SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

CLAUDE PIQUET

Sur les représentations unitaires d'un groupe

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 1, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A1_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
14e année, 1974/75, n° 1, 2 p.

24 octobre 1974

SUR LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES D'UN GROUPE

par Claude PIQUET

N. B. - Cet exposé ne sera pas rédigé ; il est extrait d'un article (de même titre) à paraître dans "Archiv der Mathematik".

NOTATIONS. - G est un groupe (topologique), $\mathcal{H}$ un G-module unitaire. A tout vecteur x de $\mathcal{H}$, on associe la fonction (continue) $b(x)$ de type positif sur G, définie par

$$b(x)(g) = \langle g.x\ ,\ x\rangle \qquad (g \in G)\ .$$

On note $\mathfrak{W} = \mathcal{C}(\mathcal{H})$ le cône (non convexe, en général) des fonctions de type positif associées à $\mathcal{H}$, $\mathcal{E}^+$ l'enveloppe convexe de $\mathfrak{W}$, et $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^+$ le sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{C}(G)$ engendré par $\mathfrak{W}$. Le cône $\mathcal{E}^+$ détermine une relation d'ordre notée $\gg$.

Le groupe G agit sur $\mathcal{E}$ par automorphismes intérieurs : Si $\omega \in \mathcal{E}$,

$$g.\omega(s) = \omega(g^{-1}\, sg) \qquad (s\ ,\ g \in G)\ .$$

On remarque que $b(g.x) = g.b(x)$, $(g \in G\ ,\ x \in \mathcal{H})$.

1. Géométrie de $\mathfrak{W}$.

Elle est décrite par le théorème suivant :

THÉORÈME. - Soit $x \in \mathcal{H}$ et $F(x)$ la face de $\mathcal{E}^+$ engendrée par $b(x)$. Alors $F(x) \subset \mathfrak{W}$ et $b^{-1}(F(x)) = \mathrm{Fix}(G\ ,\ \mathcal{L}(\mathcal{H}))x$.

COROLLAIRE. - Si $\mathfrak{W}$ ne se réduit pas à une demi-droite, $\mathcal{H}$ est simple si, et seulement si, $\mathfrak{W} = \mathrm{Ext}(\mathcal{E}^+)$.

2. Cas où $\mathcal{H}$ est un G-module simple.

On peut alors mettre sur $\mathcal{E}$ une structure préhilbertienne particulièrement intéressante.

THÉORÈME. - Il existe un produit scalaire unique sur $\mathcal{E}$, noté $(.|.)$, tel que $\forall\ x\ ,\ \forall\ y \in \mathcal{H}\ ,\ (b(x)|b(y)) = |\langle x\ ,\ y\rangle|^2$. Le complété $\hat{\mathcal{E}}$ de l'espace préhilbertien réel $(\mathcal{E}\ ,\ (.|.))$ est un G-module orthogonal ; la fermeture $\overline{\mathcal{E}^+}$ dans $\hat{\mathcal{E}}$ du cône $\mathcal{E}^+$ est un cône convexe fermé propre.

On peut préciser le lien de $\hat{\mathcal{E}}$ avec $\mathcal{H}$:

THÉORÈME. - $\hat{\mathcal{E}}$ est isométriquement isomorphe à l'espace hilbertien réel $HS_h(\mathcal{H})$

des opérateurs de Hilbert-Schmidt hermitiens de $\mathcal{H}$. *Le cône* $\overline{\mathcal{E}^+}$ *correspond aux opérateurs positifs de* $HS_h(\mathcal{H})$, *et* $\mathcal{W}$ *aux projecteurs de rang* 1 .

Il en résulte que $\mathcal{W} = \mathrm{Ext}(\overline{\mathcal{E}^+})$ et est fermé ; par complétion, le cône $\overline{\mathcal{E}^+}$ n'obtient pas de nouvelles génératrices extrémales.

3. Génératrices invariantes de $\overline{\mathcal{E}^+}$.

On cherche à savoir si $\mathrm{Fix}(G , \overline{\mathcal{E}^+}) \neq \{0\}$.

LEMME. - *Soit* $x \in \mathcal{H}$ *tel que son orbite* $K(x) = G.b(x)$ *soit compacte. Alors, la projection orthogonale* h_x *de* 0 *sur* $\overline{\mathrm{conv}}\, K(x)$ *est non nulle et invariante par* G : $h_x \in \mathrm{Fix}(G , \overline{\mathcal{E}^+})$.

Dans le cas où G est compact, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME. - *Si* G *est un groupe compact, tout* G-*module unitaire simple est de dimension finie.*

(Texte reçu le 25 janvier 1975)

Claude PIQUET
11 allée de Trévise
92330 SCEAUX