Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michèle Mastrangelo-Dehen

Linéarisation de la notion de convexité par rapport à un ensemble de fonctions

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 11, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A7_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 11, 12 p.
2 novembre 1973 et 24 janvier 1974

LINÉARISATION DE LA NOTION DE CONVEXITÉ PAR RAPPORT À UN ENSEMBLE DE FONCTIONS

par Michèle MASTRANGELO-DEHEN

En théorie du potentiel, ainsi qu'en analyse harmonique, se posent différents problèmes qui nous conduisent à considérer le cadre d'étude de cet exposé.

– Le problème de Dirichlet sur un ouvert Ω de $\underset{\sim}{R}^n$, pour les fonctions harmoniques, relativement à la frontière topologique, à la frontière fine ou à la frontière de Martin ; et

– le même problème sur un ouvert de $\underset{\sim}{C}^n$ pour les fonctions pluriharmoniques, et relativement à la frontière distinguée,

présentent des analogies avec les études de simplicialité faites par G. CHOQUET, sur les convexes compacts à partir d'une donnée sur l'ensemble des points extrémaux.

Par ailleurs, les études faites dans l'analyse des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes font intervenir, par exemple, les deux questions suivantes :

– Si D est un ouvert de $\underset{\sim}{C}^n$, quand peut-on affirmer la densité dans l'espace $\mathscr{H}(D)_+$ des fonctions holomorphes sur D (muni de la structure uniforme $\mathfrak{U}$, de la convergence compacte sur Ω) de l'espace des polynômes en $(z_1, \dots, z_n)$?

– Si $U \supset D$ sont deux ouverts de $\underset{\sim}{C}^n$, on peut étudier des critères assurant la densité de $\mathscr{H}(U)/D$ dans $(\mathscr{H}(D), \mathfrak{U})$; ceci fait l'objet du théorème de Runge et, plus généralement, du théorème d'Oka-Weil.

Les critères s'énoncent, comme on le verra dans la suite, au moyen des enveloppes convexes, relativement à $\mathscr{H}(U)/D$ et à $\mathscr{H}(D)$, des compacts de D.

Des conditions nécessaires et suffisantes de densité peuvent s'exprimer, dans les deux cas ci-dessus, au moyen d'enveloppes convexes de compacts associées aux espaces de fonctions considérés ; ces notions sont très proches de notions linéaires, et les deux points de vue qui viennent d'être exposés nous permettent de penser qu'un cadre unifié et adéquat serait obtenu en considérant D comme un sous-ensemble d'un espace vectoriel vague sur lequel l'ensemble des fonctions considéré serait un ensemble de fonctions linéaires.

1. Résultats généraux.

DÉFINITIONS. – Dans tout cet exposé, Ω sera un espace topologique séparé ; E et F deux ensembles de fonctions sur Ω,

$$\{\text{constantes}\} \subset E \subset F \subset \mathfrak{F}(\Omega, \underset{\sim}{R}) .$$

On suppose que E sépare les points de Ω. On note $[E]$ [resp. $[F]$] l'espace vectoriel engendré par E [resp. F]. On munit $[F]$ d'une topologie d'e. l. c. s. (par exemple, la structure uniforme $\mathcal{U}$ de la convergence uniforme sur tout compact de Ω), et $[E]$ de la topologie induite.

On note E' [resp. F'] le dual topologique de E [resp. F], et on le munit de $\sigma(E', E) = \sigma(E', [E])$ [resp. $\sigma(F', F)$]. On note ε l'injection canonique de Ω dans E', et φ l'injection canonique de Ω dans F'.

Si $A \subset \Omega$ [resp. E'], on appelle enveloppe E-convexe de A dans Ω [resp. E'], l'ensemble

$$c(E , A , \Omega) = \{x \in \Omega , \ \forall f \in E , \ f(x) \leqslant \sup f(A)\} .$$

$$[\text{resp. } c(E , A , E') = \{x \in E' , \ \forall f \in E , \ f(x) \leqslant \sup f(A)\}] .$$

THÉORÈME 1. - Si $E = [E]$ et si E est tonnelé, si A est un sous-ensemble de Ω sur lequel toutes les fonctions de E soient bornées, alors

$$c(E , \varepsilon(A) , E') \text{ est } \sigma(E' , E)\text{-compact.}$$

La démonstration se déduit immédiatement du fait que $c(E , \varepsilon(A) , E')$ est borné et $\sigma(E' , E)$-fermé, et du fait que E' est quasi complet.

