Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Hicham Fakhoury

Isomorphismes bicroissants des cônes convexes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. nº C4, p. C1-C4
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A19_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET C4-01
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, Communication n° C4, 4 p. Janvier 1975

ISOMORPHISMES BICROISSANTS DES CÔNES CONVEXES

par Hicham FAKHOURY

On établit dans cette note le résultat suivant.

Soient C_1 et C_2 deux cônes convexes possédant deux bases notées respectivement B_1 et B_2. On suppose que $B_i = \overline{\text{conv}}\,[\mathcal{E}(B_i)]$, que les points exposés de B_2 sont denses dans $\mathcal{E}(B_2)$, et que $\mathcal{E}(B_1)$ ne possède pas de points isolés. Alors toute bijection continue bicroissante de C_1 sur C_2 est linéaire.

Ceci est en particulier le cas de deux cônes à base compacte.

1. Notations.

On rappelle qu'une base B d'un cône convexe saillant C dans un e. l. c. s. E est un sous-convexe fermé de C telle que tout x de C s'écrive de façon unique $x = \lambda y$, où y est dans B.

Un cône convexe saillant C donne lieu à un ordre sur E défini par $x \leqslant y$ si, et seulement si, $y - x \in C$. Soient C_1 et C_2 deux cônes convexes saillants, et T une application de C_1 dans C_2 ; on dira que T est bicroissante si $T(x) \leqslant T(y)$ équivaut à $x \leqslant y$.

Une génératrice extrémale δ de C est une demi-droite de C telle que ($p \leqslant q$ et $q \in \delta$) implique $(p \in \delta)$. On note $\mathcal{E}_g(C)$ l'ensemble (éventuellement vide) des génératrices extrémales de C, et $\mathcal{E}(B)$ l'ensemble des points extrémaux de B. Il est immédiat que $\mathcal{E}_g(C) \cap B = \mathcal{E}(B)$.

2. Les résultats.

THÉORÈME. - Soient C_1 et C_2 deux cônes convexes saillants possédant des bases notées respectivement B_1 et B_2. Soit T une bijection continue bicroissante de C_1 sur C_2. On suppose que $B_i = \overline{\text{conv}}\,[\mathcal{E}(B_i)]$, $i = 1, 2$ et que les points exposés de B_2 sont denses dans $\mathcal{E}(B_2)$. Si $\mathcal{E}(B_1)$ ne possède pas de points isolés, alors T est linéaire.

Démonstration. - Montrons que l'image par T d'une génératrice extrémale de C_1 est une génératrice extrémale de C_2. Soit p un point d'une génératrice extrémale de C_1 ; on note I_p l'intervalle d'ordre $(p - C) \cap C$ qui coïncide, dans le cas présent, avec le segment $[0, p]$. Si le point $T(p)$ n'est pas sur une génératrice extrémale de C_2, l'intervalle $I_{T(p)}$ contiendra un parallélogramme non dégénéré. Or, T étant bicroissante, on a $T(I_p) = I_{T(p)}$. Mais T étant une homéomorphie de $I_{T(p)}$ sur $T(I_p)$, on aboutit à une contradiction.

Soit p un point de $\mathcal{E}(B_1)$; d'après ce qui précède, le point $T(\lambda p)$ est sur une génératrice extrémale de C_2. Posons

$$T(\lambda p) = \mathcal{R}(\lambda)\ S(p)\ ,$$

où $S(p)$ est un point extrémal de la base B_2. A priori, l'application

$$\lambda \longmapsto \mathcal{R}(\lambda)$$

dépend du point p choisi ; elle sera notée par la suite $\mathcal{R}(\lambda , p)$. Il est clair que $\mathcal{R}(\lambda , p)$ est un homéomorphisme croissant de $\underset{\sim}{R}^+$ dans lui-même. Comme T est continue, il en est de même pour

$$p \longmapsto \mathcal{R}(\lambda , p) \quad \text{et} \quad p \longmapsto S(p)\ .$$

Soit u un point de C ; on pose T_u l'application de C_1 dans C_2, définie par

$$T_u(x) = T(x + u) - T(u)\ , \quad \forall\ u \in C_1\ .$$

L'application T_u, tout comme T, est une homéomorphie bicroissante de C_1 sur C_2. On a, d'après ce qui précède :

$$T_u(\lambda p) = T(\lambda p + u) - T(u) = \mathcal{R}(\lambda , p , u)\ S(p , u)\ .$$

Soient u et v deux points de C_1 tels que $u \geqslant v$, alors

$$T(u) + \mathcal{R}(\lambda , p , u)\ S(p , u) \geqslant T(v) + \mathcal{R}(\lambda , p , v)\ S(p , v)$$

puisque $u + \lambda p \geqslant v + \lambda p$.

Si le point $S(p , u)$ est un point exposé de B_2, il existe une forme linéaire f, continue et positive sur B_2, nulle uniquement au point $S(p , u)$.

En appliquant f à l'inégalité précédente, on a

$$f[T(u) - T(v)] \geqslant \mathcal{R}(\lambda , p , v)\ f[S(p , v)]\ .$$

Comme $\lim_{\lambda \to \infty} \mathcal{R}(\lambda , p , u) = +\infty$, on déduit de l'inégalité ci-dessus que

$$f[S(p , v)] = 0\ .$$

Par conséquent, $S(p , u) = S(p , v)$. D'après la densité des points exposés de B_2 dans $\mathcal{E}(B_2)$, on a l'égalité précédente pour tout point p dans $\mathcal{E}(B_1)$. Soient u et v deux points de C_1, on a, grâce à ce qui précède,

$$S(p , u) = S(p , u + v) = S(p , v)\ .$$

Ainsi $S(p , u)$ est indépendant de u ; on le notera $S(p)$.

