Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Richard Becker

Mesures coniques et espaces de Baire

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° C5, p. C1-C8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A20_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, Communication n° C5, 8 p.

13 mars 1975

MESURES CONIQUES ET ESPACES DE BAIRE

par Richard BECKER

1. Préliminaires.

1.1. Introduction. - Ce travail a pour objet d'étudier des propriétés du type "espace de Baire" que peut posséder l'ensemble des mesures coniques ([1], 30.3) sur un e. l. c. s. faible.

Parmi les espaces de Baire, les espaces tamisables ([5], §I.3.3,5) forment une classe remarquable comprenant les espaces localement compacts ou métrisables complets et stable par produit.

Tout au long de ce travail, nous retrouverons l'analogue de ces différentes classes : cas des cônes saillants faiblement complets (classe $\mathcal{S}$) et qui sont limites projectives d'une suite de cônes localement compacts (classe $\mathcal{S}_D$ [2], p. 2), cas des cônes métrisables de $\mathcal{S}$ (classe $\mathcal{S}_M$) , cas des espaces R^I .

1.2. Plan. - Nous aborderons successivement le cas des cônes localement compacts qu'il est simple de présenter dans un cadre général abstrait (partie II), ensuite le cas des classes $\mathcal{S}_D$ et $\mathcal{S}_M$ (partie III) puis le cas des espaces R^I (partie IV). Nous terminerons (partie V) en donnant deux résultats concernant le cas général des éléments de la classe $\mathcal{S}$.

Pour toute partie A d'un ensemble ordonné, on note $\mathrm{Maj}(A)$ l'ensemble des éléments majorant au moins un élément de A , et $\mathrm{Max}(A)$ l'ensemble des éléments maximaux de $\mathrm{Maj}(A)$.

2. Compacts ordonnés ; cas de l'ordre de Choquet.

Soit K un espace compact muni d'une relation d'ordre notée $\prec$.

LEMME 1. - Lorsque pour tout $x_0 \in K$, l'ensemble $(x : x_0 \prec x)$ est fermé, tout élément de K est majoré par un élément maximal.

Nous admettrons ce lemme facile.

LEMME 2. - Lorsque le graphe de $\prec$ est un fermé de $K \times K$ alors, $\forall z \in \mathrm{Max}(K)$, pour tout ouvert $V \ni z$, il existe un voisinage W de z tel que $\mathrm{Maj}(W) \subset V$.

Preuve. - Au cas contraire, $\forall W$ voisinage de z , $\exists x_W \in W$ et $y_W \notin V$ tels que $x_W \prec y_W$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des parties $\mathfrak{F}_W = \{x_{W'} ;\ W'$ voisinage de z , $W' \subset W\}$; on a $z = \lim_{\mathcal{U}}(x_W) \prec \lim_{\mathcal{U}}(y_W) \notin V$ puisque V est ouvert ; d'où contradiction, z étant maximal.

COROLLAIRE 3. - Lorsque le graphe de $\prec$ est un fermé de $K \times K$, l'espace $\mathrm{Max}(K)$ est fortement tamisable.

Preuve. - Soit V un ouvert non vide de $\mathrm{Max}(K)$; on dira que l'ouvert $W \subset V$ est fortement contenu dans V, et on notera $W \sqsubset V$, lorsque W est non vide, et $\mathrm{Max}(\overline{W}) \subset V$, où $\overline{W}$ désigne l'adhérence de W prise dans K.

On a bien ainsi défini un tamis fort ; si $V_1 \sqsupset V_2 \sqsupset \dots \sqsupset V_n \sqsupset V_{n+1} \sqsupset \dots$, on a $\bigcap (\overline{V}_n) \neq \emptyset$ par compacité ; soit $x \in \bigcap (\overline{V}_n)$ et $y \in \mathrm{Max}(K)$ avec $x \prec y$; $\forall\ n \geq 1$, on a $x \in \overline{V}_{n+1}$, d'où $y \in V_n$.