THÉORÈME 2. - Soit $p : F' \to E'$, l'application qui à $f' \in F'$ associe sa restriction à $E = [E]$. On suppose p injective sur $c(F , \varphi(A) , F')$, si (a) ou (b) est satisfaite :

(a) $c(F , \varphi(A) , F')$ est $\sigma(F' , F)$-compact,

(b) $E \subset \mathcal{C}(\Omega)$ et $c(F , A , \Omega)$ est compact,

alors

$$c(E , A , \Omega) = c(F , A , \Omega) .$$

Démonstration. - Comme $E \subset F$, il est immédiat que

$$c(E , A , \Omega) \supset c(F , A , \Omega) .$$

On doit montrer que l'inclusion inverse est vérifiée dans les cas (a) ou (b).

(a) Soit $x \in c(F , A , \Omega)$, alors

$$\varphi(x) \notin c(F , A , F') \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = p \circ \varphi(x) \notin p[c(F , A , F')] .$$

Or $c(F , A , F')$ est convexe et compact par l'hypothèse (a), donc

$$\{\varepsilon(x)\} \quad \text{et} \quad p[c(F , A , F')]$$

sont deux convexes, $\sigma(E' , E)$-compacts et disjoints. Utilisant le théorème de Hahn-Banach, on peut les séparer par un élément du dual topologique de E', muni de $\sigma(E' , E)$, qui est E. Par conséquent :

$$\exists\, h \in E , \qquad h(x) > \sup h(p[c(F , A , F')])$$

ce qui entraîne :

$$\exists\, h \in E , \quad h(x) > \sup h(A) \text{ ; donc } x \notin c(E , A , \Omega) .$$

(b) Comme $E \subset \mathcal{C}(\Omega)$, ε est continu, et

$$\varepsilon(c(F , A , \Omega) \text{ est } \sigma(E' , E)\text{-compact,}$$

$$c(E , [\varepsilon(c(F , A , \Omega))] , E') \text{ est } \sigma(E' , E)\text{-fermé et convexe.}$$

Or $p : F' \longrightarrow E'$ est injective, par suite la topologie $\sigma(F' , E)$ est séparée sur F' . De plus, p est continue de F' , muni de $\sigma(F' , E)$ dans E' , muni de $\sigma(E' , E)$. Donc $p^{-1}[c(E , \varepsilon[c(F , A , \Omega)] , E')]$ est un convexe $\sigma(F' , E)$-fermé dans F' .

Si x est un point de Ω , n'appartenant pas à $c(F , A , \Omega)$, alors $\{\varphi(x)\}$ est un $\sigma(F' , E)$-compact de F' , disjoint de $p^{-1}[c(E , \varepsilon[c(F , A , \Omega)] , E')]$.

Utilisant le théorème de Hahn-Banach, on peut alors les séparer fortement par un élément h du dual E de F' , muni de $\sigma(F' , E)$; comme dans (a), on conclut que x ne peut appartenir à $c(E , A , \Omega)$.

REMARQUE 3. - Si ω est un ouvert de $\underset{\sim}{C}^n$ et si Ω en est une sous-variété, l'ensemble E des restrictions à Ω des fonctions (pluri-)harmoniques sur ω n'est pas nécessairement complet pour la structure uniforme $\mathcal{U}$ de la convergence uniforme sur tout compact de Ω ; il n'est pas tonnelé ; par contre, l'ensemble des fonctions (pluri-)harmoniques sur Ω est $\mathcal{U}$-métrisable et complet, donc tonnelé.

DÉFINITIONS. - Si A est un sous-ensemble de Ω [resp. E'] , et si $a \in A$, on dira que a <u>est</u> <u>E-exposé dans</u> A si

$$\exists\, f \in E : \ f(a) > f/(A \setminus \{a\}) .$$

On note $E - \mathcal{E}(A)$ l'ensemble des points E-exposés dans A .

De même, si C et D sont deux compacts de Ω , $D \subset C$, on dira que D <u>est E-exposé dans</u> C s'il existe un élément f de E tel que

$$D = \{f \geqslant \inf(f(D))\} \cap C .$$

Munis de l'ordre d'inclusion, les compacts E-exposés de C ne forment pas un ensemble inductif ; on introduit la définition suivante : On dira que E est <u>filtrant</u> sur le compact C de Ω si tout compact E-exposé dans C rencontre $E\text{-}\mathcal{E}(C)$.

