Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

MARYVONNE DAGUENET

# Propriété de Baire de βN muni d'une nouvelle topologie et application à la construction d'ultrafiltres

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 14 (1974-1975), exp. n° 14, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A10_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 14, 3 p. 
27 février 1975

# PROPRIÉTÉ DE BAIRE DE $\beta N$ MUNI D'UNE NOUVELLE TOPOLOGIE ET APPLICATION À LA CONSTRUCTION D'ULTRAFILTRES

par Maryvonne DAGUENET

## Résumé

Notations. - $N$ désigne l'ensemble des entiers ; $\mathcal{P}(N)$ (resp. $\mathcal{P}_f(N)$ , resp. $\mathcal{P}_\infty(N)$) désigne l'ensemble des parties (resp. finies, resp. infinies) de $N$ ; $\mathcal{P}(N)$ est identifié à $\{0 , 1\}^N$ muni de la topologie produit.

$\beta N$ désigne l'ensemble des ultrafiltres sur $N$ ; si $h : N \to N$ , alors $h$ se prolonge de $\beta N$ à $\beta N$ .

Soient $h : N \to N$ , et $A \subset N$ ; $h|A$ désigne la restriction de $h$ à $A$ .

Soit $h : N \to N$ ; $h$ est dite finijective si, pour tout $n \in N$ , l'ensemble $h^{-1}(n)$ est fini.

Définitions. - Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre libre sur $N$ .

$\mathfrak{U}$ est $\delta$-stable si, $\forall\ h : N \to N$ , $\exists\ A \in \mathfrak{U}$ tel que $h|A$ est constante ou finijective.

$\mathfrak{U}$ est rare si, $\forall\ h : N \to N$ finijective, $\exists\ A \in \mathfrak{U}$ tel que $h|A$ est injective.

$\mathfrak{U}$ est absolu si $\mathfrak{U}$ est $\delta$-stable et rare.

$\mathfrak{U}$ est rapide si, $\forall\ X \in \mathcal{P}_\infty(N)$ , il existe une dilatation de $N$ , $\theta$ , telle que $\theta(X) \in \mathfrak{U}$ , une dilatation étant une application $\theta : N \to N$ telle que, pour tout $n$ , $\theta(n) \geqslant n$ .

$\mathfrak{U}$ a la propriété $C$ si, $\forall\ f , g : N \to N$ , soit $\{n ; f(n) = g(n)\} \in \mathfrak{U}$ , soit $f(\mathfrak{U}) \neq g(\mathfrak{U})$ .

Topologie habituelle sur $\beta N$ . - Les ouverts élémentaires sont les

$$\check{A} = \{\mathfrak{U} \in \beta N ; A \in \mathfrak{U}\}$$

pour tout $A \subset N$ .

Des exemples de fermés sont les $\check{\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{U} \in \beta N ; \mathfrak{F} \subset \mathfrak{U}\}$ pour tout filtre $\mathfrak{F}$ sur $N$ .

Attention : Bien distinguer le filtre $\mathfrak{F}$ (qui en tant que partie de $\mathcal{P}(N)$ peut être analytique, ou borélien, ou ...) du fermé $\check{\mathfrak{F}}$ de $\beta N$ . Noter que si $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ , alors $\check{\mathfrak{G}} \subset \check{\mathfrak{F}}$ .

Topologie nouvelle sur $\beta N$ . - Soit $\Omega$ une famille de fermés (habituels) de $\beta N$ comprenant tous les fermés $\check{A}$ pour $A \subset N$ d'une part, et stable par intersection finie et intersection dénombrable décroissante d'autre part. Prenons comme ouverts élémentaires de la nouvelle topologie sur $\beta N$ tous les fermés appartenant à $\Omega$ . Pour cette topologie, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME. - L'intersection de $\aleph_1$ ouverts partout denses est partout dense.

Exemples.

$\Omega_1 = \{\check{\mathfrak{F}} ; \mathfrak{F}$ est un filtre analytique$\}$ ,

$\Omega_2 = \{\check{\mathfrak{F}} ; \mathfrak{F}$ est un filtre $K_\sigma\}$ ,

$\Omega_0 = \{\bigcap_n \check{A}_n\}$ (BLASS).

Notations. - Un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ est dit image d'un ultrafiltre $\mathcal{E}$ s'il existe $h : N \longrightarrow N$ tel que $\mathfrak{D} = h(\mathcal{E})$ .