Soit alors X un convexe compact contenu dans un e. l. c. s. ; en prenant pour K l'ensemble $M_1^+(X)$ des mesures ≥ 0 de masse 1 sur X, muni de l'ordre de Choquet ([6], page 24), on a, d'après le corollaire 3, le résultat suivant.

PROPOSITION 4. - L'espace des éléments maximaux de $M_1^+(X)$ est fortement tamisable pour la topologie vague.

Cet énoncé peut aussi s'exprimer en langage de cône localement compact ([6], page 98) ; c'est sous cette forme que nous allons chercher à l'étendre.

3. Cas des classes $\mathcal{S}_D$ et $\mathcal{S}_M$.

Soit $X \in \mathcal{S}$ un cône $\subset E$ e. l. c. s. ; notons $M^+(X)$ le cône des mesures coniques ≥ 0 sur X ([1], 30.5) ordonné par l'ordre de Choquet noté $\prec$ ([1], 30.11) et muni de la topologie $\sigma(M^+(X)\ ,\ h(E))$, où $h(E)$ désigne l'espace vectoriel réticulé de fonctions sur E engendré par E', dual de E ([1], 30.1).

$M^+(X)$ n'est autre que le cône des formes ≥ 0 sur l'espace $h(E)$ ordonné par l'ordre usuel des fonctions sur X.

L'énoncé suivant, qui concerne la classe $\mathcal{S}$ dans son ensemble, nous sera fort utile, et est à rapprocher du lemme 2.

LEMME 5. - Soit $X \in \mathcal{S}$, et soit $\mu \in M^+(X)$ un élément maximal pour $\prec$; pour tout ouvert V de $M^+(X)$ contenant μ, il existe un voisinage W de μ tel que $\mathrm{Maj}(W) \subset V$.

Preuve. - Au cas contraire, $\forall\ W$ voisinage de μ, $\exists\ \mu_W \in W$ et $\nu_W \notin V$ avec $\mu_W \prec \nu_W$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des parties

$$\mathcal{F}_W = \{\nu_{W'}\ ;\ W' \text{ voisinage de } \mu\ ,\ W' \subset W\}\ ;$$

on a $\mu_W \prec \nu_W$, d'où $\forall\ \ell \in E'$, $\lim_{\mathcal{U}}(\nu_W(\ell)) = \lim_{\mathcal{U}}(\mu_W(\ell)) = \mu(\ell)$; comme $h(E)$ est positivement engendré et que tout élément de $h(E)$ est majoré sur X par un élément de E' ([1], 30.13), l'expression $\lim_{\mathcal{U}}(\nu_W)$ existe donc au sens $\sigma(M^+(X)\ ,\ h(E))$, et on a $\mu \prec \lim_{\mathcal{U}}(\nu_W) \notin V$, ce qui est une contradiction car μ est maximale.

<u>Remarque</u> 6. - Les énoncés ci-dessous sont équivalents : (α désigne un cardinal et $X \in \mathbb{S}$) :

(0 admet dans X , muni de $\sigma(E , E')$, une base de voisinages ayant pour puissance α) ;

(E' admet une partie cofinale ayant pour puissance α),

(X est limite projective d'une famille de cardinal α , de cônes localement compacts) ;

(0 admet dans $M^+(X)$, muni de $\sigma(M^+(X) , h(E))$, une base de voisinages ayant pour puissance α).

On a donc $(X \in \mathbb{S}_D) \Longrightarrow (M^+(X) \in \mathbb{S}_D)$, et G. CHOQUET a prouvé que tout élément de $\mathbb{S}_D$ est fortement tamisable.

PROPOSITION 7. - <u>Soit</u> $X \in \mathbb{S}_D$; <u>l'espace</u> $\mathrm{Max}^+(X)$ <u>des mesures coniques</u> $\geqslant 0$, <u>et maximales sur</u> X , <u>est fortement tamisable pour</u> $\sigma(M^+(X) , h(E))$.