Ces définitions sont un peu plus restrictives que les définitions d'extrémalité données par G. CHOQUET, dans le cas où E est un espace vectoriel, et généralisées à des cônes convexes dans [5], [6], [7], [11], qui s'expriment de la manière suivante : Soit C un compact de Ω , on dira qu'un point x de C est E-extrémal dans C si toute probabilité μ , portée par C et vérifiant, $\forall\, f \in E$, $\mu(f) \geqslant f(x)$, est nécessairement égale à ε_x .

De même, un compact D de C est dit *E-extrémal* dans C si toute probabilité μ, portée par C et vérifiant, $\forall f \in E$, $\mu(f) \geq \sup(f(D))$, est nécessairement portée par D.

Les compacts E-extrémaux de C forment alors un ensemble inductif dont les éléments minimaux sont des points.

Notant $\partial_E(C)$ l'ensemble des points E-extrémaux de C, c'est-à-dire la frontière de Choquet de C, on voit alors (d'après ZORN) que, pour tout compact D, E-extrémal dans C, $D \cap E - \mathcal{E}(C) \neq \emptyset$; il est donc inutile de l'imposer comme condition supplémentaire.

Il est immédiat de vérifier que, si C est un compact de Ω,

$$E - \mathcal{E}(C) \subset \partial_E(C) .$$

PROPOSITION 3. - *Il existe un* (Ω , E), *et un compact* C *de* Ω *sur lequel* E *soit filtrant, et pour lequel l'inclusion*

$$E - \mathcal{E}(C) \subset \partial_E(C)$$

soit stricte.

Démonstration. - Prendre

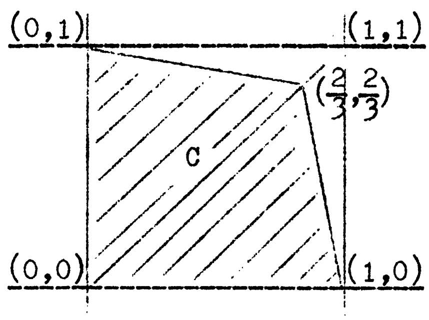
$$\Omega = \underset{\sim}{R}^2 ,$$

E={formes linéaires sur $\underset{\sim}{R}^2$, f, vérifiant $f((1,1))>0$, et Ker $f \supset \{x=0\}$ ou bien $\{y=0\}\}$.

$$C = \text{conv}\{(0 , 0) , (1 , 0) , (0 , 1) , (\tfrac{2}{3} , \tfrac{2}{3})\} ,$$

on voit que E est filtrant sur C et que :

$$E - \mathcal{E}(C) = \{(0,1) , (1,0)\} , \qquad \partial_E(C) = \{(0,1) , (1,0) , (\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3})\}$$



L'introduction des points E-exposés apporte donc une précision supplémentaire aux généralisations classiques du théorème de Krein-Milman faisant intervenir les points E-extrémaux ; elle s'exprime dans le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - *Si* A *est un compact* F*-convexe dans* Ω, *si* F *est filtrant sur* A *et formé de fonctions s. c. s. sur* A, *alors*

$$A = c(F , F - \mathcal{E}(A) , \Omega) .$$

Démonstration. - Comme A est F-convexe et contient $F - \mathcal{E}(A)$, on voit que

$$A \supset c(F , F - \mathcal{E}(A) , \Omega) .$$

Si $x \in \Omega \setminus c(F , F - \mathcal{E}(A) , \Omega)$, il existe $f \in F$ telle que

$$f(x) > \sup f / F - \mathcal{E}(A) .$$

Si $x \in A$, on note

$$D = \{f \geq f(x)\} \cap A \neq \emptyset .$$

Comme f est s. c. s., D est compact ; par ailleurs, il est F-exposé dans A. Or F est filtrant sur A, donc $D \cap E - \mathcal{E}(A) \neq \emptyset$, ce qui est impossible.

THÉORÈME 5. - *Si A est un compact E-convexe dans Ω, si E est filtrant sur A, et est un espace vectoriel de fonctions continues sur A, la restriction à $E - \mathcal{E}(A)$, d'un élément f de E détermine celui-ci sur A.*

Démonstration. - Soient f et g deux éléments de E qui coïncident sur $E - \mathcal{E}(A)$. Si $f / A \neq g / A$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, par exemple (en échangeant, le cas échéant f et g),

$$D = A \cap \{f - g \geq \varepsilon\} \neq \emptyset .$$

On voit alors que D est un compact E-exposé dans A, donc $D \cap E - \mathcal{E}(A) \neq \emptyset$, ce qui est impossible.