Comme T est une bijection bicroissante, $T(p)$ et $T(q)$ ne sont pas proportionnelles si p et q sont deux points distincts de $\mathcal{E}(B_2)$, par conséquent $S(p) \neq S(q)$. Il en résulte

$$\begin{aligned} T(u + \alpha p + \beta q) &= T(u + \alpha p) + \mathcal{R}(\beta , q , u + \alpha p)\ S(q)\ , \\ &= T(u) + \mathcal{R}(\alpha , p , u)\ S(p) + \mathcal{R}(\beta , q , u + \alpha p)\ S(q)\ , \\ &= T(u) + \mathcal{R}(\beta , q , u)\ S(q) + \mathcal{R}(\alpha , p , u + \beta q)\ S(p)\ . \end{aligned}$$

En comparant les deux dernières lignes, on obtient :

$$\mathcal{R}(\alpha , p , u) = \mathcal{R}(\alpha , p , u + \beta q) .$$

Comme B_2 est l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{E}(B_2)$, on voit que $\mathcal{R}(\alpha , p , u)$ est en fait indépendant de u. On notera $\mathcal{R}(\alpha , p)$ cette quantité. Par suite,

$$\begin{aligned} T(\alpha p + \beta q) &= T(\alpha p) + \mathcal{R}(\beta , q)\, S(q) \\ &= \mathcal{R}(\alpha , p)\, S(p) + \mathcal{R}(\beta , q)\, S(q) , \end{aligned}$$

et

$$T((\alpha + \beta)p) = \mathcal{R}[(\alpha + \beta) , p]\, S(p) .$$

Soit $(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille ultrafiltrée (non constante) dans $\mathcal{E}(B_1)$ qui converge vers le point p de $\mathcal{E}(B_1)$; une telle famille existe puisque p n'est pas un point isolé dans $\mathcal{E}(B_1)$; on a, d'après la continuité de T,

$$\begin{aligned} T[(\alpha + \beta)p] &= \lim_\lambda T(\alpha p + \beta q_\lambda) \\ &= \lim_\lambda [\mathcal{R}(\alpha , p)\, S(p) + \mathcal{R}(\beta , q_\lambda)\, S(q_\lambda)] \\ &= \mathcal{R}(\alpha , p)\, S(p) + \mathcal{R}(\beta , p)\, S(p) . \end{aligned}$$

Par suite, on a l'égalité :

$$\mathcal{R}[(\alpha + \beta) , p] = \mathcal{R}(\alpha , p) + \mathcal{R}(\beta , p) ,$$

ce qui prouve la linéarité de p par rapport à la première variable. Par conséquent,

$$\begin{aligned} T(a + \lambda p) &= T(u) + \mathcal{R}(\lambda , p)\, S(p) \\ &= T(u) + \lambda T(p) . \end{aligned}$$

En répétant le raisonnement, et en utilisant le fait que $B_1 = \overline{\mathrm{conv}}\, [\mathcal{E}(B_1)]$, on voit bien que T est linéaire.

COROLLAIRE 2. - <u>Soient</u> C <u>un cône convexe à base compacte</u> B, <u>et</u> T <u>une bijection continue bicroissante de</u> C <u>sur lui-même</u>. <u>Si</u> $\mathcal{E}(B)$ <u>est sans point isolé</u>, <u>alors</u> T <u>est linéaire</u>.

Soit K un convexe compact ; on peut toujours le supposer plongé dans un cône C dont il constitue une base. Quand on écrira $k \leq \lambda k'$ pour deux points k et k' de K, ce sera toujours au sens de l'ordre défini par C.

COROLLAIRE 3. - <u>Soient</u> K_1 <u>et</u> K_2 <u>deux convexes compacts tels que</u> $\mathcal{E}(K_1)$ <u>soit sans point isolé</u>, <u>et</u> Φ <u>une homéomorphie de</u> K , <u>sur</u> K_2. <u>Pour que</u> Φ <u>soit affine</u>, <u>il faut et il suffit que l'on ait</u> $k \leq \lambda k'$ <u>si</u>, <u>et seulement si</u>, $\Phi(k) \leq \lambda \Phi(k')$.

COROLLAIRE 4. - <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces compacts sans points isolés</u>, <u>et</u> Φ <u>une homéomorphie de</u> $M'_+(X)$ <u>dans</u> $M'_+(Y)$ <u>telle que</u> $\mu \leq \lambda\nu$ <u>si</u>, <u>et seulement si</u>, $\Phi(\mu) \leq \lambda\Phi(\nu)$. <u>Alors</u>, <u>il existe une homéomorphie</u> θ <u>de</u> X <u>sur</u> Y <u>telle que</u>

$\Phi(\mu)(f) = \mu(f \circ \theta)$ <u>pour tout</u> $f \in C(Y)$.

Démonstration. - L'hypothèse sur Φ montre que l'image d'une mesure de Dirac sur X est une mesure de Dirac sur Y ; d'où l'homéomorphie θ . Comme Φ est linéaire d'après le corollaire 2, elle vérifie nécessairement $\Phi(\mu)(f) = \mu(f \circ \theta)$ pour tout f dans $C(Y)$.

(Texte reçu le 10 février 1975)

Hicham FAKHOURY
Equipe d'Analyse (n° 294).
Département de Mathématiques
Université de Paris VI
4 place Jussieu, Tour 46
75230 PARIS CEDEX 05