Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gilles Godefroy

Quelques propriétés des espaces de Banach

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° C3, p. C1-C8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A18_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, Communication n° C3, 8 p.
14 novembre 1974

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ESPACES DE BANACH

par Gilles GODEFROY

Je me place, dans toutes ces démonstrations, dans le cadre "espace de Banach", pour simplifier les notations ; les démonstrations faites montrent cependant qu'on pourrait se placer, sans grandes modifications, dans le cadre "e. l. c. métrisable complet".

On sait que, dans un Banach E, tout convexe équilibré fermé absorbant est un voisinage de 0 ; autrement dit, que E est tonnelé.

On en déduit la propriété suivante.

PROPOSITION 1. - <u>Soient</u> X <u>un espace vectoriel,</u> N_1 <u>et</u> N_2 <u>deux normes sur</u> X. <u>On suppose que</u> $B(N_2) = \{x \in X ; N_2(x) \leq 1\}$ <u>est un ensemble</u> N_1<u>-fermé. Alors, pour tout espace de Banach</u> E, <u>et toute application linéaire</u> φ <u>de</u> E <u>dans</u> X,

$$(\varphi \text{ est } N_1\text{-continue}) \Longrightarrow (\varphi \text{ est } N_2\text{-continue}) .$$

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de démontrer que $\varphi^{-1}(B(N_2))$ est un voisinage de 0 dans E, puisque φ est linéaire. Or $B(N_2)$ est N_1-fermé, donc $\varphi^{-1}(B(N_2))$ est fermé, d'après la continuité de φ. De plus, $\varphi^{-1}(B(N_2))$ est convexe équilibré absorbant, puisque $B(N_2)$ possède ces propriétés. Donc $\varphi^{-1}(B(N_2))$ est un voisinage de 0 (puisque E est tonnelé), et φ est N_2-continue.

<u>Remarque</u> 2. - J'ai considéré X normé pour simplifier les notations, mais on pourrait adapter l'énoncé au cas où X est un e. v. t.

<u>Application</u>. - Posons $X = L^1 \cap L^\infty$, et munissons cet espace des deux normes : $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ ($L^1 = L^1(\Omega , \mu)$, où Ω est localement compact, et μ mesure de Radon positive ; de même, pour L^∞).

LEMME 3. - $\{f \in L^1 \cap L^\infty ; \|f\|_1 \leq 1\}$ <u>est un ensemble fermé dans</u>
$$(L^1 \cap L^\infty , \| \|_\infty) .$$

<u>Démonstration</u>. - On va montrer que son complémentaire est ouvert. Soit donc f telle que : $\int_\Omega |f| \, d\mu > 1$. Alors il existe K, compact de Ω, tel que
$$\int_K |f| \, d\mu = 1 + \varepsilon , \text{ avec } \varepsilon > 0 .$$
Soit alors $V(f) = \{\varphi \in L^1 \cap L^\infty ; \|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon/2\mu(K)\}$. Si $\varphi \in V(f)$, on a
$$\int_K |\varphi| \, d\mu \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2} > 1 .$$
D'où $\int_\Omega |\varphi| \, d\mu = \|\varphi\|_1 > 1$, ce qui démontre le résultat.

En appliquant, la proposition 1, on a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 4. - Soit $\varphi : E \to (L^1 \cap L^\infty, \| \|_\infty)$, où E est un Banach, une application linéaire continue. Alors $\varphi : E \to (L^1 \cap L^\infty, \| \|_1)$ est continue.

Cette proposition peut encore s'énoncer comme suit.

PROPOSITION 5. - Soit $\varphi : E$ (Banach) $\to L^1$ une application linéaire telle que $\varphi(B_1(E))$ soit bornée pour $\| \|_\infty$. Alors φ est continue de E dans $(L^1, \| \|_1)$.

On peut remarquer que cette proposition admet une espèce de réciproque. On a en effet le résultat suivant.