Si $h : N \longrightarrow N$ est telle que, pour tout $n \in N$ , $h^{-1}(n)$ est infini,

$$\{N \dot{-} X ; \ h(X) \text{ est fini ou } h|X \text{ est finijective}\}$$

engendre un filtre $K_{\sigma\delta\sigma}$, noté $\mathfrak{N}_h$ .

Si $g : N \longrightarrow N$ est telle que la cardinalité de $g^{-1}(n)$ tend vers l'infini,

$$\{N \dot{-} X ; \ g|X \text{ est injective}\}$$

engendre un filtre $K_\sigma$ , noté $\mathfrak{M}_g$ .

Si $A \subset N$ est de densité nulle à l'infini, $(\{N \dot{-} \theta(A)\})$ pour toutes les dilatations $\theta$ de $N$ dans $N$ , engendre un filtre $K_\sigma$ noté $\mathfrak{R}_A$ .

A une partie $R$ de $N^2$ correspond un graphe $GR$ dont les sommets sont les entiers, et dont les arêtes correspondent aux couples $(a , b) \in R$ . Quel que soit

$$\rho : N \longrightarrow N^2 ,$$

posons

$$\mathfrak{P}_\rho = \rho^{-1} \{N^2 - X ; \ GX \text{ est finiment coloriable}\} ;$$

$\mathfrak{P}_\rho$ est un filtre $K_\sigma$ .

Dans $\beta N$ muni de la topologie des filtres analytiques (exemple $\Omega_1$ ) :

L'ensemble des ultrafiltres $\delta$-stables est un fermé, d'intérieur vide (SIERPINSKI) ; si $h : N \longrightarrow N$ , alors $h : \beta N \longrightarrow \beta N$ est continue et ouverte,

l'ensemble des ultrafiltres rares est un fermé, d'intérieur vide (MATHIAS, BAUMGARTNER),

l'ensemble des ultrafiltres rapides, également (LOUVEAU),

l'ensemble des ultrafiltres ayant la propriété C également.

Conséquences : si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ : existence de "beaucoup" d'ultrafiltres dont aucune image n'est $\delta$-stable ni rare (PITT), dont aucune image n'est rapide, et dont aucune image n'a la propriété C .

Dans $\beta N$ muni de la topologie des filtres $K_\sigma$ (exemple $\Omega_2$ ) :

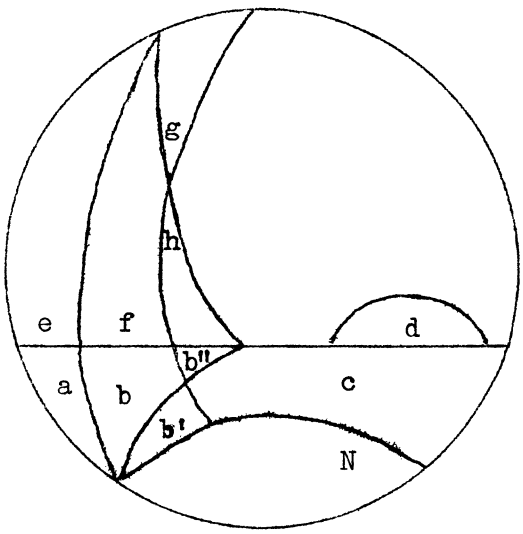
si $h : N \longrightarrow N$ , alors $h : \beta N \longrightarrow \beta N$ est continue,

si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , et si $\mathfrak{F}$ est un filtre $K_\sigma$ , alors $\check{\mathfrak{F}}$ contient un ultrafiltre $\delta$-stable,

l'ensemble des ultrafiltres rares est un fermé d'intérieur vide (démonstration rapide),

l'ensemble des ultrafiltres rapides et des ultrafiltres ayant la propriété C également (comme avant).

Conséquences : si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ : existence de "beaucoup" d'ultrafiltres $\delta$-stables dont aucune image n'est rare (MATHIAS-PITT), dont aucune image n'est rapide, et dont aucune image n'a la propriété C .




| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ultrafiltres | absolus | a | | | | | | | | | |
| | $\delta$-stables | a | b | b' | b'' | c | | | | | |
| | rares | a | | | | | d | e | | | |
| | rapides | a | b | b' | | | d | e | f | g | |
| | ayant la propriété C | a | b | | b'' | | | e | f | | h |

(Texte reçu le 22 mai 1975)

Maryvonne DAGUENET
79 rue du Faubourg Saint-Jacques
75014 PARIS