Elias Saab

Dentabilité et points extrémaux

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 13, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A9_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
13e année, 1973/74, n° 13, 9 p.

7 février 1974

DENTABILITÉ ET POINTS EXTRÉMAUX DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

par Elias SAAB (*)

La notion de dentabilité a été introduite par RIEFFEL dans [10] pour démontrer un théorème de type RADON-NIKODYM pour les mesures à valeurs vectorielles.

Cette notion n'a été utilisée jusqu'à présent que dans les espaces de Banach.

Le but de cet exposé est d'étendre cette notion aux espaces localement convexes séparés.

Cette extension nous a permis d'obtenir des propriétés de type KREIN-MILMAN dans les espaces de Fréchet dentables. En effet, nous démontrons que, dans tout espace de Fréchet dentable, tout convexe borné fermé est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux forts ; nous démontrons aussi que tout produit dénombrable de duaux de Banach séparables est dentable.

Comme corollaire à ce travail nous obtenons une extension du théorème 3 de N. T. PECK [8] en remplaçant, dans ce théorème, les points extrémaux par les points extrémaux forts ; nous ne savons pas encore si nous pouvons remplacer les points extrémaux forts par les points fortement exposés.

1. Notations, Définitions et Préliminaires.

Soit E un espace localement convexe séparé (e. l. c. s.), nous désignons par E' son dual topologique, et par E^* son dual algébrique.

Si x appartient à E, nous désignons par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Soit A une partie non vide de E ; une tranche fermée (respectivement ouverte) de A est un sous-ensemble non vide de A de la forme suivante

$$T = \{x \in A \; ; \; f(x) \geq \alpha\} \quad (\text{respectivement} \quad T = \{x \in A \; ; \; f(x) > \alpha\})$$

avec $f \in E'$ et α un nombre réel.

Une telle tranche sera notée $T = T(f, \alpha, A)$. Toutes les tranches considérées, sauf mention contraire, seront supposées fermées et épaisses dans le sens suivant : il existe z dans A tel que $f(z) > \alpha$ et $f \neq 0$.

Si A et B sont deux sous-ensembles de E,

$$A \pm B = \{x \pm y \; ; \; x \in A \text{ et } y \in B\} \text{ et } A \setminus B = \{x \in A \; ; \; x \notin B\} .$$

Si E est métrisable, d sa distance, x dans E et $\varepsilon > 0$

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in E \; ; \; d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

(*) Attaché de Recherche au CNRS libanais.

désignera la boule fermée de centre x et de rayon ε.

DÉFINITION 1.1. - Soit E un e. l. c. s. ; un ensemble non vide A de E est dit dentable si, pour tout V dans $\mathcal{V}(0)$, il existe une tranche $T = T(f, \alpha, A)$ petite d'ordre V (i. e. $T - T \subset V$).

Cette définition nous a été suggérée par Gustave CHOQUET.

DÉFINITION 1.2. - Un e. l. c. s. E sera dit dentable si tout borné de E est dentable.

PROPOSITION 1.3. - *Soit A une partie non vide d'un e. l. c. s. E ; alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est dentable,*

(ii) *Pour tout V dans $\mathcal{V}(0)$, il existe x dans A tel que x n'appartient pas à l'enveloppe convexe fermée de $A \setminus (x + V)$.*

Démonstration. - C'est une conséquence facile du théorème de séparation.

Dans la suite, nous noterons par $\overline{\text{conv}}(B)$ l'enveloppe convexe fermée de B.

DÉFINITION 1.4. - Soient E un e. l. c. s., et A une partie non vide de E ; un point x de A est dit denté si, pour tout V dans $\mathcal{V}(0)$, il existe une tranche $T(f, \alpha, A)$ petite d'ordre V, et contenant x ou, d'une manière équivalente, pour tout U dans $\mathcal{V}(x)$, x n'appartient pas à $\overline{\text{conv}}(A \setminus U)$.

Dans le cas où A est convexe, CHOQUET appelle les points dentés des points extrémaux forts [2] (Vol. 2, p. 97)

DÉFINITION 1.5. - Soient E un e. l. c. s, et A une partie non vide de E ; un point x de A est dit fortement exposé s'il existe f dans E' tel que, pour tout voisinage V dans $\mathcal{V}(0)$, il existe α tel que $T(f, \alpha, A)$ contient x et soit petite d'ordre V.

