

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

PAULETTE SAAB

Représentation intégrale dans des sous-espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 23, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A15_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DANS DES SOUS-ESPACES
DE FONCTIONS À VALEURS VECTORIELLES

par Paulette SAAB

Soient X un espace compact, F un espace de Banach, et $C(X, F)$ l'espace des applications continues de X dans F , muni de la norme uniforme.

Si A est un sous-espace vectoriel fermé de $C(X)$ qui sépare les points de X , désignons par $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$ le sous-espace vectoriel fermé de $C(X, F)$, associé à A et F .

Dans cette note, nous nous proposons de représenter les éléments du dual de $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$, par des mesures vectorielles sur X , à valeurs dans F' , qui sont maximales.

Pour cela, au paragraphe 1, nous étendons un théorème de sélection borélienne de M. RAO [5], en supprimant, dans son théorème, l'hypothèse que le sous-espace A contient les constantes.

Nous utilisons ce théorème de sélection borélienne, pour démontrer, au paragraphe 2, un théorème de représentation intégrale, dans le cas où le compact X est métrisable.

Enfin, nous étudions au paragraphe 3, le cas où le compact X est quelconque, mais que F' possède la propriété de Radon-Nikodym. Nous donnons alors une démonstration directe du théorème de représentation intégrale, nous utilisons pour cela un théorème de CHOQUET [2] et un théorème de GROTHENDIECK [4].

0. Rappels et notations.

Produit tensoriel topologique d'espaces de Banach. - Si M et N sont deux espaces vectoriels, désignons par $\mathcal{B}(M, N)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $M \times N$.

Soit

$$\begin{aligned} \chi : M \times N &\longrightarrow \mathcal{B}(M, N)^* \\ (x, y) &\longrightarrow \chi(x, y), \end{aligned}$$

où $\langle \chi(x, y), h \rangle = h(x, y)$ pour tout $h \in \mathcal{B}(M, N)$.

On appelle produit tensoriel de M et N , noté $M \otimes N$, l'espace vectoriel engendré par $\chi(M \times N)$.

L'élément $\chi(x, y)$ est noté $x \otimes y$.

Si M et N sont deux espaces de Banach, on peut définir sur $M \otimes N$ les deux

normes suivantes, avec $u \in M \otimes N$:

$$(1) \quad \|u\|_{\pi} = \inf \sum_{i \leq n} \|x_i\| \|y_i\| ,$$

où l'inf est pris sur toutes les représentations finies de u sous la forme $u = \sum_{i \leq n} x_i \otimes y_i$.

$$(2) \quad \|u\|_{\varepsilon} = \sup_{\|x'\| \leq 1, x' \in M', \|y'\| \leq 1, y' \in N'} |\sum \langle x', x_i \rangle \langle y', y_i \rangle| .$$

Nous noterons par $M \otimes_{\pi} N$ (resp. $M \otimes_{\varepsilon} N$) l'espace $M \otimes N$ muni de la norme π (resp. la norme ε), et par $M \tilde{\otimes}_{\pi} N$ et $M \tilde{\otimes}_{\varepsilon} N$ leurs complétés respectifs.

Ceci étant, si X est un espace compact et F un espace de Banach, désignons par $C(X, F)$ l'espace des applications continues de X dans F muni de la norme uniforme :

$$(\forall f \in C(X, F)) \quad \|f\| = \sup_{s \in X} \|f(s)\| .$$

Si $g \in C(X)$ et $x \in F$, soit $g \otimes x$ la fonction de $C(X, F)$, définie par

$$(\forall s \in X) \quad \langle g \otimes x, s \rangle = g(s).x .$$

Il est bien connu (voir [6], IV, §2) que $C(X, F)$ est isométrique à $C(X) \tilde{\otimes}_{\varepsilon} F$. Il s'en suit que

$$(h \in C(X, F)) \iff (\text{il existe } (h_k)_k \subseteq C(X) \otimes_{\varepsilon} F ; h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k) ,$$

où la série converge uniformément pour la norme uniforme dans $C(X, F)$.