<u>Preuve</u>. - Soit $(\ell_1 , \ell_2 , \dots , \ell_n)$ une suite cofinale dans E' d'éléments $\geqslant 0$ sur X . Définissons un tamis fort : si V est un ouvert non vide de $\mathrm{Max}^+(X)$, on dira que l'ouvert non vide $W \subset V$ est fortement contenu dans V (et on notera $W \sqsubset V$) lorsque $\mathrm{Max}(\overline{W}) \subset V$ ($\overline{W}$ est prise dans $M^+(X)$) et que

1° Si $\forall\, n \geqslant 1$, $\ell_n(V)$ est non borné dans R^+ , alors $\ell_1(W)$ est borné.

2° Si $\exists\, n \geqslant 1$ avec $\ell_p(V)$ borné, $\forall\, p \in [1 , n]$, et $\ell_{n+1}(V)$ non borné, alors $\ell_{n+1}(W)$ est borné.

Pour prouver que ceci définit un tamis fort, on raisonne comme pour le corollaire 3 ; il suffit donc de prouver que, pour toute suite (V_n) telle que

$$V_1 \sqsupset V_2 \sqsupset \dots \sqsupset V_n \sqsupset V_{n+1} \sqsupset \dots \quad \text{alors} \quad \bigcap (\overline{V}_n) \neq \emptyset$$

($\overline{V}_n$ est prise dans $M^+(X)$). En fait, $\forall\, n \geqslant 1$, soit $\mu_n \in V_n$; soit également $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur N ; $\lim_{\mathcal{U}}(\mu_n)$ existe au sens $\sigma(M^+(X) , h(E))$, et définit un élément de $M^+(X)$ appartenant à tous les $\overline{V}_n$; cela résulte de la propriété de domination de E' rappelée au cours de la preuve du lemme 5. Notons que $\bigcap (\overline{V}_n)$ est un compact.

Nous allons examiner maintenant le cas des cônes de $\mathbb{S}_M$; ces cônes sont également séparables ([2], th. 6) et jouissent de propriétés remarquables ([2], th. 3) ; en particulier, les mesures coniques qu'ils portent sont localisables ([1], 30.17, 18).

Nous aurons besoin de la remarque suivante.

LEMME 8. - <u>Soient</u> X <u>un cône convexe contenu dans un espace vectoriel</u> E , $Y \subset E^*$ <u>un cône convexe d'éléments</u> $\geqslant 0$ <u>sur</u> X <u>qui sépare les points de</u> X <u>et</u> $x , y \in (X \setminus 0)$ <u>tels que</u> $\nexists\, k > 0$ <u>avec</u> $y = kx$; <u>alors pour tous scalaires</u> a , b , <u>il existe</u> $\ell \in (Y - Y)$ <u>tel que</u> $\ell(x) = a$, $\ell(y) = b$.

<u>Preuve</u>. - $\exists\, \ell_1 \in Y$ telle que $\ell_1(x) \neq \ell_1(y)$; soit $\ell_2 \in Y$ séparant $\ell_1(x)y$ et $\ell_1(y)x$; on prendra pour ℓ une combinaison de ℓ_1 et ℓ_2 en remarquant que $\ell_1(y)\,\ell_2(x) - \ell_1(x)\,\ell_2(y) \neq 0$.

D'après une version du théorème de STONE-WEIERSTRASS ([3], page 137), et le lemme précédent, on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 9. - <u>Soient</u> $X \in \mathcal{S}$ <u>et</u> F <u>un sous-espace vectoriel de</u> E' , <u>positivement engendré</u>, <u>qui sépare les points de</u> X . <u>Pour tout compact</u> (<u>faible</u>) $K \subset X$ <u>et toute fonction</u> f , <u>définie et continue sur</u> K , <u>les énoncés suivants sont équivalents</u>

1° f <u>est adhérente au treillis engendré par</u> $(F)|_K$ <u>pour la topologie de la convergence uniforme sur</u> K .

2° $\forall\, x , y \in K$ <u>avec</u> $y = kx$, $k \geq 0$, <u>on a</u> $f(y) = kf(x)$.

Nous aurons également besoin du lemme suivant, qui permettrait de démontrer le théorème 3 de [2].

LEMME 10. - <u>Soit</u> $X \in \mathcal{S}_M$; <u>il existe une suite d'éléments</u> ≥ 0 <u>de</u> E' <u>qui sépare les points de</u> X .