DÉFINITION 1.6. - Soient E un elcs complet et A un borné non vide de E.

(a) A est dit s-dentable si pour tout V dans $\mathcal{V}(0)$, il existe x dans A tel que x n'appartient pas à $s(A \setminus (x + V))$.

(b) Un point x dans A est dit s-denté si, pour tout V dans $\mathcal{V}(0)$, x n'appartient pas à $s(A \setminus (x + V))$, où, pour un borné B de E,

$$s(B) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \ , \ \lambda_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1 \ , \ (x_i) \subset B\} .$$

2. Quelques catégories d'espaces localement convexes dentables et notions de s-dentabilité.

PROPOSITION 2.1. - *Soit A un sous-ensemble d'un e. l. c. s. E ; si* $\overline{\text{conv}}(A)$

est dentable, alors A l'est aussi.

Démonstration. - Soit V dans $\mathcal{V}(0)$, alors il existe une tranche

$$T = T(f\ ,\ \alpha\ ,\ \overline{\text{conv}}(A))$$

petite d'ordre V. $T \cap A$ est une tranche de A, sinon $A \subset \{x \in E\ ;\ f(x) \leq \alpha\}$, donc $\overline{\text{conv}}(A) \subset \{x \in E\ ;\ f(x) \leq \alpha\}$ et, par suite, il n'existe aucun z dans $\overline{\text{conv}}(A)$ tel que $f(z) > \alpha$ contrairement à la définition adoptée pour les tranches, donc il existe $z_1 \in A$ tel que $f(z_1) > \alpha$ et $T \cap A \neq \emptyset$, et c'est une tranche de A petite d'ordre V.

Il faut remarquer que tout convexe compact d'un e. l. c. s. admet des points dentés ([2], Vol. 2, p. 107) ; de cette remarque et de la proposition 2.1, on déduit que tout ensemble relativement compact d'un e. l. c. s. quasi-complet est dentable.

RIEFFEL a démontré, dans [10], que $\ell^1(X)$ (X dénombrable ou non) est dentable. NAMIOKA a démontré, dans [7], que tout dual d'un Banach séparable est dentable.

Il est clair que tout e. l. c. s. qui est semi-Montel (i. e. tout borné est relativement compact) est dentable.

THÉORÈME 2.2. - Tout e. l. c. s. séparable semi-réflexif est dentable.

Démonstration. - Il suffit de démontrer que tout convexe borné fermé est dentable, soit K un tel ensemble ; K est faiblement compact.

Soit $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ la famille de semi-norme définissant la topologie de E, et V dans $\mathcal{V}(0)$; il existe alors $\alpha_1\ ,\dots,\ \alpha_n$, $\varepsilon > 0$ tel que

$$\{x \in E\ ;\ \sup_{1 \leq i \leq n} p_{\alpha_i}(x) \leq \varepsilon\} \subset V\ .$$

Soit $p = \sup_{1 \leq i \leq n} p_{\alpha_i}$, p est une semi-norme continue sur E ; d'après [6], il existe un convexe fermé C contenu dans K et distinct de K et tel que $p\text{-diam}(K \setminus C) < \varepsilon$ ($p\text{-diam}(B) = \sup_{x,y \in B} p(x - y)$).

Soit $a \in K \setminus C$, on sépare a et C par une forme linéaire continue f de sorte que a soit dans $T = T(f\ ,\ \alpha\ ,\ K)$ et $C \subset \{x \in E\ ;\ f(x) < \alpha\}$, il est facile de voir que $T - T \subset V$.

Il est bien connu ([9] conclusion) qu'un ensemble faiblement compact dans un espace de Banach est dentable.

THÉORÈME 2.3. - Soit E un espace de Fréchet ; tout ensemble faiblement compact C dans E est dentable.

Démonstration. - Nous pouvons supposer que C est convexe ([4], corollaire 1, p. 283). D'après [4] (corollaire 1, p. 211), il existe un convexe borné fermé équilibré A de E tel que C soit borné dans l'espace normé E_A (E_A est l'espace engendré par A muni de la norme jauge de A) et que ce dernier induise sur C la même topologie et la même structure uniforme que E.