Si G est un espace de Banach, nous désignerons par $B(G)$ sa boule unité et par G' son dual topologique.

Si Z est un espace compact, nous désignerons par

$$M(Z) = \text{l'espace des mesures de Radon sur } X$$

$$M_1(Z) = \{\mu \in M(Z) ; \|\mu\| \leq 1\}$$

$$M^+(Z) = \{\mu \in M(Z) ; \mu \geq 0\}$$

$$M_1^+(Z) = \{\mu \in M^+(Z) ; \|\mu\| = 1\} .$$

1. Sur un théorème de sélection borélienne.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par (X, A) un couple, où X est un espace compact et A un sous-espace fermé de $C(X)$ qui sépare les points de X .

Nous savons que, sous ces conditions, nous pouvons plonger X homéomorphiquement dans $B(A')$, munie de la topologie $\sigma(A', A)$. Soit

$$\varphi : X \longrightarrow B(A')$$

$$x \longmapsto \varphi(x) = \varepsilon_x|_A$$

X s'identifie ainsi à un sous-compact de $B(A')$, et A à $A_0(B(A'))$, l'espace des applications affines réelles continues sur $B(A')$ qui sont nulles en 0 :

$$A \longmapsto A_0(B(A'))$$

$$a \longmapsto \text{Re } \hat{a}|_{B(A')} \quad \text{où } \langle \hat{a}, a' \rangle = \langle a', a \rangle, \quad \forall a' \in B(A') .$$

Remarquons que l'ensemble $\mathcal{E}_{xt}(B(A'))$ des points extrémaux de $B(A')$ est inclus dans $T.\varphi(X)$ (où $T = \{t \in \underline{\mathbb{C}} ; |t| = 1\}$), d'où la définition suivante.

Définition 1.1 (CHOQUET [2]). - On appelle frontière module associée à un couple (X, A) , l'ensemble $\mathcal{E}_m(X, A) = X \cap \mathcal{E}_{xt}(B(A'))$.

Définition 1.2 (CHOQUET [2]). - Soient X un espace compact, et A un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X . Une mesure $\mu \in M(X)$ est dite maximale si $|\varphi(\mu)|$, la valeur absolue de l'image de μ par φ , est maximale pour l'ordre de Choquet ([1], 26.6), défini sur $M^+(B(A'))$.

PROPOSITION 1.3. - Soient X un compact métrisable, et A un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X . Une mesure $\mu \in M(X)$ est maximale si, et seulement si, μ est portée par $\mathcal{E}_m(X, A)$, i. e. $|\mu|(X \setminus \mathcal{E}_m(X, A)) = 0$.

Démonstration. - Il suffit de remarquer que X est identifié à un sous-compact de $B(A')$ et qu'une mesure positive sur $B(A')$ est maximale si, et seulement si, elle est portée par $\mathcal{E}_{xt}(B(A'))$ ([1] 27.5).

Définition 1.4. - Soient μ et ν deux éléments de $M(X)$; nous dirons que

$$\mu \sim_A \nu$$

si, et seulement si, $\int f d\mu = \int f d\nu$ pour tout $f \in A$.

Ceci étant nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1.5. - Soient X un compact métrisable, et A un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X ; il existe alors une sélection borélienne, $a' \longmapsto \mu_{a'}$, de $B(A')$ dans $M_1(X)$ telle que, pour tout $a' \in B(A')$,

(i) $\int a d\mu_{a'} = \langle a', a \rangle$ pour tout $a \in A$,

(ii) $\mu_{a'}$ est maximale.

Démonstration. - Or il résulte d'un théorème classique (voir [9]) que, sous les hypothèses du théorème 15, il existe une sélection borélienne

$$\lambda : B(A') \longrightarrow M_1^+(B(A'))$$

$$a' \longmapsto \lambda a'$$

telle que, pour tout $a' \in B(A')$,

(i) $\lambda a'$ est de barycentre a' .