LEMME 6. - $\{f \in L^1 \cap L^\infty ; \|f\|_\infty \leq 1\}$ est un ensemble fermé dans

$$(L^1 \cap L^\infty, \| \|_1) .$$

Démonstration. - On va montrer que son complémentaire est ouvert. Soit donc f telle que $\|f\|_\infty > 1$. On peut affirmer qu'il existe $\varepsilon > 0$, et A mesurable, tels que

$$|f| \geq 1 + \varepsilon \text{ sur l'ensemble } A \text{, avec } \mu(A) = \eta > 0 .$$

Soit alors

$$V(f) = \{\varphi \in L^1 \cap L^\infty ; \|\varphi - f\|_1 \leq \frac{\eta\varepsilon}{2}\} .$$

Soit $\varphi \in V(f)$. Supposons que l'on ait $|\varphi| \leq 1$ presque partout. On aurait alors

$$\int_A |\varphi - f| \, d\mu = \int \chi_A |\varphi - f| \, d\mu \geq \varepsilon\eta .$$

Donc,

$$\|f - \varphi\|_1 \geq \int_A |\varphi - f| \, d\mu \geq \varepsilon\eta ,$$

ce qui est absurde. Donc

$$\|\varphi\|_\infty > 1 \text{, et } V(f) \subseteq \{\varphi \in L^1 \cap L^\infty ; \|\varphi\|_\infty > 1\} .$$

PROPOSITION 7. - Si $\varphi : E$ (Banach) $\to L^\infty$ est une application linéaire telle que $\varphi(B_1(E))$ soit bornée pour $\| \|_1$, alors φ est continue de E dans $(L^\infty, \| \|_\infty)$.

Remarque. - Si dans les énoncés 5 et 7, on remplace $1, \infty$ par deux nombres $p, q \in [1, \infty]$, ils sont encore valables, avec des démonstrations analogues.

On peut, dans certains cas, localiser le raisonnement de la façon suivante :

LEMME 8. - Soit E un Banach. Soient $\varphi : E \to L^1$ linéaire, et $p \in [1, \infty]$. On suppose que, pour tout $x \in \Omega_1$ il existe un voisinage V_x de x tel que

$$\{\|\varphi(y) \chi_{V_x}\|_p ; \|y\|_E \leq 1\}$$

soit borné. Alors φ est continue de E dans $(L^1, \| \|_1)$.

Démonstration. - On remarque tout d'abord, en appliquant les propositions démontrées précédemment, que

$$\{\|\varphi(y).\chi_{V_x}\|_1 \ ; \ \|y\|_E \leq 1\}$$

est borné.

En utilisant la propriété de compacité, on a alors, pour tout compact $K \subseteq \Omega$, $\{\int_K |\varphi(y)| \, d\mu \ ; \ \|y\|_E \leq 1\}$ est borné. On pose

$$\psi_K : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto \int_K \varphi(y) \, d\mu \ .$$

On a donc $\psi_K \in E'$, pour tout K compact. De plus, soit $y \in E$. On a

$$|\psi_K(y)| \leq \int_K |\varphi(y)| \, d\mu \leq \|\varphi(y)\|_1 \ .$$

On peut alors appliquer le théorème de Banach-Steinhaus et affirmer

$$\exists \ M \ \text{tel que}, \ \forall \ K \ \text{compact}, \ \int_K |\varphi(y)| \, d\mu \leq M.\|y\|_E \ ,$$

ce qui implique :

$$\exists \ M \ \text{tel que} \ \int |\varphi(y)| \, d\mu = \|\varphi(y)\|_1 \leq M.\|y\|_E \ ,$$

ce qui montre que φ est continue.

Remarque. - Il semble qu'on ne puisse pas affirmer un résultat du même ordre en remplaçant L^1 par un L^q, puisque, pour avoir la majoration uniforme en K, il faudrait définir $\psi_K(y) = [\int_K |\varphi(y)|^q \, d\mu]^{1/q}$, ce qui n'est pas une forme linéaire.

Le lemme 8 peut encore s'énoncer de la façon suivante

PROPOSITION 9. - Soient E un Banach, et $\varphi : E \longrightarrow L^1$ linéaire, non continue. Soit p un indice, $1 \leq p \leq \infty$. Alors il existe $x \in \Omega$, tel que, pour tout voisinage V_x de x, $\{\|\varphi(y).\chi_{V_x}\|_p \ ; \ \|y\|_E \leq 1\}$ soit non borné.

Généralisation. - Dans l'optique du livre de S. BANACH [1], on va démontrer un lemme utile, et en tirer quelques conséquences.