2. Application à la densité d'un espace vectoriel dans un cône.

Dans ce paragraphe, on suppose que E est un espace vectoriel qui sépare Ω, que F est un cône convexe, que

$$\{\text{constantes}\} \subset E \subset F \subset \mathcal{C}(\Omega , \mathbb{R}) ,$$

et qu'il existe une suite exhaustive de compacts de Ω, $\mathcal{S} = (K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que, $\forall f \in F$ vérifiant $\|f - E\|_{K_n} = 1$, il existe $x_f \in \Omega$ tel que l'ensemble

$$E_f = \{e \in E ; \quad e \leq f \quad \text{sur } K_n , \quad \sup e(K_n \cup \{x_f\}) \geq \sup f(K_n) - 1\}$$

vérifie

(a) $\forall C$ compact $\subset \Omega$, $c(E_f , C , \Omega) = c(E , C , \Omega)$,

(b) $\exists s \in E$ tel que, sur K_n, $\sup E_f \leq s \leq f$.

REMARQUE. - *Si $F = \mathcal{H}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions (pluri-)harmoniques sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, si U est un sur-ouvert de Ω, et si $E = \mathcal{H}(U)/\Omega$, alors (E , F) vérifie les hypothèses ci-dessus.*

Démonstration. - Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite fortement croissante et exhaustive de compacts de Ω, $K_n = \overline{\overset{\circ}{K_n}}$, où $\overset{\circ}{K_n}$ soit un ouvert régulier. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et vérifie,

$$\forall e \in \mathcal{H}(U)/\Omega , \|f - e\|_{K_n} \geq 1 .$$

On voit que, nécessairement, $\mathrm{Osc}_{K_n}(f) \geq 2$; à l'adjonction d'une constante près, on peut supposer que

$$1 = \inf(f/K_n) < 3 \leq \sup(f/K_n) \ .$$

Si Ω n'est pas compact, on peut alors trouver un point $x_f \in \Omega \setminus K_n$ tel que

(c) $\quad \exists\ \varepsilon \in E : \quad 0 \leq \varepsilon/K_n \leq 1/4$ et $\varepsilon/K_n \not\equiv 0$, $\varepsilon(x_f) = 0$

(a) $\quad \forall\ c$ compact de Ω , $\quad c(E_f , C , \Omega) = c(E , C , \Omega)$.

Il reste à vérifier l'axiome (b). On voit que E_f est, sur K_n , un système filtrant croissant de fonctions (pluri-harmoniques).

On note $E_f = (h_\alpha)_{\alpha\in A}$, où A est un ensemble pré-ordonné tel que

$$\beta \leq \alpha \Rightarrow h_\beta/K_n \leq h_\alpha/K_n \ .$$

Comme E_f est borné sur l'ouvert $\overset{\circ}{K_n} \neq \emptyset$, et comme il est $\mathcal{U}$-fermé, on déduit qu'il est $\mathcal{U}$-compact. Pour tout $p \geq n$, on note

$$E_f^p = \text{adhérence, pour } \|\cdot\|_{K_p} \text{, de la suite } (h_\alpha)(\alpha\nearrow) \ .$$

On voit que E_f^p est un sous-ensemble compact de $E = \mathcal{H}(U)/\Omega$, et que

$$n \leq m \leq p \Rightarrow E_f^m \supset E_f^p \ .$$

On conclut alors que

$$\bigcap_{p\in\underset{\sim}{N}} E_f^p \neq \emptyset \ ;$$

si $s \in \bigcap_{p\in\underset{\sim}{N}} E_f^p$, on voit alors que $h \in \mathcal{H}(U)/\Omega$, et que

$$s/K_n = \sup(E_f/K_n) \ .$$

THÉORÈME 6. – <u>Sous les seules hypothèses indiquées avant la remarque précédente, les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) $\forall\ K$ <u>compact de</u> Ω , $c(E , K , \Omega) = c(F , K , \Omega)$.

(b) E <u>est partout dense dans</u> F , <u>muni de</u> $\mathcal{U}$.

<u>Démonstration de</u> (b) $\Rightarrow$ (a).

S'il existe un compact K pour lequel $c(E , K , \Omega) \setminus c(F , K , \Omega)$ soit non vide, si x appartient à cette différence d'ensembles, il est immédiat de voir que E n'est pas dense dans F pour la convergence uniforme sur $K \cup \{x\}$.

<u>Démonstration de</u> (a) $\Rightarrow$ (b).