<u>Preuve</u>. - D'après le théorème 6 de [2], la topologie de X admet une base dénombrable (ω_n) ; si $x \neq y$, soit $\ell \geq 0$ dans E' qui sépare x et y ; ℓ sépare également deux éléments $\omega_p \ni x$ et $\omega_q \ni y$ de la base (ω_n) . Il suffit donc de choisir, pour tout couple ω_p et ω_q , pouvant être séparés par un élément ≥ 0 de E' , une forme $\ell_{p,q} \geq 0$ de E' qui les sépare.

Cette technique, indiquée par MOKOBODZKY, est analogue à celle utilisée en [5], §I.2.1, prouvant que tout espace régulier à base dénombrable est métrisable.

THÉORÈME 11. - <u>Pour tout</u> $X \in \mathcal{S}_M$, <u>on a</u> $M^+(X) \in \mathcal{S}_M$.

<u>Preuve</u>. - Soit $Y \subset E'$ un Q-espace vectoriel dénombrable, positivement engendré, cofinal pour E' , et séparant les éléments de X ; soit $\tilde{Y}$ le sous-treillis de h(E) engendré par Y ; $\tilde{Y}$ est un Q-espace vectoriel dénombrable ([1], 30.2).

Munissons $M^+(X)$ de la structure uniforme métrisable, associée aux écarts $d_f = |\lambda(f) - \mu(f)|$, où f décrit $\tilde{Y}$, λ , $\mu \in M^+(X)$. Montrons que cette structure uniforme $S(\tilde{Y})$ rend $M^+(X)$ complet, et induit la topologie $\sigma(M^+(X) , h(E))$. Pour cela, il suffit de prouver que tout filtre $\mathfrak{F}$, de Cauchy pour $S(\tilde{Y})$, converge, vers un élément unique, au sens $\sigma(M^+(X) , h(E))$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que $\mathfrak{F}$; comme $\tilde{Y}$ est cofinal dans h(E) , pour toute $g \in h(E)$ l'expression $\lim_{\mathcal{U}}(g)$ existe et définit un élément de $M^+(X)$ vers lequel $\mathcal{U}$ converge au sens $\sigma(M^+(X) , h(E))$. Il reste à voir que la topologie induite par $S(\tilde{Y})$ sur $M^+(X)$

est séparée ; cela résulte de la proposition 9 et du fait que tout élément de $M^+(X)$ est localisable sur un compact de X .

D'après le théorème précédent et le théorème 3.6 de [2], $M^+(X)$ est polonais ; d'après [3], § II.3.4, le fait que $Max^+(X)$ (ensemble des éléments maximaux de $M^+(X)$) soit également polonais équivaut à prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 12. - <u>Lorsque</u> $X \in \mathcal{S}_M$, $Max^+(X)$ <u>est un</u> G_δ <u>de</u> $M^+(X)$.

<u>Preuve</u>. - $\tilde{Y}$ est engendré par ses éléments convexes ; grâce à la proposition 9, on prouve que $\mu \in M^+(X)$ est maximale dès que, pour toute fonction convexe $f \in \tilde{Y}$, on a

$$\mu(f) = (\inf \mu(g) \ ; \ g \geqslant f \ \text{ sur } X \ , \ g \ \text{ concave } , \ g \in h(E)) \ ;$$

en effet, soit $\nu \in Max^+(X)$ avec $\mu < \nu$, par des méthodes voisines de celles de [5] (Théorème 28), on voit que $\mu = \nu$ sur $\tilde{Y}$.

Pour toute $f \in \tilde{Y}$, convexe, et tout $n > 0$, l'ensemble

$$O(f,n) = (\mu \ ; \ \mu \in M^+(X) \ , \ \exists \ g \geqslant f \ \text{ sur } X \ , \ g \ \text{ concave}, \ g \in h(E) \ , \ \mu(g-f) < 1/n) \ ,$$

est ouvert ; or $Max^+(X) = \bigcap O(f , n)$ pour $n \in N$ et $f \in \tilde{Y}$, convexe.

