Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse

Michèle Capon

Étude des fonctions affines boréliennes sur la boule unité de $f^{\infty}(n)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. nº C1, p. C1-C4

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A16_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, Communication n° 1, 4 p.

Novembre 1974

ÉTUDE DES FONCTIONS AFFINES BORÉLIENNES SUR LA BOULE UNITÉ DE $\ell^\infty(\underset{\sim}{N})$

par Michèle CAPON

En étudiant les propriétés des fonctions affines boréliennes qui vérifient le calcul barycentrique sur un convexe compact K , j'ai été amenée au problème suivant :

"Existe-t-il sur $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ une fonction affine borélienne qui vérifie le calcul barycentrique et non continue ?"

La réponse est négative. En utilisant le travail de CHRISTENSEN [1], nous pouvons donner une démonstration assez courte du théorème suivant.

THÉORÈME. - Toute fonction affine borélienne sur $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ est continue.

Démonstration. - Soit f une telle fonction nulle en 0 . Nous allons d'abord montrer que l'on peut supposer f positive sur $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, et nulle sur $[0]$, en appelant $[x]$ l'ensemble des y tels que $y - x$ ait un nombre fini de coordonnées non nulles.

Pour cela identifions $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ à la boule unité de $\mathcal{C}(\beta\underset{\sim}{N})$. La fonction f devient alors un élément μ de $\mathfrak{M}(\beta\underset{\sim}{N})$. Montrons que la mesure μ^+ définit une fonction borélienne sur $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$. Or il existe un élément φ de $L^1(\mu)$ tel que

$$|\varphi| = 1 \quad \text{et} \quad \mu = \varphi|\mu| .$$

On en déduit

$$\mu^+ = (\varphi^+/\varphi)\mu = \varphi^+ \mu .$$

Si h_n est une suite de fonctions continues sur $\beta\underset{\sim}{N}$ qui convergent μ-presque partout vers φ^+ , et qui vérifient $0 \leq h_n \leq 1$, alors $(h_n \mu)$ converge uniformément sur $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ vers μ^+ . Or $h_n \mu$ est une fonction borélienne sur $[-1,1]^{\mathbb{N}}$, car

$$(h_n \mu)(x) = \mu(h_n x)$$

donc μ^+ est borélienne.

Supposons donc f positive, et notons

$$e_p = (\delta_{np})_{n\in\underset{\sim}{N}} ,$$
$$u = \sum_{p=1}^{\infty} e_p = (1, 1, 1, \ldots) .$$

On a

$$\sum_{p=1}^{n} e_p \leq u$$

donc

$$\sum_{p=1}^{n} f(e_p) \leqslant f(u) .$$

Posons

$$g(x) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p \, f(e_p) .$$

D'après ce qui précède g est continue, et $g(x) \leqslant f(x)$ si x est positif, car on a

$$\sum_{p=1}^{n} x_p \, f(e_p) \leqslant f(x) \quad \text{pour tout} \quad n .$$

La fonction $(f - g)$ est donc positive et nulle sur $[0]$. Dans la suite, nous supposerons donc que f est positive et constante sur $[x]$ pour tout x.

LEMME 1. - Il existe un G_δ partout dense dans $K = [0\ 1]^{\mathbb{N}}$, A, tel que $f|_A$ soit continue.

Ceci est un résultat général sur les fonctions qui possèdent la propriété de Baire ([2], page 306).

LEMME 2. - Si A est un G_δ partout dense de $K = [-1 , 1]^{\mathbb{N}}$, alors il existe x dans $[-1 , 1]^{\mathbb{N}}$ tel que $[x] \cap A$ soit dense.