(ii) $\lambda a'$ est portée par $\mathcal{E}_{xt}(B(A'))$.

La relation (i) implique que, pour tout $a' \in B(A')$,

$$\int a d\lambda_{a'} = \langle a', a \rangle \text{ pour tout } a \in A.$$

D'autre part, puisque $\mathcal{E}_{xt}(B(A')) \subseteq T.\varphi(X)$, pour tout $a' \in B(A')$, la mesure

$\lambda a'$ est donc portée par $T.\varphi(X)$.

Or nous avons le lemme suivant :

LEMME 1.6 (FUHR et PHELPS [3]). - L'application continue $(t, x) \longmapsto t\varphi(x)$ de $T \times X$ dans $T.\varphi(X)$, admet une sélection borélienne ψ telle que, pour tout $a' \in T.\varphi(X)$,

$$\psi(a') = (t, x) \text{ où } t\varphi(x) = a' .$$

Notons par $\Psi : M(T.\varphi(X)) \longmapsto M(T \times X)$, l'extension de ψ aux espaces de mesures.

D'autre part, nous pouvons définir une application $H : M_1^+(T \times X) \longmapsto M_1(X)$ de la façon suivante : pour tout $\nu \in M_1^+(T \times X)$,

$$\langle H\nu, f \rangle = \int_{T \times X} t f(x) d\nu(t, x) \text{ pour tout } f \in C(X) .$$

La démonstration du théorème 1.5 est achevée. L'application cherchée s'obtient en composant les applications boréliennes H , Ψ et λ comme l'indique le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} B(A') & \longmapsto & M_1(X) \\ \lambda \downarrow & & \uparrow H \\ M_1^+(B(A')) & \xrightarrow{\Psi} & M_1^+(T \times X) \end{array}$$

pour $a' \in B(A')$, soit donc $\mu_{a'} = H \circ \Psi(\lambda_{a'})$; pour tout $a \in A$, nous avons :

$$(i) \quad \int ad\mu_{a'} = \int \hat{a}d\lambda_{a'} = \langle a', a \rangle$$

(ii) puisque $\lambda_{a'}$ est portée par $\mathcal{E}_{xt}(B(A'))$, $\Psi(\lambda_{a'})$ est portée par l'ensemble

$$\{(t, y) \in T \times X ; \varphi(y) \in \mathcal{E}_{xt}(B(A'))\} = T \times \mathcal{E}_m(X, A) ,$$

d'où $\mu_{a'}$ est portée par $\mathcal{E}_m(X, A)$.

Ceci étant, nous pouvons étendre, grâce au théorème 1.5, un théorème de M. RAO [5] en supprimant, dans son théorème, l'hypothèse que le sous-espace A contient les constantes.

THÉORÈME 1.7. - Soient X un compact métrisable, et A un sous-espace fermé de $C(X)$ qui sépare les points de X . Il existe alors une sélection borélienne $x \longmapsto \mu_x$ de X dans $M_1(X)$ telle que, pour tout $x \in X$,

$$(i) \quad \varepsilon_x \sim_A \mu_x ,$$

$$(ii) \quad \mu_x \text{ est maximale.}$$

2. Représentation intégrale dans le cas où le compact X est métrisable.

Soient X un compact, et F un espace de Banach. Soit $C(X, F)$ l'espace de fonctions continues de X dans F muni de la norme uniforme.

Soit $\mathcal{B}(X)$ la tribu des boréliens de X .

Définition 2.1. - Soient X un compact, F un espace de Banach, et ν une application de $\mathcal{B}(X)$ dans F' .