4. Cas des espaces R^I .

<u>Notations</u> 13. - Soit $J \subset I$, $J \neq \emptyset$; on fait l'identification $R^I = R^J \times R^{(I \setminus J)}$; soit p_J la projection canonique de R^I sur $R^J \times (0)$; notons que l'application $f \longmapsto \mu(f \circ p_J)$ n'est autre que μ_A au sens de CHOQUET ([1], 30.8) avec $A = R^J \times (0)$; on note μ_J cet élément de $M^+(X)$.

Il est clair que si $f \in h(R^I)$ ne dépend que des J premières coordonnées, on a $\mu_J(f) = \mu(f)$. Pour tout $i \in I$, on note $|x_i|$ l'élément de $h(R^I)$, défini par $x \longmapsto |x_i|$, (i-ième composante de x).

THÉORÈME 14. - $M^+(R^I)$ <u>est fortement tamisable</u>.

<u>Preuve</u>. - Définissons un tamis fort : soit V un ouvert non vide de $M^+(R^I)$; on dira que l'ouvert non vide $W \subset V$ est fortement contenu dans V (on note $W \sqsubset V$) lorsque $\overline{W} \subset V$, et que

$$\exists \ \mu \in V \ , \ h_1 , h_2 , h_n \in h(R^I) \ , \ K_1 , K_2 , K_n > 0 \ ;$$

une partie finie J_W de I , tels que

1° $\mu \in W$;

2° h_1 , h_2 , h_n ne dépendent que des coordonnées d'indice appartenant à J_W ;

3° $W = (\nu \ ; \ |\nu(h_i) - \mu(h_i)| < 1$ et $\nu(|x_i|) < K_i \ , \ \forall \ i \in [1 , n])$.

Soit $V_1 \sqsupset V_2 \ldots V_n \sqsupset V_{n+1} \ldots$ On pose $J = \bigcup_{n \geq 1}(J_{V_n})$. $\forall \ n > 0$, soit $\lambda_n \in V_n$; on a aussi $(\lambda_n)_J \in V_n$. On raisonne ensuite comme dans la proposition 9 en prenant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur N , non trivial, puis en définissant $\lim_{\mathcal{U}}((\lambda_n)_J)$ en remarquant que $\forall f \in h(R^I)$, $f \circ p_J$ est majorée par une combinaison finie des $|x_i|$ pour $i \in J$.

Remarque 15.

1° La partie de $M^+(R^I)$ constituée par les mesures, portées par un sous-espace (non fixé) de R^I canoniquement isomorphe à R^N , n'est pas de première catégorie puisque l'élément $\lim_{\mathcal{U}}((\lambda_n)_J)$, construit au cours de la preuve du théorème 14, est porté par un tel espace.

Cet ensemble est partout dense dans $M^+(R^I)$ ([1], 30.9), et est séquentiellement fermé. On démontrerait qu'il est fortement tamisable.

2° Rappelons que $\mathrm{Max}^+(X)$ est homéomorphe à R_+^I lorsque $X = R_+^I$.

Remarque 16. - Soit A_k $(k \in K)$, une famille d'espaces tamisables (ou fortement tamisables) ; pour tout $H \subset K$, on posera A_H = produit des A_k , où $k \in H$; soit B une partie de A_K telle que, pour toute partie dénombrable $H \subset K$, la projection de B dans A_H soit surjective. Alors B est tamisable (ou fortement tamisable), et n'est pas de première catégorie dans A_K . Si, de plus, tous les A_k sont identiques, il est aisé de construire un tel B qui soit séquentiellement fermé.

5. Deux résultats concernant la classe $\mathcal{S}$.

THÉORÈME 17. - Soit $X \in \mathcal{S}$; si $M^+(X)$ est fortement tamisable, alors $\mathrm{Max}^+(X)$ est un espace de Baire.