A est complet, donc E_A est un espace de Banach. C est faiblement compact dans E_A ([4], corollaire 2, p. 212), par suite il est dentable dans E_A. Il est facile de vérifier que C est dentable dans E.

COROLLAIRE 2.4. - Tout espace de Fréchet réflexif (en particulier, tout produit dénombrable d'espace de Banach réflexif) est dentable.

Démonstration. - C'est une déduction immédiate du théorème 2.3.

THÉORÈME 2.5. - Tout produit dénombrable de duaux de Banach séparables est dentable.

Démonstration. - Soient $E = \prod_{n=1}^{\infty} E'_n$, et C un convexe borné fermé de E.

Soient $\mathcal{T}_1$ la topologie sur E produit des topologies des normes de E'_n, et $\mathcal{T}_2$ le produit des topologies $\sigma(E'_n , E_n)$. Soit C_1 la $\mathcal{T}_2$-adhérence de C, C_1 est $\mathcal{T}_2$-compact.

Nous désignons par Z l'ensemble des points de continuité de l'application identique $1_{C_1} : (C_1 , \mathcal{T}_2) \to (C_1 , \mathcal{T}_1)$. Le théorème 2.3 de [7], appliqué à $(E, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ montre qu'il existe un point u dans $Z \cap \mathcal{E}(C_1)$ ($\mathcal{E}(C_1)$ désigne l'ensemble des points extrémaux de C_1), par suite, il existe un ultra-filtre $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ dans C qui converge vers u pour $\mathcal{T}_2$, donc pour $\mathcal{T}_1$, puisque u est un point de Z, comme C est $\mathcal{T}_1$-fermé, alors $u \in C$.

Nous disons que u est un point denté de C. En effet : Soit V dans $\mathcal{V}(u)$ pour $\mathcal{T}_1$; alors il existe un $\mathcal{T}_2$-ouvert W tel que u appartient à $W \cap C_1 \subset V \cap C_1$. Puisque u est extrémal dans C_1 qui est $\mathcal{T}_2$-compact, il existe alors d'après [2] (Vol. II, p. 107) une tranche $\mathcal{T}_2$-ouverte (i. e. déterminée par une forme linéaire $\mathcal{T}_2$-continue) tel que u appartient à T, et T soit contenue dans $W \cap C_1 \subset V \cap C$; de ceci on déduit que $C \setminus V \subset C_1 \setminus T$, comme $C_1 \setminus T$ est un convexe $\mathcal{T}_2$-compact, u n'appartient pas à l'enveloppe convexe $\mathcal{T}_2$-fermée de $C \setminus V$ et, a fortiori, u n'appartient pas à l'enveloppe convexe $\mathcal{T}_1$-fermée de $C \setminus V$; donc u est un point denté de C.

Cette démonstration ressemble à [7] (théorème 3.5).

PROBLÈME I.

(a) Caractériser les espaces localement convexes séparés dentables.

(b) Est-ce qu'un produit d'espace dentable est dentable ?

MAYNARD a introduit dans [5] la notion de s-dentabilité. Cette notion s'étend aux e. l. c. s. complets comme nous l'avons fait dans la définition 1.6.

PROPOSITION 2.6. - Si A est un convexe borné fermé d'un e. l. c. s. complet E, alors l'ensemble des points extrémaux de A (éventuellement vide) est identique à l'ensemble des points s-dentés de A.

Démonstration. - Soit x un point extrémal dans A mais non s-denté ; alors il existe V dans $\mathcal{V}(x)$ tel que x appartient à $s(A \setminus V)$, donc

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i , \quad \lambda_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \{x_i\}_{i=1,2,\ldots} \subset A \setminus V .$$

Nous pouvons supposer que, pour tout i, $0 < \lambda_i < 1$, posons $\lambda = \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i$, alors

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda i}{\lambda} x_i)$$

si $y = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda i}{\lambda} x_i$, y est dans A, et par suite $x = \lambda_1 x_1 + \lambda y$ avec $\lambda_1 + \lambda = 1$ et $0 < \lambda < 1$, donc x est non extrémal.

Inversement, soit x un point s-denté de A, mais non extrémal, alors $x = (x_1 + x_2)/2$ avec x_1, x_2 dans A et $x_1 \neq x_2$, donc $x \neq x_1$ et $x \neq x_2$; il existe par conséquent un V dans $\mathcal{V}(0)$ tel que $x_1 - x \notin V$ et $x_2 - x \notin V$, donc x_1 et x_2 appartiennent à $A \setminus (x + V)$, et x appartient à $s(A \setminus (x+V))$, alors x est non s-denté.