Pour tout $x \in F$, désignons par $\langle x, \nu \rangle$, l'application définie sur $\mathcal{B}(X)$ et à valeurs scalaires :

$$\langle x, \nu \rangle(E) = \langle x, \nu(E) \rangle \text{ pour tout } E \in \mathcal{B}(X).$$

On appelle mesure vectorielle sur X à valeurs dans F' , toute application $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow F'$ telle que :

$$(\text{pour tout } x \in F) \quad [\langle x, \nu \rangle \in M(X)].$$

Si ν est une telle mesure vectorielle sur X , à valeurs dans F' , nous définissons sa variation de la façon suivante : pour tout $E \in \mathcal{B}(X)$,

$$|\nu|(E) = \sup_{\mathcal{E}} \sum_{i \leq n} \|\nu(E_i)\|$$

où le \sup est pris sur toutes les partitions finies \mathcal{E} de E , formées d'éléments de $\mathcal{B}(X)$.

Nous dirons que ν est à variation totale finie si $|\nu|(X) < +\infty$.

Dans la suite nous noterons par $M(X, F')$ l'ensemble des mesures vectorielles sur X à valeurs dans F' , qui sont à variation totale finie.

$M(X, F')$ muni de la norme $\nu \mapsto |\nu|(X)$ est un espace de Banach.

Rappelons (voir [8]) que $M(X, F')$ est isométrique à $\mathcal{C}(X, F)'$, le dual de $\mathcal{C}(X, F)$; l'isométrie entre $M(X, F')$ et $\mathcal{C}(X, F)'$ est définie de la façon suivante : si $\nu \in M(X, F')$ et $g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k$, où $g_k = \sum_{i \leq n_k} f_i^k \otimes x_i^k$,

$$\langle \nu, g \rangle = \sum_k \sum_{i \leq n_k} \int f_i^k d \langle x_i^k, \nu \rangle.$$

Si A est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ considérons $A \tilde{\otimes}_{\varepsilon} F$.

Il est clair que si A sépare les points de X , il en est de même de $A \tilde{\otimes}_{\varepsilon} F$.

Comme dans le cas des mesures scalaires, nous pouvons définir une relation d'équivalence dans $M(X, F')$ relativement à $A \tilde{\otimes}_{\varepsilon} F$.

Définition 2.2. - Soient μ et ν deux éléments de $M(X, F')$, nous dirons, par définition, que $[\mu \sim \nu]$ si, et seulement si, $\mu = \nu$ sur $A \tilde{\otimes}_{\varepsilon} F$.

Le lemme suivant est immédiat.

LEMME 2.3. - Si μ et ν sont deux éléments de $M(X, F')$, alors nous avons :

$$[\mu \sim \nu] \text{ si, et seulement si, pour tout } x \in F, [\langle x, \mu \rangle \sim_A \langle x, \nu \rangle].$$

Définition 2.4. - Soit μ un élément de $M(X, F')$. μ est dite maximale si, et seulement si,

($\forall x \in F$) [$\langle x, \mu \rangle$ est maximale].

LEMME 2.5. - Si $\mu \in M(X, F')$, pour tout borélien E de X , nous avons :

$$|\langle x, \mu \rangle|(E) \leq \|x\| |\mu|(E) \quad (\forall x \in F).$$

La démonstration du lemme 2.5 est immédiate d'après la définition de la variation d'une mesure.

Définition 2.6. - Soient $\mu \in M(X, F')$ et $E \in \mathcal{B}(X)$, nous dirons que μ est portée par E si, $|\mu|(X \setminus E) = 0$.

Compte tenu du lemme 2.5, de la définition de la variation d'une mesure, et de la proposition 1.3, nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 2.7. - Soit μ un élément de $M(X, F')$. Supposons que le compact X soit métrisable, les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

- (i) μ est maximale,
- (ii) μ est portée par $\mathcal{E}_m(X, A)$.

Passons maintenant à l'étude du dual de $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$.

Or, $A \otimes_\varepsilon F$ est dense dans $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$, d'où $(A \otimes_\varepsilon F)'$ est isométrique à $(A \tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$.