LEMME 10. - Soient E un Banach, C une partie de E, telle que

1° C est convexe équilibré,

2° C est un borélien de E (ou plus généralement, un ensemble ayant la propriété de Baire).

3° C est de 2e catégorie dans E (i. e. C n'est pas maigre).

Alors C est un voisinage de 0.

Démonstration. - C, étant borélien, vérifie la propriété de Baire ; et comme il est de 2e catégorie, il existe Δ de 1re catégorie, tel que $C \cup \Delta$ contienne ω ouvert non vide.

On peut, de plus, affirmer qu'il existe Δ_0 tel que $C \cup \Delta_0$ soit un voisinage de 0 .

En effet, Δ étant de 1re catégorie, il existe $x \in \omega \cap C$. L'ensemble C étant équilibré, on a alors $(-x) \in C$. On considère l'homothétie φ de centre $(-x)$ et de rapport $1/2$.

$\varphi(\omega)$ est alors un voisinage V de 0 . Remarquons que c'est de plus un ouvert. On a

$$\varphi(C \cup \Delta) \supseteq \varphi(\omega) = V$$

ou encore

$$\varphi(C) \cup \varphi(\Delta) \supseteq V \ .$$

C étant convexe, $\varphi(C) \subseteq C$; de plus, $\Delta_0 = \varphi(\Delta)$ est de 1re catégorie, et $C \cup \Delta_0 \supseteq V$, voisinage de 0 .

On prend alors $x_0 \in \Delta_0 \cap V$. Il existe une boule ouverte $B(x_0)$, de centre x_0 , incluse dans V , puisque V est ouvert. Notons ψ la symétrie de centre x_0 dans $B(x_0)$. L'ensemble $C \cap B(x_0)$ a un complémentaire de 1re catégorie (inclus dans Δ_0) dans $B(x_0)$, de même que $\psi(C \cap B(x_0))$. Or, $B(x_0)$ est un espace de Baire. On a donc :

$$C \cap B(x_0) \cap \psi(C \cap B(x_0)) \neq \emptyset \ .$$

Il existe donc $y \in C \cap B(x_0)$ tel que $\psi(y) \in C \cap B(x_0)$. Or, on a

$$x = \frac{1}{2}\,(y + \psi(y)) \ ; \ \text{avec} \ \ y \ , \ \varphi(y) \in C \ .$$

Puisque C est convexe, on a $x_0 \in C$, c'est-à-dire que C contient V , ce qui démontre le lemme.

Remarque. - La propriété est vérifiée, comme annoncé, par tout ensemble ayant la propriété de Baire ; en particulier, par les ensembles appartenant aux classes suivantes :

(a) ensembles boréliens dans un Banach quelconque,

(b) ensembles analytiques dans un Banach séparable,

(c) ensembles construits par l'opération A à partir des fermés.

On va donner quelques corollaires du lemme 10, énoncés dans le cadre "borélien de E " pour simplifier l'écriture, qui seraient valables, suivant cette remarque, dans un cadre plus général.

COROLLAIRE 11. - Soit C un convexe d'un Banach E , équilibré, absorbant, borélien. Alors C est un voisinage de 0 .

Il suffit de remarquer que C , absorbant dans E Banach, est nécessairement de 2e catégorie.

COROLLAIRE 12. - Soient X un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur X. Soit φ linéaire de E (Banach) dans X. On suppose que $B_1(N_2)$ est N_1-borélienne. Alors on a

$$(\varphi \text{ est } N_1\text{-continue}) \Longrightarrow (\varphi \text{ est } N_2\text{-continue}).$$

Démonstration. - $B_1(N_2)$ est un borélien de (X , N_1). Comme φ est continue de E dans (X , N_1), $\varphi^{-1}(B_1(N_2))$ est un borélien de E. Comme c'est, de plus, un ensemble convexe équilibré absorbant, c'est un voisinage de 0 (Corollaire 11), donc φ est continue de E dans (X , N_2).

COROLLAIRE 13. - Soient X un espace vectoriel, N_1 une norme sur X telle que (X , N_1) soit un Banach, N_2 une autre norme. Alors

- ou bien $\tau_1 > \tau_2$
- ou bien $B_1(N_2)$ n'est pas N_1-borélienne.