DAVIS et PHELPS ont démontré, dans [3], que tout borné d'un espace de Banach E est s-dentable si, et seulement si, E est dentable.

PROBLEME II. - Si tout borné d'un espace de Fréchet est s-dentable, est-ce que E est s-dentable ?

3. Relations entre la dentabilité et la propriété de Krein-Milman.

Nous démontrons maintenant un théorème étendant un résultat de LINDENSTRAUSS (cf. [9]) aux espaces de Fréchet.

LINDENSTRAUSS a utilisé le théorème de BISHOP-PHELPS [1] pour démontrer son théorème, nous utiliserons un résultat de N. T. PECK [8] pour démontrer le nôtre.

Si E est un e. l. c. s., A une partie non vide de E, posons

$$E'_A = \{f \in E^* \text{ tel que } f \text{ restreinte à } A \text{ soit continue}\} .$$

Si A est borné, une tranche de A s'écrit sous la forme suivante :

$$T(f , \alpha , A) = \{x \in A ; \ f(x) \geq M(f , A) - \alpha\}$$

où f est dans E', $\alpha > 0$ et $M(f , A) = \sup_A f$.

THÉORÈME 3.1. - Dans tout espace de Fréchet dentable, tout convexe borné fermé C est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

Démonstration. - Soit E un espace de Fréchet dentable ; il suffit de démontrer que toute tranche $T(f , \alpha , C)$ contient un point extrémal.

Soit y_0 un point de E tel que $f(y_0) > M(f , C)$; en prenant dans [8] (théorème 2) $X = \{y_0\}$ et $0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{2}$, il existe g dans E'_D et x_0 dans C, où $D = \overline{\text{conv}}(X \cup C)$ tel que

$$g(x_0) = \sup_C g < g(y_0) \quad \text{et} \quad \sup_{d \in D} |f(d) - g(d)| < \varepsilon .$$

Soit $F_1 = \{x \in C \; ; \; g(x) = \sup_C g\}$; l'ensemble F_1 est une face fermée non vide de C et $F_1 \subset T(f , \alpha , C)$. F_1 est dentable, il existe donc une tranche $T(f_1 , \alpha_1 , F_1)$ de F_1 petite d'ordre $B(0 , 1/2)$, donc de diamètre inférieur ou égal à $1/2$, de la même façon on construit une face fermée non vide

$$F_2 \subset T(f_1 , \alpha_1 , F_1)$$

et, par récurrence, on construit une suite décroissante de faces fermées

$$(F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots)$$

non vides dont chacune est une face de C et $\operatorname{diam}(F_n) \leq 1/n$, puisque E est complet, l'intersection de ces faces se réduit à un seul point qui est extrémal dans C et appartient à $T(f , \alpha , C)$.

PROBLEME III. - Le théorème 3.1 reste-t-il vrai si l'on suppose seulement que E est un e. l. c. s. ?

La réciproque de ce théorème n'est pas encore connue même dans les espaces de Banach. Cette réciproque sera démontrée (tenant compte de la proposition 2.6) si on répond positivement au problème suivant.

PROBLEME IV. - Si tout convexe borné fermé d'un espace de Banach admet un point s-denté, est-ce que tout convexe borné est s-dentable ?

PHELPS a démontré, dans [9], que si un espace de Banach est dentable tout convexe borné fermé de C , est l'enveloppe convexe fermée de ses points dentés. Dans le même papier, PHELPS a pu renforcer son résultat précédent en démontrant que, dans tout espace de Banach dentable, tout convexe borné fermé est l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés.

LEMME 3.2. - Soient E un e. l. c. s. tonnelé dentable, C un convexe borné fermé de E , $g \in E'$, $g \neq 0$, et V dans $\mathcal{V}(0)$. Supposons que $C \setminus g^{-1}(0) \neq \emptyset$ et $D = C \cap g^{-1}(0) \neq \emptyset$, alors il existe une tranche de C petite d'ordre V qui ne rencontre pas D .

Démonstration. - Soient z un point dans $C \setminus g^{-1}(0)$, $r = 1/g(z)$, et x un point de D .