Preuve. - Soient (O_n) une suite d'ouverts partout denses de $\mathrm{Max}^+(X)$, et ω un ouvert non vide de $\mathrm{Max}^+(X)$. On pose $\omega_1 = \omega \cap O_1$; ω_1 est la trace sur $\mathrm{Max}^+(X)$ d'un ouvert Ω_1 de $M^+(X)$; soit $\tilde{\Omega}_1$ un ouvert de $M^+(X)$ fortement contenu dans Ω_1 , rencontrant $\mathrm{Max}^+(X)$ ($M^+(X)$ est fortement tamisable), et tel que $\mathrm{Max}(\tilde{\Omega}_1) \subset \omega_1$.

Supposons effectuées les constructions suivantes de ω_i ; Ω_i et $\tilde{\Omega}_i$ pour $i = 1 , 2 , \ldots , n$ vérifiant pour tout $p \in [1 , n - 1]$

$$\omega_{p+1} \subset \mathrm{Max}^+(X) \ ; \quad \Omega_{p+1} , \tilde{\Omega}_{p+1} \subset M^+(X)$$

et

1° $\omega_{p+1} = \tilde{\Omega}_p \cap O_{p+1}$ est un ouvert non vide de $\mathrm{Max}^+(X)$;

2° Ω_{p+1} est un ouvert de $M^+(X)$ tel que $\omega_{p+1} = \Omega_{p+1} \cap \mathrm{Max}^+(X)$;

3° $\Omega_{p+1} \subset \tilde{\Omega}_p$;

4° $\tilde{\Omega}_{p+1}$ est un ouvert de $M^+(X)$, $\tilde{\Omega}_{p+1} \sqsubset \Omega_{p+1}$, et $\tilde{\Omega}_{p+1} \cap \mathrm{Max}^+(X)$ est non vide ;

5° $\mathrm{Max}(\tilde{\Omega}_{p+1}) \subset \omega_{p+1}$.

Prouvons que la construction peut s'effectuer pour $i = n + 1$: on pose

$$\omega_{n+1} = \tilde{\Omega}_n \cap O_{n+1} ;$$

ω_{n+1} peut s'écrire $\omega_{n+1} = \Omega_{n+1} \cap \mathrm{Max}^+(X)$, et on peut exiger que $\Omega_{n+1} \subset \tilde{\Omega}_n$.

Puis ($M^+(X)$ est fortement tamisable) soit $\tilde{\Omega}_{n+1}$ rencontrant $\mathrm{Max}^+(X)$ avec $\tilde{\Omega}_{n+1} \sqsubset \Omega_{n+1}$ et $\mathrm{Max}(\tilde{\Omega}_{n+1}) \subset \omega_{n+1}$. D'où la construction pour $n + 1$. On a alors $\forall\, n \geqslant 1$, $\tilde{\Omega}_{n+1} \sqsubset \Omega_{n+1} \subset \tilde{\Omega}_n$, d'où $\bigcap \tilde{\Omega}_n$ non vide ; soit $\mu \in \bigcap \tilde{\Omega}_n$ et $\tilde{\mu}$ maximal avec $\mu < \tilde{\mu}$; comme $\forall\, n \geqslant 1$, $\mathrm{Max}(\tilde{\Omega}_n) \subset \omega_n$, on a $\tilde{\mu} \in \bigcap \omega_n$; or on a

$$\bigcap \omega_n \subset \omega \cap O_n \text{ ; d'où } \tilde{\mu} \in \omega \cap O_n .$$

THÉORÈME 18. - Soit $X \in \mathcal{S}$; si $M^+(X)$ est fortement tamisable, alors X est un espace de Baire.

Preuve. - Soient (O_n) une suite d'ouverts partout denses de X , et ω un ouvert non vide de X ; on pose $\omega_1 = \omega \cap O_1$. Soient $x_1 \in \omega_1$ et Ω_1 un ouvert de $M^+(X)$ contenant ε_{x_1} et tel que ($r(\mu)$ désignant la résultante d'un élément $\mu \in M^+(X)$) on ait $r(\Omega_1) \subset \omega_1$; soit $\tilde{\Omega}_1$ un ouvert de $M^+(X)$ fortement contenu dans Ω_1 et contenant ε_{x_1} ($M^+(X)$ est fortement tamisable) ; les résultantes des mesures ponctuelles contenues dans $\tilde{\Omega}_1$ forment un ouvert $\tilde{\omega}_1$ de X contenant x_1 .