Or $A \otimes_\varepsilon F$ s'injecte isométriquement dans $\mathcal{C}(B(A') \times B(F'))$.

Soit I cette injection canonique.

$$I : \quad A \otimes_\varepsilon F \longmapsto \mathcal{C}(B(A') \times B(F'))$$

$$u = \sum_{i \leq n} a_i \otimes x_i \longmapsto I(u)$$

où $\langle I(u), (a', x') \rangle = \sum_{i \leq n} \langle a', a_i \rangle \langle x', x_i \rangle$, $\forall (a', x') \in B(A') \times B(F')$.

Il s'en suit que, si $L \in (A \otimes_\varepsilon F)'$, il existe $\theta \in M(B(A') \times B(F'))$ telle que :

- (i) $\theta \circ I = L$,
- (ii) $\|\theta\| = \|L\|$.

La relation (i) est équivalente à :

$$(\forall u = \sum_{i \leq n} a_i \otimes x_i \in A \otimes_\varepsilon F) \left[\langle L, u \rangle = \int_{B(A') \times B(F')} \sum_{i \leq n} \langle a', a_i \rangle \langle x', x_i \rangle d\theta(a', x') \right].$$

THÉORÈME 2.8. - Soient X un compact métrisable, A un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X , et F un espace de Banach. Tout élément L de $(A \tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$ se représente par un élément ν de $M(X, F')$ tel que :

- (i) $\langle L, u \rangle = \langle \nu, u \rangle$ pour tout $u \in A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$,
- (ii) $\|\nu\| = \|L\|$,
- (iii) ν est maximale.

Démonstration. - Soit $L \in (A \tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$, il existe $\theta \in M(B(A') \times B(F'))$ telle que :

$$(i) \quad \|\theta\| = \|L\| ,$$

$$(ii) \quad \theta = L \text{ sur } A \otimes_\varepsilon F .$$

Or le théorème 1.5 implique qu'il existe une sélection borélienne $a' \longmapsto \mu_{a'}$, de $B(A')$ dans $M_1(X)$ telle que :

$$1^\circ \quad \int \text{ad}\mu_{a'} = \langle a' , a \rangle \text{ pour tout } a \in A ,$$

$$2^\circ \quad \mu_{a'} \text{ est maximale.}$$

Si $\mu \in M(X)$ et $x' \in F'$, soit $\mu \otimes x'$ l'élément de $M(X, F')$ défini par :

$$\langle \mu \otimes x' , E \rangle = \mu(E) \cdot x' , \quad \forall E \in B(X) .$$

L'application

$$\begin{aligned} B(A') \times B(F') &\longmapsto M(X, F') \\ (a' , x') &\longmapsto \mu_{a'} \otimes x' \end{aligned}$$

est borélienne. De plus, elle est bornée car :

$$\|\mu_{a'} \otimes x'\| = \|\mu_{a'}\| \|x'\| \leq 1 , \quad \forall (a' , x') \in B(A') \times B(F') .$$

Il s'en suit que l'application

$$\begin{aligned} B(A') \times B(F') &\longmapsto M(X, F') \\ (a' , x') &\longmapsto \mu_{a'} \otimes x' \end{aligned}$$

est $\sigma(M(X, F'), \mathcal{C}(X, F))$ universellement intégrable.