Considérons l'application de E dans E :

$$y \longrightarrow \varphi_x(y) = y - 2\, r g(y)(z - x) \; .$$

φ_x est une application linéaire continue, c'est une symétrie par rapport à l'hyperplan $g^{-1}(0)$ parallèlement à la droite passant par 0 et $z - x$. On vérifie que $\varphi_x = \varphi_x^{-1}$, donc φ_x est un isomorphisme topologique de E . Notons que $\varphi_x(z) = 2x - z$, et que φ_x est l'identité sur $g^{-1}(0)$.

Considérons $H = \{\varphi_x \; ; \; x \in D\}$, alors $H \subset \mathcal{L}(E , E)$ ($\mathcal{L}(E , E)$ désigne l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E).

Soit $y \in E$; et considérons $H(y) = \{\varphi_x(y) \; ; \; x \in D\}$, l'ensemble $H(y)$ peut s'écrire de la façon suivante

$$H(y) = y - 2rg(y)\, z + 2rg(y).D\ ,$$

donc $H(y)$ est borné dans E et, par suite, H est simplement borné dans $\mathcal{L}(E,E)$ puisque E est tonnelé, alors H est équicontinue d'après [11] (p. 83, théorème 4.2), donc pour tout voisinage U dans $\mathcal{V}(0)$

$$W = \bigcap_{u\in H} u^{-1}(U) = \bigcap_{x\in D} \varphi_x(U) = \bigcap_{x\in D} \varphi_x^{-1}(U)$$

est un voisinage de 0 dans E d'après [11] (p. 83, théorème 4.1).

Comme $z \notin D$, il existe un voisinage U_1 de 0 dans E tel que $(z+U_1)\cap D = \emptyset$. Posons

$$U_2 = \bigcap_{x\in D} \varphi_x(U_1)\ ,\quad U_3 = \bigcap_{x\in D} \varphi_x(V) \quad \text{et} \quad U_4 = U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap V\ ;$$

U_4 est un voisinage de 0 dans E. Soit

$$\mathcal{K} = \{C\} \cup \{\varphi_x(C)\ ;\ x \in D\}\ ,$$

et posons $C_1 = \overline{\mathrm{conv}}(\bigcup_{K\in\mathcal{K}} K)$. Nous disons que $\bigcup_{K\in\mathcal{K}} K$ est borné dans E ; en effet, si U est dans $\mathcal{V}(0)$, $U' = U \cap (\bigcap_{x\in D} \varphi_x^{-1}(U))$ est dans $\mathcal{V}(0)$. U' absorbe C, il existe donc λ tel que $C \subset \lambda U' \subset \lambda U$ et, pour tout x dans D,

$$\varphi_x(C) \subset \lambda\varphi_x(\varphi_x^{-1}(U)) = \lambda U\ .$$

C_1 est donc un convexe borné fermé de E, il existe donc une tranché

$$T = T(f\ ,\ \alpha\ ,\ C_1)$$

petite d'ordre U_4.

Remarquons que $M(f\ ,\ C_1) = M(f\ ,\ \bigcup_{K\in\mathcal{K}} K)$; il existe donc $K_0 \in \mathcal{K}$ tel que

$$M(f\ ,\ K_0) > M(f\ ,\ C_1) - \alpha$$

si $\beta = M(f\ ,\ K_0) - [M(f\ ,\ C_1) - \alpha]$, $\beta > 0$, et

$$T(f\ ,\ \beta\ ,\ K_0) \subset T(f\ ,\ \alpha\ ,\ C_1)\ .$$

Si $A = D \cap T(f\ ,\ \alpha\ ,\ C_1) \neq \emptyset$, soit $x \in A$; comme x s'écrit $x = \frac{1}{2}[z + \varphi_x(z)]$, alors l'un au moins des deux points z et $\varphi_x(z)$ appartient à T puisque $T - T \subset U_4 \subset U_1 \cap U_2$.

Considérons les deux cas suivants :

(a) Si z appartient à T, $x - z$ appartient à U_1, et x appartient à $(z + U_1) \cap D$ qui est vide ;

(b) Si $\varphi_x(z)$ appartient à T, $x - \varphi_x(z)$ appartient à $\varphi_x(U_1)$, et x appartient à $(\varphi_x(z) + \varphi_x(U_1)) \cap D$ qui est vide. Donc

$$T(f\ ,\ \alpha\ ,\ C_1) \cap D = \emptyset\ ,$$

et a fortiori

$$T(f\ ,\ \beta\ ,\ K_0) \cap D = \emptyset\ .$$

Si $K_0 = C$, le lemme est démontré.

