Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Paulette Saab

Sur les cônes convexes topologiques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. nº C6, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A21_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, Communication n° 6, 2 p.

Février 1975

SUR LES CÔNES CONVEXES TOPOLOGIQUES

par Paulette SAAB

Nous donnons une démonstration simple d'un théorème de PAZMAN [2] concernant les cônes convexes topologiques.

Définition 1. - Un cône convexe abstrait est un demi-groupe abélien $(X , +)$, d'élément neutre 0_x, muni d'une loi de composition externe : $(\lambda , x) \longrightarrow \lambda . x$ de $\mathbb{R}_+ \times X$ dans X telle que, pour tout x et y dans X, tout λ et tout μ dans $\mathbb{R}_+$, on ait :

1° $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

2° $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

3° $1.x = x$,

4° $\lambda(\mu.x) = (\lambda\mu).x$,

5° $0.x = 0_x$.

Définition 2. - On appelle cône convexe topologique tout cône convexe abstrait muni d'une topologie telle que les deux applications canoniques de $X \times X$ dans X et de $\mathbb{R}_+ \times X$ dans X soient continues.

Définition 3. - Un cône convexe abstrait est dit régulier si, pour tous x, a et b dans X, $(x + a = x + b)$ implique que $a = b$.

THÉORÈME 3 [1]. - Un cône convexe abstrait est régulier si, et seulement si, il est isomorphe à un sous-cône convexe d'un espace vectoriel réel.

THÉORÈME 4. - Tout cône convexe topologique séparé est régulier.

En effet, soient x, a et $b \in X$ tels que

(1) $$x + a = x + b .$$

(1) implique que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus (0)$, $x + na = x + nb$, d'où

$$\frac{x}{n} + a = \frac{x}{n} + b$$

et

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{x}{n} + a) = a = \lim_{n\to\infty}(\frac{x}{n} + b) = b ,$$

donc $a = b$.

Les théorèmes 3 et 4 impliquent que tout cône convexe topologique séparé est en fait plongeable dans un espace vectoriel réel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGGERI (J. C.) et LESCARRET (C.). - Généralités sur les cônes convexes, Séminaire d'analyse convexe, Montpellier 1972.

[2] PAZMAN (Andrej). - Mixture sets and convex sets, Matematicky Časopis, t. 22, 1972, p. 148-155.

(Texte reçu le 17 avril 1975)

Paulette SAAB
15 rue d'Ulm
75005 PARIS