Hicham Fakhoury

Le théorème de Korovkin dans $C(X)$ et $L^P(\mu)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. nº 9, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
13e année, 1973/74, n° 9, 20 p.

10 janvier 1974

LE THÉORÈME DE KOROVKIN DANS $C(X)$ ET $L^{p}(\mu)$

par Hicham FAKHOURY

Introduction et notations. - Soient E et F deux espaces topologiques, et $\mathfrak{a}$ une famille d'applications continues de E dans F. Si T est une application de $\mathfrak{a}$, et M une partie de E, on appelle ombre de M, relativement à $(\mathfrak{a}, T, F)$, l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(M, T, F)$ des points x de E tels que, pour toute suite équicontinue $(T_n)_{n\in N}$ dans $\mathfrak{a}$ qui converge simplement vers T sur la partie M, on ait $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$. Si aucune confusion n'est à craindre quant à la nature de $\mathfrak{a}$, on notera $\mathcal{O}(M, T, F)$ cette ombre. Dans le cas où $E = F$ et où T est l'application identique de E dans lui-même, on désignera l'ombre par $\mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(M)$.

Le premier des résultats concernant l'étude des ombres est dû à KOROVKIN et s'énonce ainsi : si M est le sous-espace de $C([0, 1])$ formé des polynômes de degré inférieur à 2, et si $\mathfrak{a}$ est le cône des opérateurs positifs de $C([0, 1])$ dans lui-même ; alors l'ombre $\mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(M)$ coïncide avec l'espace $C([0, 1])$. Le but du présent exposé est d'étendre et de préciser le théorème précédent.

Dans une première partie, on supposera que V et W sont deux espaces de Banach réticulés, et que T est un opérateur réticulant de V dans W ; dans ce cas, on donne des conditions suffisantes pour qu'un élément f de V appartienne à $\mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(M, T, F)$, où $\mathfrak{a}$ est le cône $\mathcal{L}^{+}(V, W)$. Une attention particulière est attachée au cas où V est un espace de type $C(X)$ ou bien $C_0(X)$ (i. e. l'espace des fonctions continues, nulles à l'infini sur un espace localement compact X). On verra, dans ce cas, que l'ombre $\mathcal{O}(M, T, W)$ est exactement l'ensemble des fonctions f de $C_0(X)$ qui coïncident avec leurs enveloppes inférieures et supérieures relativement à M sur le support de T. En suite on supposera que $\mathfrak{a}$ est la classe des opérateurs positifs contractants de V dans W, et on montrera que $\mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(M)$ d'une partie M de $L^{p}(\mu)$ relativement à $\mathfrak{a}$ et à l'identité coïncide avec le sous-espace vectoriel fermé réticulé engendré par la partie M. Signalons à cet effet que lors de la rédaction de cet exposé nous avons appris que certains résultats de cette partie ont été indépendemment obtenus par BERENS et LORENTZ d'une part, et BERNAU d'autre part.

Dans la deuxième partie, on considère le cas où $V = A(K)$ et $W = A(X)$, où K et X sont deux convexes compacts, et $A(K)$ (resp. $A(X)$) est l'espace des fonctions affines continues sur K (resp. X) muni de l'ordre canonique et la norme uniforme. Le but sera l'étude de l'ombre d'une partie M de $A(K)$ relativement aux suites d'opérateurs positifs et à la topologie faible sur l'espace $A(X)$. Les résultats se généralisent immédiatement au cas des espaces de Banach ordonnés 1-normaux. Enfin, on suppose que l'opérateur T de $A(K)$ dans $A(X)$ est défini par

$T(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, f[\Phi_i(x)]$ où $\Phi_i[\varepsilon(X)] \subset \mathcal{E}(K)$ pour tout $i = 1, \dots, n$; le but sera de trouver une condition suffisante pour qu'une partie M de $A(K)$ ait son ombre $\Theta(M, T, A(X))$ égale à l'espace $A(K)$ tout entier.