Il suffit en effet d'appliquer le résultat précédent à l'application identité de (X , N_1) dans (X , N_2).

COROLLAIRE 14. - Soient E un espace de Banach, $C \subseteq E$ un convexe équilibré absorbant tel que, pour toute droite (δ) de E passant par 0, $C \cap (\delta)$ soit fermé dans (δ). Alors, si C est un borélien de E, C est fermé dans E.

En effet, on peut remplacer dans le corollaire 13 " N_2 norme" par " N_2 semi-norme", comme le montre la démonstration. Or, l'hypothèse faite sur C montre que $C = \{x \in E \; ; \; P(x) \leqslant 1\}$, où ρ est la jauge de C, qui est, comme on sait, une semi-norme. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 13.

COROLLAIRE 15. - Soient X un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes de Banach non équivalentes sur X. Alors $B_1(N_1)$ n'est pas N_2-borélienne (et inversement).

Il suffit en effet d'employer le corollaire 12, et le résultat bien connu suivant : Deux normes de Banach comparables sont équivalentes.

Le corollaire montre pourquoi on ne trouve jamais, dans la pratique, deux topologies d'espaces de Banach sur le même espace vectoriel.

COROLLAIRE 16. - Soit $f : E$ (Banach) $\longrightarrow F$ (normé) linéaire, mesurable pour les tribus boréliennes. Alors f est continue.

En effet, f étant mesurable, $f^{-1}(B_1)$ est un borélien de E, donc un voisinage de 0 d'après le corollaire 11.

COROLLAIRE 17 (théorème de l'application ouverte pour E séparable). - Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue, où E est un Banach séparable. Alors f est un morphisme strict, si, et seulement si, $f(E)$ est fermé.

Démonstration. - On suppose $f(E)$ fermé ; donc $f(E)$ est un espace de Banach. Comme f est continue, $f^{-1}(\{0\})$ est fermé, et $E/f^{-1}(\{0\})$ est un Banach séparable. On a donc $\psi : E/f^{-1}(\{0\}) \longrightarrow f(E)$ bijection continue. On pose

$$E' = E/f^{-1}(\{0\}) ,$$

et on considère $B_1(E')$. ψ étant continue et injective, $\psi(B_1(E'))$ est un borélien de $f(E)$. Le corollaire 11 montre alors que $\psi(B_1(E'))$ est un voisinage de 0 dans $f(E)$, donc que ψ est ouverte, donc que f est un morphisme strict.

COROLLAIRE 18. - *Soient E un Banach, et F s. e. v. de E . Alors F est fermé si, et seulement si, on a :*

1° F *borélien,*

2° F *de 2e catégorie dans lui-même.*

En effet, si F est de 2e catégorie dans lui-même, il est de 2e catégorie dans $\overline{F}$. Alors F est un convexe équilibré de $\overline{F}$, borélien et de 2e catégorie. F est alors un voisinage de 0 dans $\overline{F}$, donc $F = \overline{F}$, et F est fermé.

Remarque. - Ce corollaire est un cas particulier d'un théorème de S. BANACH (voir [1], page 21, théorème 1).

APPENDICE : Sur le théorème du graphe fermé

Le lemme 10 va permettre de donner une petite généralisation du théorème du graphe fermé, et d'en tirer quelques corollaires. On rappelle qu'un espace topologique est dit analytique s'il est l'image de l'ensemble I des irrationnels de $[0 , 1]$, par une application φ continue.

PROPOSITION 19. - *Soient E un Banach séparable, F un espace vectoriel normé analytique. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors si le graphe $\mathcal{G}(f)$ de f est analytique (en particulier s'il est borélien dans $E \times F$), f est continue.*

Démonstration. - Soient $\pi_1 : E \times F \longrightarrow E$, $\pi_2 : E \times F \longrightarrow F$ les projections canoniques. Soit $B_1(F)$ la boule unité de F . Les espaces E et F étant analytiques, $E \times F$ l'est aussi, donc aussi $\pi_2^{-1}(B_1(F))$, borélien dans le produit. L'hypothèse faite sur f implique que

$$A = \pi_2^{-1}(B_1(F)) \cap \mathcal{G}(f)$$

est analytique. $\pi_1(A)$ est donc une partie analytique de E . Or

$$A = \{(x , y) \in E \times F ; \quad y = f(x) , \quad y \in B_1(F)\} .$$

Donc

$$\pi_1(A) = \{x \in E ; \quad f(x) \in B_1(F)\} = f^{-1}(B_1(F)) .$$

D'après le lemme 10 (voir la remarque qui le suit), $\pi_1(A)$ est un voisinage de 0 dans E, donc f est continue.