Si E n'est pas dense dans $(F , \mathcal{U})$

$$\exists\ K \in \mathcal{S} , \quad \exists\ f \in F : \qquad \|f - E\|_K = 1 \ .$$

Considérons un point $x_f \in \Omega$, et vérifiant (a), (b), et s un élément de E tel que

$$\sup E_f/K \leq s/K \leq f/K \ .$$

On note

$$C = \{y \in K \cup \{x_f\} \; ; \; f(y) - s(y) \leq 1\} \supset \bigcup_{e \in E_f} \{e = \sup f(K) - 1\} \; .$$

Montrons que $c(E_f \, , C \, , \Omega) \supset K$.

$$\forall \; y \in K \setminus c \; , \; \forall \; e \in E_f \; , \qquad e(y) < f(y) - 1 \leq \sup e(c) \; .$$

Montrons que $c(F \, , C \, , \Omega) \not\supset K$.

Si $c(F \, , C \, , \Omega) \supset K$, on voit que $f - s \leq 1$ sur K . Mais alors

$$\|f - (s + (1/2))\| \leq 1/2 \quad \text{sur} \quad K \; ,$$

ce qui est impossible, car $(s + (1/2)) \in E$.

THÉORÈME 7. – Si l'application $p : F' \to E'$ est injective sur $c(F, \varphi(\Omega), F')$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $\forall \; K$ compact de Ω , $c(E \, , K \, , \Omega)$ est compact,

(b) $\forall \; K$ compact de Ω , $c(F \, , K \, , \Omega)$ est compact,

(c) $\forall \; K$ compact de Ω , $c(F \, , K \, , \Omega)$ est compact, et E est dense dans F muni de la structure uniforme $\mathcal{U}$ de la convergence uniforme sur tout compact de Ω .

Démonstration. – Comme $E \subset F$, $c(E \, , K \, , \Omega) \supset c(F \, , K \, , \Omega)$. On voit donc que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftarrow$ (c).

Utilisant le théorème 2(b), on voit que

$$(b) \Rightarrow (\forall \; K \; , \qquad c(F \, , K \, , \Omega) = c(E \, , K \, , \Omega)) \; .$$

Utilisant le théorème 6, on voit que

$$(c) \Leftrightarrow (\forall \; K \text{ compact de } \Omega \; , \qquad c(F \, , K \, , \Omega) = c(E \, , K \, , \Omega) \text{ cempact}) \; .$$

Si ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et Ω un ouvert de ω , si E est l'ensemble des restrictions à Ω des parties réelles des fonctions holomorphes sur ω , on peut appliquer le théorème précédent.

THÉORÈME 8. – Si

$E = \{$restrictions à Ω des parties réelles des fonctions holomorphes sur $\omega\}$

$F = \{$parties réelles des fonctions holomorphes sur $\Omega\}$,

une condition nécessaire et suffisante pour que Ω soit un domaine de Runge (c'est-à-dire vérifie, $\forall \; K$ compact de Ω , $c(E \, , K \, , \Omega)$ est compact) est que Ω soit un domaine de Stein (i. e. $\forall \; K$ compact de Ω , $c(F \, , K \, , \Omega)$ est compact) et que E soit partout dense dans F .

Ce théorème est l'expression de (a) $\Leftrightarrow$ (c) du théorème 7.

3. Application à la compactification du domaine de définition : problèmes de Dirichlet et de Martin, frontières distinguées.

Les théorèmes 4 et 5 nous conduisent à penser qu'une étude des problèmes de Dirichlet, de Martin ou de frontières distinguées pourrait être réalisée de manière linéaire au moyen des points E-exposés lorsque Ω se plonge dans un ensemble $\sigma(E', E)$, relativement compact dans E'.

Lorsqu'il existe dans E un sous-espace E_0, $\mathcal{U}$-dense dans E et formé de fonctions bornées sur Ω, on pourra étudier les problèmes évoqués ci-dessus en plongeant Ω dans le dual de $[E_0]$.

Si E_0 est tonnelé, l'image de Ω sera alors $\sigma(E_0', E_0)$-compacte.

Mais il existe des espaces (Ω, E) de fonctions, où seules les constantes soient bornées :

Exemple 1.

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus$ le triangle de sommets $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$.

E = l'ensemble des fonctions affines sur Ω.