Rappelons qu'un espace de Banach V, ordonné par un cône convexe saillant fermé V^+, est dit <u>normal</u> s'il existe sur V une norme équivalente qui est croissante sur le cône V^+. Ceci revient à dire qu'il existe $\alpha \geq 1$ tel que les inégalités

$$x \leq y \leq z \quad \text{impliquent} \quad \|y\| \leq \alpha(\|x\| \vee \|z\|) .$$

L'espace sera dit α-normal si la valeur particulière de α, qui intervient dans la définition, nous est utile. Si V est un espace de Banach ordonné, on note $B(V^+)$ la partie positive de sa boule unité $B(V)$. Si aucune confusion n'est à craindre, on désignera par K la partie positive de $B(V')$. On rappelle que V est isométrique pour la norme, et isomorphe pour l'ordre, à l'espace $A_0(K)$ des fonctions affines continues sur K nulles en 0 si, et seulement si, V est 1-normal. Si V est un espace de Banach réticulé, on note f^+ la partie positive d'un élément f de V. Un tel espace est dit <u>M-espace</u> si l'ordre et la norme sont reliés par les deux relations

(a) $\quad \|f \vee g\| = \|f\| \vee \|g\|$ pour tout f et g dans V^+,

(b) $\quad \||f|\| = \|f\|$ pour tout f dans V.

Si V et W sont deux espaces de Banach ordonnés, on note $\mathcal{L}^+(V, W)$ le cône des opérateurs positifs de V dans W.

1. L'ombre d'une partie relativement à un opérateur réticulant.

Dans toute cette partie, sauf mention expresse du contraire, la famille $\mathfrak{A}$ sera le cône $\mathcal{L}^+(V, W)$ des opérateurs positifs de V dans W. Le lemme suivant est une extension d'un résultat de KITTO et WULBERT [9]. Il est déjà évident que l'ombre de M coïncide avec l'ombre de l'espace vectoriel fermé engendré par M. De plus, les suites $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérées étant équicontinues l'ombre est toujours un sous-espace vectoriel fermé dans V.

LEMME 1.1. - <u>Soient V et W deux espaces de Banach réticulés normaux, et T un opérateur réticulant de V dans W. Pour qu'un élément f dans V appartienne à $\Theta(M, T, W)$, il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux suites finies $(h_i)_{i=1}^{p}$ et $(h'_j)_{j=1}^{n}$ dans M et un vecteur e de V qui vérifient</u> :

(a) $\bigvee_{i=1}^{p} h_i - e \leq f \leq \bigwedge_{j=1}^{n} h'_j + e$;

(b) $\|T(\bigwedge_{j=1}^{n} h'_j - \bigvee_{i=1}^{p} h_i)\| < \varepsilon$;

(c) $\|e\| < \varepsilon$.

<u>Démonstration</u>. - Comme W est un α-normal, on peut supposer, quitte à remplacer sa norme par une norme équivalente, que W est 1-normal. Soit f un élément de V qui vérifie les conditions du lemme, et soit $\varepsilon > 0$. Soit $(T_s)_{s\in\mathbb{N}}$ une suite

équicontinue dans $\mathcal{L}^+(V, W)$ qui converge simplement vers T sur M, on peut supposer que, pour tout $s \in \underset{\sim}{N}$, on a $\|T_s\| \leq A < \infty$. En utilisant (a) et la positivité de T_s et de T, on a :

$$T_s(f) - T(f) \leq T_s(\wedge_1^n h'_j) + T_s(e) - T(\vee_1^p h_i) + T(e) .$$

$$\leq T_s(\wedge_1^n h'_j) - T(\wedge_1^n h'_j) + T(\wedge_1^n h'_j) - T(\vee_1^p h_i) + (T_s + T)(e) .$$

En utilisant le fait que T est un opérateur réticulant,

(i) $\quad T_s(f)-T(f) \leq \wedge_{j=1}^n T_s(h'_j)-\wedge_{j=1}^n T(h'_j)+T(\wedge_{j=1}^n h'_j-\vee_{i=1}^p h_i)+(T_s+T)(e)$.