Posons

$$K' = \prod_{i,j \in \mathbb{N}^2} M_{i,j} \quad \text{avec} \quad M_{i,j} = [0 , 1] ,$$

$$K' = \prod_{i=1}^{\infty} M_{i,1} \times \prod_{i=1, j>1}^{\infty} M_{i,j} = K \times K'' .$$

Soit P la projection de $\overline{K}$ sur K : c'est une application continue, surjective et ouverte de K' sur K. On vérifie aisément que ces trois propriétés impliquent

$$\overline{\overline{p}^{1}(A)} = \overline{p}^{1}(\overline{A})$$

donc $A' = \overline{p}^{1}(A)$ est un G_δ partout dense dans K'.

Soit maintenant T le groupe (dénombrable) des homéomorphismes de K' formés par les permutations d'un nombre fini d'indices (i , j). Pour tout élément t de T, $t(A')$ est un G_δ dense dans A', donc il en est de même pour

$$B = \bigcap_{t \in T} t(A') .$$

Désignons par C l'ensemble des y de K' tels que $T(y)$ soit dense dans K'. Si $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une base dénombrable d'ouverts de K', alors C est l'ensemble des y tels que, pour tout n, il existe t dans T tel que $t(y)$ soit dans O_n.

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \in T} t(O_n) .$$

Il est facile de vérifier que $\bigcup_{t \in T} t(O_n)$ est dense dans K'. Donc C est un G_δ dense dans K'.

Par conséquent, $B \cap C$ n'est pas vide. Posons $x = P(y)$, où y est dans $B \cap C$. Montrons que $[x] \cap A$ est dense dans K. En effet, pour tout t de T, on a

$$P(t(y)) \in [Py] = [x]$$

donc

$$P(Ty) \subset [x] .$$

Comme de plus y est dans B, Ty est dans A', donc

$$P(Ty) \subset A$$

d'où

$$P(Ty) \subset [x] \cap A .$$

Comme P est une application fermée

$$P(\overline{Ty}) = \overline{P(Ty)} \subset \overline{[x] \cap A} .$$

Or $\overline{Ty} = K'$, donc $K \subset \overline{[x] \cap A}$.

C. Q. F. D.

LEMME 3. - La fonction f est constante et égale à $\frac{1}{2} f(u)$ sur A.

En effet f est constante sur $[x_0]$ et continue sur A, donc elle est constante sur A si $[x_0] \cap A$ est dense.

Considérons l'homéomorphisme $x \overset{\Phi}{\longmapsto} (u - x)$ de K dans K, $\Phi(A)$ est un G_δ dense, donc $A \cap \Phi(A)$ est non vide. Si x est dans $A \cap \Phi(A)$, alors

$$x = u - y \quad \text{avec} \quad y \in A , \quad x \in A ,$$

donc $u = x + y$.

Par suite $f(u) = f(x) + f(y) = 2f(x)$. La valeur de f sur A est donc $\frac{1}{2} f(u)$. Montrons que cette valeur est nulle. Comme f est positive, elle sera nulle si $f(u) = 0$. Ceci va résulter du lemme suivant.

LEMME 4. - Si A est un G_δ dense dans K, alors il existe x, y, z dans A tels que $x = y + z$.

On définit deux fonctions de K^2 sur K qui sont continues, surjectives et ouvertes en posant

$$g(a, b) = a.(u - b) ,$$

$$h(a, b) = a.b .$$

Par le même argument que précédemment, on voit que $g^{-1}(A)$ et $h^{-1}(A)$ sont des G_δ denses dans K^2. Soit (a, b) un élément de $g^{-1}(A) \cap h^{-1}(A) \cap (A \times G)$.

Posons

$$a = x ,$$
$$g(a , b) = y ,$$
$$h(a , b) = z .$$

x , y , z sont dans A et $y + z = x$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHRISTENSEN (J. P. R.). - Borel structures and a topological zero-one law, Math. Scand., Kobenhavn, t. 29, 1971, p. 245-255.

[2] KURATOWSKI (C.). - Topologie, Vol. 1, 4e édition. - Warszawa, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958 (Polska Akademia Nauk. Monografie Matematyczne, 20).

(Texte reçu le 16 janvier 1975)

Michèle CAPON
Université de Paris-Sud
Mathématiques, Bâtiment 425
91405 ORSAY