Considérons alors l'intégrale faible :

$$\nu = \int_{B(A') \times B(F')} \mu_{a'} \otimes x' d\theta(a' , x') , \quad \nu \in M(X, F') ,$$

et ν est la mesure cherchée. En effet :

(i) Pour démontrer que $\nu = L$ sur $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$, il suffit de le vérifier sur les éléments $a \otimes x$, où $a \in A$ et $x \in F$. Or

$$\langle \nu , a \otimes x \rangle = \int_{B(A') \times B(F')} \langle \mu_{a'} , a \rangle \langle x' , x \rangle d\theta(a' , x') .$$

Puisque $\int \text{ad}\mu_{a'} = \langle a' , a \rangle$, pour $a \in A$,

$$\begin{aligned} \langle \nu , a \otimes x \rangle &= \int_{B(A') \times B(F')} \langle a' , a \rangle \langle x' , x \rangle d\theta(a' , x') \\ &= L(a \otimes x) . \end{aligned}$$

(ii) D'après sa définition, $\|\nu\| \leq \|\theta\| = \|L\|$, puisque $L = \nu|_{A \tilde{\otimes}_\varepsilon F}$, il s'en suit que $\|\nu\| = \|L\|$.

Il reste à prouver la maximalité de ν .

Considérons l'application

$$\begin{aligned} B(A') \times B(F') &\longmapsto M^+(X) \\ (a', x') &\longmapsto |\mu_{a'}| \|x'\| \end{aligned}$$

elle se factorise en deux applications boréliennes :

$$\begin{array}{ccc} B(A') \times B(F') &\longrightarrow & M_1(X) \times B(F') \\ (a', x') &\longrightarrow & (\mu_{a'}, x') \\ & \searrow & \downarrow \\ & & M^+(X) \\ & & |\mu_{a'}| \|x'\| \end{array}$$

elle est donc borélienne. Il s'en suit que $\int_{B(A') \times B(F')} |\mu_{a'}| \|x'\| d|\theta|(a', x')$ a un sens et nous vérifions que :

$$|\nu| \leq \int_{B(A') \times B(F')} |\mu_{a'}| \|x'\| d|\theta|(a', x') .$$

Comme $\forall a' \in B(A')$,

$$|\mu_{a'}|(X \setminus \mathcal{E}_m(X, A)) = 0 ,$$

il s'en suit que

$$|\nu|(X \setminus \mathcal{E}_m(X, A)) = 0 ,$$

ce qui prouve, d'après (2.7), que ν est maximale.

COROLLAIRE 29. - Soient X un compact métrisable, A un sous-espace de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de A , et F un espace de Banach.

Pour toute mesure $\mu \in M(X, F')$, il existe $\nu \in M(X, F')$ telle que :

- (i) $\nu \sim \mu$,
- (ii) $\|\nu\| \leq \|\mu\|$,
- (iii) ν est maximale.

Démonstration. - Il suffit d'appliquer le théorème 2.8 à $L = \mu|_{A \otimes F}$.

3. Représentation intégrale dans le cas où F' possède la propriété de Radon-Nikodym.

Dans [2], G. CHOQUET a démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. - Soient X un compact, et A un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X . Alors tout élément ℓ du dual de A se représente par une mesure de Radon α sur X telle que :

- (i) $\int a d\alpha = \ell(a)$ pour tout $a \in A$,
- (ii) $\|\alpha\| = \|\ell\|$
- (iii) α est maximale.

D'où le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.2. - Pour toute mesure de Radon $\beta \in M(X)$, il existe $\alpha \in M(X)$ telle que :

- (i) $\alpha \sim_A \beta$,
- (ii) $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$,
- (iii) α est maximale.

Définition 3.3. - On dit qu'un espace de Banach G possède la propriété de Radon-Nikodym si, pour tout espace mesuré (S, Σ, P) de mesure finie, et toute mesure m sur Σ à valeurs dans G , absolument continue par rapport à P et de variation finie, il existe une application f de S dans G , intégrable au sens de Bochner, et telle que

$$m(E) = \int_E f dP, \text{ pour tout } E \in \Sigma.$$

Parmi les espaces de Banach qui ont la propriété de Radon-Nikodym, nous distinguons les espaces réflexifs et les duaux séparables d'espaces de Banach.

Soient X un espace compact, et F un espace de Banach.

Rappelons (voir [4]) que si F' possède la propriété de Radon-Nikodym, alors $M(X, F')$ est isométrique à $M(X) \tilde{\otimes}_{\pi} F'$.