La même méthode permet de montrer l'inégalité :

(ii) $\quad T_s(f)-T(f) \geq \vee_{i=1}^p T_s(h_i)-\vee_{i=1}^p T(h_i)-T(\wedge_{j=1}^n h'_j-\vee_{i=1}^p h_i)-(T_s+T)(e)$.

Comme l'espace W est 1-normal, on a :

(iii) $\quad \|\wedge_{j=1}^n T_s(h'_j)-\wedge_{j=1}^n T(h'_j)\| = \|\wedge_{j=1}^n T_s(h'_j)-T(h'_j)\| \leq \sum_{j=1}^n \|T_s(h'_j)-T(h'_j)\|$,

(iv) $\quad \|\vee_{i=1}^p T_s(h_i)-\vee_{i=1}^p T(h_i)\| \leq \sum_{i=1}^p \|T_s(h_i)-T(h_i)\|$.

En utilisant la normalité de W dans les inégalités (i) et (ii) on a :

$$\|T_s(f) - T(f)\| \leq \sum_{j=1}^n \|T_s(h'_j) - T(h'_j)\|$$
$$+ \sum_{i=1}^p \|T_s(h_i)-T(h_i)\|+2\|T(\wedge_{j=1}^n h'_j-\vee_{i=1}^n h_i)\|+2\|T_s+T\| \, \|e\| .$$

En utilisant les hypothèses (b) et (c) du lemme, on obtient que la suite $T_s(f)$ converge sur $T(f)$; par conséquent, f est un élément de $\Theta(M, T, W)$.

On verra plus loin que l'hypothèse sur l'opérateur T est essentielle pour la validité du lemme ; d'autre part, imposer dans le lemme précédent $e = 0$ diminue considérablement la généralité. En effet, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. - Soit M un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel réticulé V ; alors le sous-espace M est cofinal, si, et seulement si, V possède une unité d'ordre u qui appartient à M.

La démonstration de la condition nécessaire consiste à prouver que M possède une base $(g_i)_{i=1}^n$ formée d'éléments positifs. La condition suffisante est triviale.

Ainsi, l'espace $C_0(\underset{\sim}{N})$ ne possèdant pas d'unité d'ordre, il n'existe pas de sous-espace de dimension finie cofinal. Or, on verra plus tard que le sous-espace M de $C_0(\underset{\sim}{N})$ engendré par $\{(1/n), (1/n^2), (1/n^3)\}$ admet pour ombre l'espace $C_0(\underset{\sim}{N})$, de plus toute suite de $C_0(\underset{\sim}{N})$ vérifie les conditions du lemme relativement au sous-espace M. D'après la proposition 1.2, il est clair que la condition $e \equiv 0$ diminue la généralité du lemme.

DÉFINITION 1.3. - Soient V et W deux espaces ordonnés normaux : si T est un opérateur positif de V dans W, on appelle support de T l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(T) = \cap_{f\in \mathrm{Ker}\, T} \{k \in K \ ; \ f(k) = 0\} ,$$

où K est la partie positive de $B(V')$.

LEMME 1.4. - Soit T un opérateur réticulant d'un espace de Banach réticulé normal V dans W . Si T' est l'opérateur transposé, alors $\mathrm{Supp}(T) = \overline{T'(W'^+)} \cap K$, où l'adhérence est prise au sens de $\sigma(V' , V)$. De plus, $\mathrm{Supp}(T)$ est une face fermée de V'^+ .

Démonstration. - Désignons par S le sous-cône de V'^+ , défini par

$$S = \cap_{f\in \mathrm{Ker}\, T} \{k \in V'^+ \ ; \ f(k) = 0\} .$$

Alors l'inclusion $T'(W'^+) \subset S$ est élémentaire ; comme S est $\sigma(V' , V)$-fermé on en déduit l'inclusion $\mathrm{Supp}(T) = S \cap K \supset \overline{T'(W'^+)} \cap K$.