Exemple 2.

$$\Omega = \mathbb{R}^2 , \quad E = \{\text{fonctions harmoniques}\}$$

$$\text{ou bien,} \quad E = \{|h| \; ; \; h \text{ holomorphe}\} .$$

Alors le théorème de Liouville montre que toute fonction bornée est constante. On est donc conduit à introduire les définitions suivantes :

DÉFINITIONS. - Soit (Ω, E) ; on introduit une fonction auxiliaire, γ, continue, croissante, impaire et injective, de $\{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\}$ dans lui-même, telle que $\gamma \circ E$ soit formé de fonctions bornées sur Ω. On note E_γ l'espace vectoriel engendré par $\gamma \circ E$, E'_γ son dual, ε_C l'injection de Ω dans un sous-ensemble $\sigma(E'_\gamma, \gamma \circ E)$-complet, C, de E'_γ. On voit alors que, pour tout $A \subset \Omega$,

$$c(\gamma \circ E , \varepsilon_C(A) , C) = c(E_\gamma , \varepsilon_C(A) , C) ,$$

est $\sigma(C, \gamma \circ E)$-compact. On note

$$\mathcal{M}_C(A) = \gamma \circ E - \mathcal{E}[c(\gamma \circ E , \varepsilon_C(A) , C)] = E_\gamma - \mathcal{E}[c(E_\gamma , \varepsilon_C(A) , C)] .$$

On déduit alors du théorème 5 que, si E est filtrant sur C, la restriction, à $\mathcal{M}_C(A)$, d'une fonction de E détermine celle-ci sur $\varepsilon_C(A)$, donc sur A. On dira alors que A est E_C-déterminant. S'intéressant au problème d'existence, on dira de même que A est E_C-simplicial si toute fonction f^γ, définie et uniformément continue sur $\mathcal{M}_C(A)$, muni de $\sigma(C, \gamma \circ E)$, se prolonge en, au moins, un élément $\gamma \circ f$ appartenant à $\gamma \circ E$.

PROPOSITION 9. - Si $c(\gamma \circ E ; \varepsilon_C(A), C)$ est un simplexe métrisable dans E'_γ, si $\mathcal{M}_C(A)$ en est égal à l'ensemble des points extrémaux (sens usuel) et est fermé, toute fonction continue sur $\mathcal{M}_C(A)$ se prolonge en, au moins, un élément du dual topologique de E'_γ , muni de $\sigma(E'_\gamma , E_\gamma)$, donc un élément de E_γ (mais non nécessairement de $\gamma \circ E$).

La proposition suivante permet de voir les connexions de cette étude et des problèmes de Dirichlet et de Martin.

PROPOSITION 10. - Si E est un espace vectoriel de fonctions continues sur un compact Ω , sans extréma locaux stricts sur un ouvert $\mathcal{V}$ de Ω , alors Ω est $\sigma(\Omega , E)$-compact et $\mathcal{M}_\Omega(\Omega)$ est contenu dans $\Omega \setminus \mathcal{V}$. Ceci s'applique aux deux cas suivants :

(a) Ω compact de R^n , E espace des fonctions continues sur Ω , harmoniques sur $\mathcal{V} = \Omega^\circ$; alors $\mathcal{M}_\Omega(\Omega)$ est la frontière fine de $\mathcal{V}$ dans R^n , et

$$\mathcal{M}_\Omega(\Omega) \subset \Omega \setminus \mathcal{V} .$$

(b) Si H est l'espace des fonctions harmoniques sur un ouvert $\mathcal{V}$ de R^n , si $\gamma = \text{Arc tg}$, et si E est l'e. v. engendré par $\gamma \circ H$, et Ω est le compactifié de Martin de $\mathcal{V}$, alors $\mathcal{M}_\Omega(\Omega)$ s'identifie avec les fonctions harmoniques extrémales sur $\mathcal{V}$, et est contenu dans $\Omega \setminus \mathcal{V}$.

DÉFINITIONS. - On note E^+ le cône positif de E ; on suppose qu'il admet une base $\mathcal{U}$-compacte, B , que $1 \in B$, et que E est réticulé pour son ordre propre ; on note $\mathcal{E}(B)$ les éléments extrémaux de B .

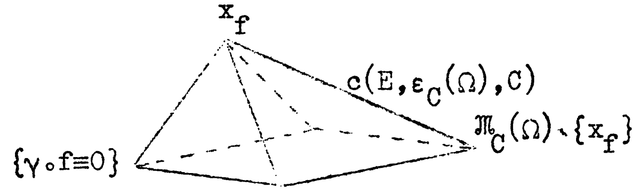
THÉORÈME 11. - Si Ω est un K_σ muni de l'espace vectoriel E , si tout système filtrant croissant et majoré dans E^+ est équicontinu sur tout compact et y converge uniformément vers sa borne supérieure qui appartient à E^+ , si, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}(B)$:

$$\{x \in c(E , \varepsilon_C(\Omega) , C) : \gamma \circ f(x) = \sup(\gamma \circ f/\Omega)\} = \{x_f\}$$

et

$$\gamma \circ f \equiv 0 \text{ , sur } \mathcal{M}_C(\Omega) \setminus \{x_f\} \text{ , si } \bigcup_{f\in\mathcal{E}(B)} \{x_f\} = \mathcal{M}_C(\Omega)$$

alors Ω est E_C-simplicial.



