2 s'écrivent

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i^1\, \varepsilon_{x_i}$$

$$\mu_2 = \sum_{j=1}^{p} c_j^2\, \varepsilon_{y_j}$$

Alors, si a est le barycentre commun de μ_1 et μ_2, on a, dans le cône Γ,

$$(a\,,\,1) = \sum_{i=1}^{n} (c_i^1\, x_i\,,\, c_i^1) = \sum_{j=1}^{p} (c_j^2\, y_j\,,\, c_j^2)\,.$$

Puisque Γ est réticulé, le lemme de décomposition de Riesz donne l'existence d'éléments $(z_{i,j}\,,\, d_{i,j})$ de Γ tels que

$$\forall\, i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n\,,\quad (c_i^1\, x_i\,,\, c_i^1) = \sum_{j=1}^{p} (z_{i,j}\,;\, d_{i,j})\,,$$

$$\forall\, j = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,p\,,\quad (c_j^2\, y_j\,,\, c_j^2) = \sum_{i=1}^{n} (z_{i,j}\,;\, d_{i,j})\,.$$

On a alors

$$\forall\, i\,,\qquad \varepsilon_{x_i} \prec \sum_{j=1}^{p} d_{i,j}/c_i^1\; \varepsilon_{z_{i,j}/d_{i,j}}\,,$$

$$\forall\, j\,,\qquad \varepsilon_{y_j} \prec \sum_{i=1}^{n} d_{i,j}/c_j^2\; \varepsilon_{z_{i,j}/d_{i,j}}\,.$$

On voit alors que la mesure discrète

$$\mu = \sum_{i,j} d_{i,j}\; \varepsilon_{z_{i,j}/d_{i,j}}$$

est plus diffuse à la fois que les mesures μ_1 et μ_2.

LEMME 16. - <u>Si</u> μ <u>est une mesure positive sur</u> C, <u>il existe une suite</u> (μ_n) <u>de mesures discrètes moins diffuses que</u> μ <u>qui converge étroitement vers</u> μ.

Puisque C est séparable, il existe pour tout n un recouvrement dénombrable de C par des boules fermées $(A_k)_{k \in \underset{\sim}{N}}$ de rayon 2^{-n}. Si g_k est la fonction caractéristique de

$$(A_k \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j) \cap C\,,$$

on a

$$\|\mu\| = \int_C (\sum_0^\infty g_k)\, d\mu = \sum_0^\infty \int g_k\, d\mu\,.$$

Il existe donc $q \in \underset{\sim}{N}$ tel que $\sum_q^\infty \int g_k\, d\mu < 2^{-n}$. Si on pose

$$\text{pour } k < q , \qquad a_k = \int_C x\, g_k\, d\mu \; ; \quad \lambda_k = \int_C g_k\, d\mu$$

$$a_q = \int_C x(\textstyle\sum_q^\infty g_k)\, d\mu \; ; \quad \lambda_q = \sum_q^\infty \int g_k\, d\mu$$

$$\mu_n = \textstyle\sum_{k=0}^q \lambda_k\, \varepsilon_{a_k/\lambda_k}$$

en donnant la valeur 0 aux termes tels que $\lambda_k = 0$, la mesure μ_n est discrète, portée par C , et de même masse que μ . On voit aisément que

$$\lambda_k\, \varepsilon_{a_k/\lambda_k} \prec g_k . \mu \qquad \text{si } k < q$$

$$\lambda_q\, \varepsilon_{a_q/\lambda_q} \prec (\textstyle\sum_q^\infty g_k) . \mu$$

donc que

$$\mu_n \prec \textstyle\sum_0^\infty g_k . \mu = \mu \; .$$

Soit maintenant h une fonction continue bornée sur C . Désignons par h_n la fonction sur C qui vaut

$$h_n(x) = h(a_k/\lambda_k) \quad \text{si} \quad x \in A_k \setminus \textstyle\bigcup_{j<k} A_j \; , \qquad k < q$$

$$h_n(x) = h(a_q/\lambda_q) \quad \text{si} \quad x \notin \textstyle\bigcup_{k=0}^{q-1} A_k \; .$$