Si $K_0 = \varphi_x(C)$, la tranche $\varphi_x^{-1}(T(f, \beta, \varphi_x(C))$ est une tranche de C petite d'ordre

$$\varphi_x^{-1}(U_4) \subset \varphi_x^{-1}(\varphi_x(V)) = V .$$

Si y appartient à D , y n'appartient pas à $T(f, \beta, \varphi_x(C))$, donc $y=\varphi_x^{-1}(y)$ n'appartient pas à $\varphi_x^{-1}(T(f, \beta, \varphi_x(C)))$.

La démonstration suit de très près la démonstration de PHELPS dans [9], mais la seule difficulté ici consiste à remplacer l'utilisation de la norme par le fait que H est équicontinue dans $\mathcal{L}(E, E)$.

THÉORÈME 3.3. - Soit E un espace de Fréchet dentable ; alors tout convexe borné fermé C de E est l'enveloppe convexe fermée de ses points dentés.

Démonstration. - Il suffit de démontrer que toute tranche $T(g, \beta, C)$ contient un point denté ; supposons que 0 appartient à $H = \{x ;\ g(u) = M(g, C) - \beta\}$, donc $H = g^{-1}(0)$.

Soit $C_1 = T(g, \beta, C)$; d'après le lemme 3.2, il existe une tranche de C_1 qui ne rencontre pas $C_1 \cap g^{-1}(0)$ et de diamètre plus petit que $1/2$, donc c'est une tranche de C contenue dans C_1 .

On continue par récurrence pour trouver une suite décroissante de tranches fermées de diamètre tendant vers 0 ; comme E est complet, leur intersection se réduit à un seul point qui est denté dans C , et appartient à $T(g, \beta, C)$.

COROLLAIRE 3.4. - Dans tout produit dénombrable de duaux de Banach séparables et dans tout produit dénombrable d'espace de Banach réflexif (en particulier dans $(\ell^p)^{\mathbb{N}}$, $1 \leq p < +\infty$), tout convexe borné fermé est l'enveloppe convexe fermée de ses points dentés.

PROBLEME V. - Peut-on remplacer dans le théorème 3.3 les points dentés par les points fortement exposés ?

PROBLEME VI (posé par H. FAKHOURY). - Si un e. l. c. s., E est dentable, est-ce que son complété l'est aussi ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BISHOP (E.) and PHELPS (R. R.). - The support functionals of a convex set, "Convexity", p. 27-35. - Providence, American mathematical Society, 1963 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 7).

[2] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis. Vol. I-III. - New York, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

[3] DAVIS (W. J.) and PHELPS (R. R.). - The Radon-Nikodym property and dentable sets in Banach spaces, Proc. Amer. math. Soc. (à paraître).

[4] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques, 3a ediçâo. - Sâo Paulo, Sociedade de Matematica, 1964.

[5] MAYNARD (H. B.). - A geometric characterisation of Banach spaces having the Radon-Nikodym property, Trans. Amer. math. Soc. (à paraître).

[6] NAMOIKA (I.) and ASPLUND (E.). - A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem, Bull. Amer. math. Soc., t. 73, 1967, p. 443-445.

[7] NAMIOKA (I.). - Neighborhoods of extreme points, Israël J. Math., t. 5, 1967, p. 145-152.

[8] PECK (N. T.). - Support points in locally convex spaces, Duke math. J., t. 38, p. 271-278.

[9] PHELPS (R. R.). - Dentability and extreme points in Banach spaces (à paraître).

[10] RIEFFEL (M. A.). - Dentable subsets of Banach spaces, with applications to a Radon-Nikodym theorem, "Functional analysis", Proceedings of a conference held at the University of California [1966. Irvine], p. 71-77. - Washington, Thompson Book Company, 1967.

[11] SCHAEFER (H. H.). - Topological vector spaces, 3rd printing. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1970.

(Texte reçu le 15 mars 1974)

Elias SAAB
Foyer Franco-Libanais
15 rue d'Ulm
75005 PARIS