Inversement, soit k un point de $\mathrm{Supp}(T)$ qui n'appartient pas à $\overline{T(W'^+)}$; grâce au théorème de Hahn-Banach on peut trouver un élément f de V tel que $f(k) > 0$ et $f/\overline{T'(W'^+)} \leq 0$. Par suite, $T(f) \leq 0$; comme T est un opérateur réticulant $T(f^+) = [T(f)]^+ = 0$. Le point f^+ est donc dans $\mathrm{Ker}(T)$; or

$$f^+(k) \geq f(k) > 0$$

montre que k n'est pas dans $\mathrm{Supp}(T)$, d'où la contradiction recherchée.

Pour montrer que le support de T est une face fermée de K , il suffit maintenant de vérifier que S est un sous-cône héréditaire de V'^+ . Soient k_0 un point de S , et k un point de V'^+ majoré par k_0 . Si f est dans $\mathrm{Ker}\,(T)$, on a $T(f^+) = [T(f)]^+ = 0$ et $T(f^-) = 0$ puisque T est un opérateur réticulant. Mais alors les inégalités $0 < k \leq k_0$ impliquent $0 \leq f^+(k) \leq f^+(k_0)$ et $0 \leq f^-(k) \leq f^-(k_0)$, ce qui prouve que $f(k) = 0$, et que le point k appartient à S .

COROLLAIRE 1.5. - Si V et W sont deux espaces de Banach réticulés normaux, et si T est réticulant de V dans W , alors, pour tout f dans V , on a

$$\|T(f)\| \leq \|T\| \ \sup\{|f(k)| \ ; \ k \in \mathrm{Supp}\, T\} .$$

De plus, $T(f)$ est positif si, et seulement si, $f(k)$ est positif pour tout k dans $\mathrm{Supp}(T)$.

La démonstration est une conséquence simple du lemme précédent. Nous allons introduire maintenant quelques notations :

Soit F une face fermée de K qui engendre une face du cône V'^+ . Pour tout f dans V , on pose $f^\wedge$ (resp. $f^\vee$) la fonction définie sur K par

$$f^\wedge(k) = \inf\{h(k) \ ; \ h \in M , \ h \geq f\}$$

$$f^\vee(k) = - \widehat{(- f)}(k) .$$

Comme le sous-espace M n'est pas cofinal dans V , les fonctions $f^\wedge$ et $f^\vee$ prendront leurs valeurs dans la droite achevée $[- \infty , + \infty]$. Cependant, si f est majorée (resp. minorée) par un élément de M , la fonction $f^{\wedge}$ (resp. $f^{\vee}$) est finie sur K . Avec ces définitions, on notera M_F le sous-espace de V formé des éléments f qui vérifient l'égalité $f^{\vee}(k) = f^{\wedge}(k)$ pour tout point k dans l'ensemble $\mathcal{E}(F)$ des points extrémaux de F .

THÉORÈME 16.

(a) Soient V et W deux espaces de Banach réticulés normaux, et T un opérateur réticulant de V dans W . On suppose que la face $\mathrm{Supp}(T)$ vérifie la condition suivante :

L'ensemble $\bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda.\mathcal{E}[\mathrm{Supp}(T)]$, enveloppe homogène de $\mathrm{Supp}(T)$ dans K , est compact.

Alors, on a l'inclusion $M_{\mathrm{Supp}(T)} \subset \Theta(M , T , W)$.

(b) Soient V et W deux espaces de Banach réticulés normaux, où V est un M-espace et T un opérateur réticulant de V dans W . Alors $M_{\mathrm{Supp}(T)} \subset \Theta(M,T,W)$.