On voit que

$$\int h\, d\mu_n = \int h_n\, d\mu \; .$$

Comme

$$\|x - a_k/\lambda_k\| \leq 2^{1-n} \quad \text{si} \quad x \in A_k - \textstyle\bigcup_{j<k} A_j \; ; \quad k < q$$

et que

$$\mu(C - \textstyle\bigcup_0^{q-1} A_k) < 2^{-n} \; ,$$

il résulte de la continuité de h que $h_n(x) \longrightarrow h(x)$ pour μ-presque tout x , ce qui entraîne, puisque $\sup_{n,x} |h_n(x)| < \infty$,

$$\int h(x)\, d\mu_n(x) = \int h_n(x)\, d\mu(x) \longrightarrow \int h(x)\, d\mu(x)$$

donc que (μ_n) converge étroitement vers μ , et établit le lemme.

LEMME 17. - Si μ' et μ'' sont deux mesures positives sur C de même masse et de même barycentre, et si C est un simplexe, il existe une mesure positive μ plus diffuse à la fois que μ' et que μ'' .

Il existe, d'après le lemme 16, des mesures μ'_n et μ''_n moins diffuses respectivement que μ' et μ'' , qui convergent étroitement vers μ' et μ'' . Puisque C est un simplexe, le cône Γ , engendré par $C \times \{1\}$ dans $C \times \underline{R}$, est réticulé, ce qui permet, en utilisant le lemme 15, de construire par récurrence une suite (μ_n) de mesures discrètes telles que

$$\mu_n \prec \mu_{n+1} \; ; \quad \mu'_{n+1} \prec \mu_{n+1} \; ; \quad \mu''_{n+1} \prec \mu_{n+1} \; .$$

La suite (μ_n) est alors croissante pour l'ordre de diffusion, donc converge vers une mesure μ , d'après le théorème 10. Puisque l'on a, pour tout n , $\mu'_n \prec \mu_n \prec \mu$ et que $\mu' = \lim \mu'_n$, on a $\mu' \prec \mu$ et de même $\mu'' \prec \mu$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME 18. - Soient E un espace de Banach séparable, et C un convexe fermé borné de E possédant la propriété de Radon-Nikodym. Pour que C soit un simplexe, il faut et il suffit que tout point de C soit barycentre d'une seule mesure maximale.

Pour que C soit un simplexe, il faut et il suffit que le cône engendré par $C \times \{1\}$ dans $E \times \underset{\sim}{R}$ soit réticulé. Compte tenu du lemme 14, il reste uniquement à démontrer que si C est un simplexe, il existe une seule mesure maximale de barycentre donné. S'il en existait deux, μ' et μ'' , il résulterait du lemme 17 qu'il existe une mesure μ plus diffuse que μ' et μ'' . Par l'hypothèse de maximalité de μ' et μ'' , on aurait

$$\mu' = \mu = \mu'' ,$$

ce qui démontre le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Intégration. Chapitre 9 : Intégration sur les espaces topologiques séparés. - Paris, Hermann, 1969 (Act. scient. et ind., 1343 ; Bourbaki, 35).

[2] EDGAR (G. A.). - A noncompact Choquet theorem (Preprint).

[3] von NEUMANN (J.). - On rings of operators. Reduction theory, Annals of Math., Series 2, t. 50, 1949, p. 401-485.

[4] PHELPS (R.). - Dentability and extreme points in Banach spaces (Preprint).

[5] SAINT RAYMOND (J.). - Séparation des mesures de Radon sur un convexe par les fonctions convexes continues bornées, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 13e année, 1973/74, Communication n° 1, 2 p.

(Texte reçu le 22 janvier 1975)

Jean SAINT RAYMOND
Mathématiques, Tour 46
Université de Paris-VI
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05