Supposons effectuées les constructions ω_i , x_i , Ω_i , $\tilde{\Omega}_i$, $\tilde{\omega}_i$ suivantes pour $i = 1 , 2 , \ldots , n$, vérifiant pour tout $p \in [1 , n-1]$

$$x_{p+1} \in X ; \quad \omega_{p+1} , \tilde{\omega}_{p+1} \subset X ; \quad \Omega_{p+1} , \tilde{\Omega}_{p+1} \subset M^+(X)$$

et

1° $\omega_{p+1} = \tilde{\omega}_p \cap O_{p+1}$,

2° $x_{p+1} \in \omega_{p+1}$,

3° Ω_{p+1} est un ouvert de $M^+(X)$ contenant $\varepsilon_{x_{p+1}}$ tel que $r(\Omega_{p+1}) \subset \omega_{p+1}$,

4° $\tilde{\Omega}_{p+1}$ est un ouvert de $M^+(X)$ tel que $\tilde{\Omega}_{p+1} \subset \Omega_{p+1}$ et $\varepsilon_{x_{p+1}} \in \tilde{\Omega}_{p+1}$,

5° $\tilde{\omega}_{p+1}$ est l'ensemble des résultantes des mesures ponctuelles contenues dans $\tilde{\Omega}_{p+1}$; c'est un ouvert de X contenant x_{p+1} .

Prouvons que la construction peut s'effectuer pour $n + 1$. On pose

$$\omega_{n+1} = \tilde{\omega}_n \cap O_{n+1} ;$$

soit $x_{n+1} \in \omega_{n+1}$; soit Ω_{n+1} un ouvert de $M^+(X)$ contenant $\varepsilon_{x_{n+1}}$, tel que $r(\Omega_{n+1}) \subset \omega_{n+1}$ et $\Omega_{n+1} \subset \tilde{\Omega}_n$; cette dernière relation est possible à réaliser car, d'après la 5e condition de la récurrence, appliquée à $\tilde{\omega}_n$, on a $\varepsilon_{x_{n+1}} \in \tilde{\Omega}_n$.

Soit $\tilde{\Omega}_{n+1}$ un ouvert de $M^+(X)$ tel que $\tilde{\Omega}_{n+1} \sqsubset \Omega_{n+1}$ et $\varepsilon_{x_{n+1}} \in \tilde{\Omega}_{n+1}$ ($M^+(X)$ est fortement tamisable) ; $\tilde{\omega}_{n+1}$ sera alors l'ensemble des résultantes des mesures ponctuelles contenues dans $\tilde{\Omega}_{n+1}$. D'où la construction pour $n + 1$.

On a alors $\forall\, n \geqslant 1 :\ \Omega_{n+1} \sqsubset \tilde{\Omega}_n \subset \Omega_n$; d'où $\bigcap \Omega_n$ non vide ; soit $\mu \in \bigcap \Omega_n$; comme $\forall\, n$, $r(\Omega_n) \subset \omega_n$, on a $r(\mu) \in \bigcap \omega_n$; or $\bigcap \omega_n \subset \omega \cap 0_n$; d'où

$$r(\mu) \in \omega \cap 0_n .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis, Vol. 1-3. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

[2] CHOQUET (G.). - Résultats récents sur les formes positives sur des espaces de fonctions, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 11e-12e années, 1971-1973, n° 6, 3 p.

[3] CHOQUET (G.). - Cours d'analyse, Tome 2 : Topologie. - Paris, Masson, 1964.

[4] CHOQUET (G.). - Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse, "Proceedings of the International Congress of Mathematicians [1962. Stockholm]", p. 317-330. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.

[5] MAYER (C.). - Outils topologiques et métriques de l'analyse mathématique. - Paris, C.D.U et S.E.D.E.S. réunis, 1960.

[6] PHELPS (R.). - Lectures on Choquet's theorem. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

(Texte reçu le 17 mars 1975)

Richard BECKER
Equipe d'analyse
Université de Paris-VI
4 place Jussieu, Tour 46
75230 PARIS CEDEX 05