Démonstration. - Notons déjà que (b) est une conséquence immédiate de (a). En effet, d'après [6] l'ensemble des génératrices extrémales de V'^{+} est un fermé non vide ; de plus, K étant un chapeau universel de V'^{+} , tout point de $\mathcal{E}[\mathrm{Supp}(T)]$ détermine une telle génératrice. Par conséquent, l'enveloppe homogène dans K de $\mathcal{E}[\mathrm{Supp}(T)]$ n'est autre que $\mathcal{E}_g(S) \cap K$, où $\mathcal{E}_g(S)$ est l'ensemble des génératrices extrémales de S .

Pour démontrer (a), considérons un élément f de V ; l'ensemble des points k de V'^{+} , où les fonctions $f^{\wedge}$ et $f^{\vee}$ coïncident, est un sous-cône de V'^{+} . L'hypothèse $f \in M_{\mathrm{Supp}(T)}$ implique que ces deux fonctions coïncident sur l'enveloppe homogène de $\mathcal{E}[\mathrm{Supp}(T)]$ dans K . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe, grâce à la compacité de cette enveloppe, deux suites finies $(h_i)_{i=1}^{p}$ et $(h'_j)_{j=1}^{n}$ dans M , vérifiant :

$$\left(\bigwedge_{j=1}^{n} h'_j - \bigvee_{i=1}^{p} h_i\right)(k) < \varepsilon \qquad \text{pour tout } k \text{ dans } \bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda\mathcal{E}[\mathrm{Supp}(T)] ,$$

$$\bigvee_{i=1}^{p} h_i(k) \leq f(k) \leq \bigwedge_{j=1}^{n} h'_j(k) \quad \text{pour tout } k \text{ dans } K .$$

Le corollaire précédent et le principe du maximum de Bauer impliquent

$$\left\|T\left(\bigwedge_{j=1}^{n} h'_j - \bigvee_{i=1}^{p} h_i\right)\right\| < \varepsilon\|T\| .$$

Nous sommes dans les conditions du lemme 1.1 ; la fonction f est donc dans $\Theta(M , T , W)$.

Le théorème 1.5 a été indépendemment obtenu par BERENS et LORENTZ dans le cas où V est l'espace $C(X)$ des fonctions continues sur un compact X (voir [2]) .

Soient V un espace de Banach ordonné, V^{+} un cône positif, et M un sous-espace fermé de V . On note $M^{\sim}$ l'idéal engendré par M ; c'est-à-dire

$$M^{\sim} = (M + V^{+}) \cap (M - V^{+}) .$$

Même dans le cas où M est de dimension finie, on ne peut affirmer en général que $M^{\sim}$ est un sous-espace fermé de V (pour un contre-exemple, prendre pour V l'espace des fonctions continues sur $[0\,,\,1]$ nulles en 0, et pour M le sous-espace des fonctions linéaires). En fait, il est aisé d'établir le résultat suivant.

PROPOSITION 1.7. - Soient V un espace de Banach ordonné, et M un sous-espace positivement engendré et fermé dans V ; alors $M^{\sim} = (M + V^{+}) \cap (M - V^{+})$ est fermé si, et seulement si, M est uniformément cofinal dans $M^{\sim}$ (c'est-à-dire il existe $a \geq 1$ tel que, pour tout $g \in M^{\sim}$, il existe f dans M vérifiant $g \leq f$ et $\|f\| \leq a\|g\|$).

Démonstration. - Si $M^{\sim}$ est fermé dans V, la conclusion provient de [7], où il est établi qu'un sous-espace fermé cofinal est nécessairement uniformément cofinal. Inversement, supposons que M est uniformément cofinal dans $M^{\sim}$, et considérons une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $M^{\sim}$ qui converge vers un élément g dans V. Par extraction éventuelle d'une sous-suite, on peut supposer que la série $(\|g_{n+1}-g_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Pour tout n, il existe un f_n dans M qui majore $g_{n+1} - g_n$, et vérifie $\|f_n\| \leq a\|g_{n+1} - g_n\|$. La série $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers un f dans M puisqu'il est fermé dans V. Il est clair que l'on a $g \leq f$, ce qui montre que $g \in M^{\sim}$.