Ceci étant, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 3.4. - Soient X un compact, A un sous-espace fermé de $C(X)$ qui sépare les points de X , et F un espace de Banach tel que F' possède la propriété de Radon-Nikodym.

Pour tout élément L du dual de $A \tilde{\otimes}_{\varepsilon} F$ et tout $\delta > 0$, il existe $\nu \in M(X, F')$ telle que :

- (i) $\nu = L$ sur $A \tilde{\otimes}_{\varepsilon} F$,
- (ii) $\|\nu\| \leq \|L\| + \delta$,
- (iii) ν est maximale.

Démonstration. - Soit $L \in (A \tilde{\otimes}_{\varepsilon} F)'$; le théorème de Hahn-Banach implique qu'il existe $\mu \in M(X, F')$ telle que :

- (i) $\mu|_{A \tilde{\otimes}_{\varepsilon} F} = L$,
- (ii) $\|\mu\| = \|L\|$.

Puisque F' possède la propriété de Radon-Nikodym, nous pouvons considérer que $\mu \in M(X) \tilde{\otimes}_{\pi} F'$.

Soit $\delta > 0$. D'après ([7] 6.4, III), il existe $(\mu_n)_n \subseteq M(X)$ et $(x'_n)_n \subseteq F'$;

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \otimes x'_n \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \|\mu_n\| \|x'_n\| \leq \|\mu\| + \delta.$$

Or le corollaire 3.2 implique que, $(\forall n \in \underline{\mathbb{N}})$, il existe $\nu_n \in M(X)$ telle que :

- (i) $\nu_n \sim_A \mu_n$,
- (ii) $\|\nu_n\| \leq \|\mu_n\|$,
- (iii) ν_n est maximale.

Considérons l'élément

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n \otimes x'_n.$$

La relation (ii) implique que $\sum_{n=0}^{\infty} \|\nu_n\| \|x'_n\| < +\infty$, donc $\nu \in M(X) \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} F'$ de plus

$$\|\nu\| \leq \|\mu\| + \delta = \|L\| + \delta,$$

et $\nu \sim \mu$, donc $\nu|_{A \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} F} = L$.

Il reste à prouver la maximalité de ν , or il est facile de vérifier que

$$|\nu| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\nu_n| \|x'_n\|.$$

Puisque pour tout $n \in \underline{\mathbb{N}}$, ν_n est maximale, alors ν l'est aussi.

Donc ν répond bien aux conditions du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHOQUET (G.). - Lecture on analysis, vol. 2. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).
- [2] CHOQUET (G.). - Frontière-module et représentation intégrale, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 11e-12e années, 1971-1973, n° 8, 4 p.
- [3] FUHR (R.) and PHELPS (R. R.). - Uniqueness of complex representing measures on the Choquet boundary, J. functional Analysis, t. 14, 1973, p. 1-27.
- [4] GROTHENDIECK (A.). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).
- [5] RAO (M.). - Measurable selections of representing measures, Quart. J. Math., Oxford, Series 2, t. 22, 1971, p. 571-573.
- [6] SCHAEFER (H. H.). - Banach lattices and positive operators. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1974 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 215).
- [7] SCHAEFER (H. H.). - Topological vector spaces. - New York, Macmillan Company ; London, Collier-Macmillan, 1966 (Macmillan Series in advanced Mathematics and theoretical Physics).
- [8] SINGER (I.). - Linear functionals on the space of continuous mappings of a compact space into a Banach space [en russe], "Hommage à S. STOÏLOW pour son 70e anniversaire", Revue Math. pure et appl., Bucuresti, t. 2, 1957, p. 301-315.
- [9] VINCENT-SMITH (G. F.). - Measurable selection of simplicial maximal measures, J. London math. Soc., Series 2, t. 7, 1973, p. 427-428.

(Texte reçu le 16 juin 1975)