La conclusion sera a fortiori valable dans le cas où $\mathcal{G}(f)$ sera borélien dans $E \times F$, puisqu'alors $\mathcal{G}(f)$ sera analytique.

COROLLAIRE 20. - Soient E et F des espaces de Banach séparables. Toute application linéaire f de E dans F, telle que $\mathcal{G}(f)$ soit analytique, est continue.

COROLLAIRE 21. - Soit E un espace normé analytique. Soit F un espace de Banach. Soit $\varphi : E \longrightarrow F$ une bijection linéaire continue. Alors φ est un homéomorphisme.

Démonstration. - F est nécessairement analytique, d'après la surjectivité de φ. De plus, φ étant continue, le graphe de φ^{-1} est fermé dans $F \times E$. D'après la proposition 19, φ^{-1} est continue, donc φ est un homéomorphisme ; ce qui implique en particulier que E est un Banach.

On déduit de ce corollaire la proposition suivante.

PROPOSITION 22. - Soit E un Banach séparable, F et G des s. e. v. analytiques tels que $E = F \oplus G$. Alors F et G sont fermés.

Démonstration. - On considère

$$\psi : F \times G \longrightarrow E$$
$$(x', x'') \longmapsto x' + x'' .$$

On munit $F \times G$ de la topologie produit, qui peut être considérée comme une topologie d'espace vectoriel normé par $\|(x', x'')\| = \|x'\| + \|x''\|$.

Le produit $F \times G$ est analytique, et ψ est une bijection linéaire continue. La proposition 21 montre alors que $F \times G$ est un Banach. L'espace F, qui s'identifie à $F \times \{0\}$, fermé dans $F \times G$, est alors un Banach, donc un s. e. v. fermé de E ; de même pour G.

COROLLAIRE 23. - Soit E un Banach séparable ; soit F un s. e. v. de E de codimension finie. Alors si F est analytique, F est fermé.

C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente, puisque tout s. e. v. de dimension finie est fermé.

COROLLAIRE 24. - Soit E un Banach séparable ; soit F un s. e. v. de E de dimension dénombrable non finie. Alors F n'admet jamais de supplémentaire analytique.

En effet, F est analytique. S'il admettait un supplémentaire analytique, il serait fermé, ce qui est impossible d'après sa dimension.

On peut d'ailleurs énoncer un corollaire un peu plus général ; en effet, un s. e. v. analytique d'un Banach est, soit fermé, soit de première catégorie dans lui-même : c'est une conséquence du lemme 10 (voir aussi CHOQUET [2]). On peut alors énoncer le corollaire suivant.

COROLLAIRE 25. - Soit E un Banach séparable. Soit F un s. e. v. de E analytique, et de première catégorie dans lui-même. Alors F n'admet pas de supplémentaire analytique.

Remarque. - L'hypothèse " E séparable" est superflue dans les corollaires 23 et 24 (voir à nouveau [2]). On peut se demander, plus généralement, si cette hypothèse est réellement essentielle pour les autres assertions, en particulier, pour la proposition 19, où l'on remplace " $\mathcal{G}(f)$ analytique" par " $\mathcal{G}(f)$ borélien dans $E \times F$ ", et " F analytique" par " F espace de Banach". Ce qu'on sait des espaces de Banach la rend en effet vraisemblable dans ce cadre plus général.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BANACH (S.). - Théorie des opérations linéaires. - Warszawa, Semin. matem. Univ. Warsz., 1932 (Monografje Matematyczne, 1).

[2] CHOQUET (G.). - Opérations sur les espaces vectoriels topologiques métrisables, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 10e année, 1970/71, Communication n° 2, 5 p.

(Texte reçu le 3 février 1975)

Gilles GODEFROY
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05