Démonstration. - On identifie $\mathcal{E}(B)$ à un sous-ensemble de $\mathcal{M}_C(\Omega)$. Soit μ une probabilité sur $\mathcal{M}_C(\Omega)$ telle que,

$$\forall f \in \mathcal{E}(B) : \mu[f / \mathcal{M}_C(\Omega)] \neq 0 ,$$

et telle que μ (image de $\mathcal{E}(B)$) $= 1$.

Soit f^r une fonction ≥ 0, définie sur $\mathfrak{M}_C(\Omega)$, majorée par une constante M. Pour tout ε, diviseur de $M' = \gamma^{-1}(M)$, on pose $N\varepsilon = M'$ et

$$A_i^\varepsilon = \{x \in \mathfrak{M}_C(\Omega) \ ; \ f^n \geq \gamma(M' - i\varepsilon)\} .$$

On voit que, sur $A_i^\varepsilon \setminus A_{i-1}^\varepsilon$, l'oscillation de f^n est inférieure à ε et que

$$\bigcup_{i=1}^N A_i^\varepsilon = \mathfrak{M}_C(\Omega) .$$

Si x appartient à l'image, dans $\mathfrak{M}_C(\Omega)$, de $\mathcal{E}(B)$, on note g_x l'unique fonction de $\mathcal{E}(B)$, nulle sur $\mathfrak{M}_C(\Omega) \setminus \{x\}$ et qui prenne son maximum en x. On pose

$$f_i^\varepsilon = c[\varepsilon\gamma^{-1} \int_{A_i^\varepsilon} [\mu(A_i^\varepsilon)]^{-1} \, d\mu(\frac{g_x}{\mu(g_x)})] .$$

On voit que $\gamma^{-1}\ \varepsilon^{-1}\ f_i^\varepsilon$ est le barycentre d'une mesure portée par $\mathcal{E}(B)$. C'est donc une fonction de B.

Par ailleurs, il est immédiat que :

$$f_i^\varepsilon / \mathfrak{M}_C(\Omega) \setminus A_i^\varepsilon \equiv 0 , \quad f_i^\varepsilon / A_i^\varepsilon \equiv \gamma(\varepsilon) .$$

Si l'on note :

$$f^\varepsilon = \gamma[\textstyle\sum_{i=1}^N \gamma^{-1}(f_i^\varepsilon)]$$

on voit que, sur $A_i^\varepsilon \setminus A_{i-1}^\varepsilon = \{\gamma(M' - i\varepsilon) \leq f^n < \gamma(M' - (i-1)\varepsilon)$,

$$f^\varepsilon = \gamma(\textstyle\sum_{j=1}^N \gamma^{-1}(f^\varepsilon)) = \gamma(\sum_{j=1}^N \varepsilon) = \gamma((N-i)\ \varepsilon) ,$$

c'est-à-dire

$$f^\varepsilon = \gamma(M' - i\varepsilon) = \inf_{A_i^\varepsilon \setminus A_{i-1}^\varepsilon} (f^n) .$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, la famille f^ε est croissante et majorée par M. On peut alors déduire que, dans E, $\gamma^{-1}(f^\varepsilon)$ est une famille croissante, lorsque $\varepsilon \searrow 0$, majorée par $\gamma^{-1}(M) = M'$. Il est donc équicontinu et uniformément convergent sur tout compact de Ω vers un élément $f \in E$. On voit alors que $\gamma \circ f$ est bien le prolongement cherché.

THÉORÈME 12.

(a) <u>Si</u> Ω <u>est</u> E_C<u>-simplicial pour un</u> C, <u>si</u> $\forall\ g, f \in E$, $\gamma^{-1}(\gamma\circ g + \gamma\circ f) - g \in E$, <u>alors</u> E <u>est réticulé pour son ordre propre</u> (<u>défini par</u> E^+).

(b) <u>Si</u> E <u>est réticulé pour son ordre propre et</u> $\mathcal{U}$<u>-complet</u>, <u>si</u> Ω <u>est</u> E_C<u>-déterminant</u>, <u>si</u> E <u>vérifie certaines conditions supplémentaires</u>, Ω <u>est</u> E_C<u>-simplicial</u>.

Ce théorème n'est pas démontré ici ; la démonstration en est assez technique. Son intérêt est de montrer une analogie entre la E_C-simplicialité et la simplicialité de convexes compacts, définie et étudiée par G. CHOQUET.

CONCLUSION. - Cette étude peut s'appliquer, en particulier, à l'étude des domaines Ω de $\mathbb{C}^n$, simpliciaux pour les fonctions pluriharmoniques. On démontre que, si f est une fonction continue sur Ω , dont la restriction à toute droite complexe est $\underset{\sim}{C}$-harmonique minimale, alors f est minimale dans l'ensemble des pluriharmoniques.

Utilisant le théorème 11, on obtient alors une forme assez générale de domaines Ω , relativement compacts dans $\underset{\sim}{C}^n$, simpliciaux dans leurs $\underset{\sim}{C}^n$-adhérences pour les fonctions pluriharmoniques, en considérant, comme ensemble de définition de la fonction à prolonger, non la frontière topologique, mais l'ensemble $\mathfrak{M}_{\bar{\Omega}\underset{\sim}{C}^n}(\Omega)$, relatif à l'espace vectoriel E des fonctions bornées et pluriharmoniques sur Ω .

Des développements prolongeant le présent texte feront l'objet de deux articles publiés par ailleurs [13], [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNARD (Alain). - Caractérisation de certaines parties d'un espace compact muni d'un espace vectoriel ou d'un algèbre de fonctions continues, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 17, 1967, fasc. 2, p. 359-382.

[2] BONY (Jean-Michel). - Représentation intégrale sur les cônes convexes faiblement complets, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 3e année, 1963/64, n° 5, 7 p.

[3] CHOQUET (Gustave). - Mesures coniques maximales sur les cônes convexes faiblement complets, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6e année, 1961/62, n° 12, 15 p.

[4] Colloque sur les fonctions de plusieurs variables [1953. Bruxelles]. - Liège, George Thone ; Paris, Masson, 1953 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[5] DAVIES (E. B.). - A generalised theory of convexity, Proc. London math. Society, Series 3, t. 17, 1967, p. 644-652.

[6] EDWARDS (D. A.). - Choquet boundary theory for certain spaces of lower semicontinuous functions, "Function algebras, Proceedings of an international Symposium"[1965. Tulane], p. 300-309.

[7] EWEN (A. J.). - Generalised convexity and sets of extreme points, J. London math. Soc., Series 2, t. 2, 1970, p. 395-402.

[8] HÖRMANDER (Lars). - An introduction to complexe analysis in several variables. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (University Series in higher Mathematics).

[9] GUNNING (R. C.) and ROSSI (H.). - Analytic functions of several complex variables. - Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965 (Prentice Hall Series in modern Analysis).

[10] LELONG (Pierre). - Fonctions pluri sous harmoniques et formes différentielles positives, "Funzioni e varieta complesse" [1963. Varenna], 136 p. - Roma, Cremonese, 1963 (Centro Internazionale Matematico Estivo, 1963, 2° ciclo).

[11] LUMER (Gunter). - Points extrémaux associés ; frontières de Silov et Choquet ; principe du minimum, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 858-861.

[12] LUMER (Gunter). - Points extrémaux associés ; frontières de Silov et Choquet ; application aux cônes de fonctions semi-continues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 1066-1068.

[13] MASTRANGELO-DEHEN (Michèle). - Convexité relative à un ensemble de fonctions (à paraître).

[14] MASTRANGELO-DEHEN (Michèle). - Dualité de cônes topologiques (à paraître).

[15] MOKOBODZKI (Gabriel). - Cônes normaux et espaces nucléaires ; cônes semi complets, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 7e année, 1967/68, n° B6, 14 p.

[16] MOKOBODZKI (Gabriel). - Espaces de Riesz complètement réticulés et ensembles équicontinus de fonctions harmoniques, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 5e année, 1965/66, n° 6, 8 p.

[17] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes de fonctions et théorie du potentiel, I., Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 11e année, 1966/67, n° 8, 35 p.

[18] PHELPS (Robert). - Lectures on Choquet's theorem. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

(Texte définitif reçu le 19 mars 1974)

Michèle MASTRANGELO-DEHEN
9 rue Poliveau
75005 PARIS