THÉORÈME 1.8. - Soient $C_0(X)$ l'espace des fonctions continues sur un espace localement compact nulles à l'infini, et M un sous-espace de $C_0(X)$. Alors, on a l'inclusion :

$$\mathcal{O}(M) \cap M^{\sim} \supset M_K = \{f \in C_0(X) \ ; \ f^{\vee}(x) = f^{\wedge}(x) \ , \ \forall\, x \in X\} \ .$$

Si de plus toute forme linéaire positive sur $M^{\sim}$ se prolonge en une mesure positive bornée sur X, et si tout point de X est un G_δ, alors on a l'égalité

$$\mathcal{O}(M) \cap M^{\sim} = M_K \ .$$

Démonstration. - D'après le théorème 1.6, le sous-espace M_K est inclus dans $\mathcal{O}(M\,,\,T\,,\,W)$ relativement à tout opérateur T et tout espace réticulé W. En particulier, $M_K \subset \mathcal{O}(M)$; ce qui montre bien que $M_K \subset \mathcal{O}(M) \cap M^{\sim}$.

Inversement, si f est un élément de $M^{\sim}$, il existe une forme linéaire $\ell^{\sim} \in M^{\sim\prime +}$ tel que $\ell^{\sim}(f) = f^{\wedge}(x)$ pour tout point x de X. En effet, la fonctionnelle p définie sur $M^{\sim}$ par $p(g) = g^{\wedge}(x)$ est sous-linéaire, et coïncide sur $\mathbb{R}.f$ avec la forme linéaire ℓ définie par $\ell(\lambda f) = \lambda f^{\wedge}(x)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un prolongement $\ell^{\sim}$ de ℓ définie sur $M^{\sim}$ et majoré par la forme sous-linéaire p. La forme linéaire $\ell^{\sim}$ est positive puisque, pour tout f dans $M^{\sim}$, qui est négatif, on a

$$\ell^{\sim}(f) \leq p(f) = f^{\wedge}(x) \leq 0 \ .$$

D'après l'hypothèse, $\ell^{\sim}$ se prolonge en une forme linéaire positive sur $C_0(X)$, c'est-à-dire en une mesure bornée μ. Soit f une fonction de $M^{\sim}$ qui n'appartient pas à M_K , quitte à remplacer f par $-f$ on peut toujours supposer qu'il existe un point x_0 de X tel que $f^\wedge(x_0) > f(x_0)$. Soit μ_0 la mesure bornée sur X construite comme précédemment et associée à la fonction f et au point x_0 . Ce dernier étant un G_δ de X , on peut construire une suite décroissante d'ouverts $(\omega_n)_{n\in N}$ relativement compacts et une suite $(\Phi_n)_{n\in N}$ de fonctions continues sur X vérifiant $\Phi_n(x_0) = 1$ et $\Phi_n|_{C_{\omega_n}} = 0$. Soit $\widetilde{T}_n$ l'opérateur positif de $C_0(X)$ dans lui-même défini par

$$T_n(g)(x) = \mu_0(g)\ \Phi_n(x) + [1 - \Phi_n(x)]g(x) .$$

Il est clair que $T_n(g)$ converge uniformément vers g pour toute fonction g de M . Mais $T_n(f)(x_0)$ converge vers $f^\wedge(x_0) > f(x_0)$. Ce qui montre que $T_n(f)$ ne converge pas (même simplement) vers la fonction f .

Remarques. - La non-convergence simple de $T_n(f)(x_0)$ vers $f(x_0)$ sera exploitée plus loin dans la deuxième partie (théorème 2.1 et suivants).

L'hypothèse topologique sur X est due au fait que les ombres sont toujours relatives à des suites d'opérateurs. On aurait pu faire une théorie analogue en définissant l'ombre d'une partie relativement à des filtres d'opérateurs et, dans ce cas le résultat précédent serait vrai sans la condition que tout point de X est un G_δ .

COROLLAIRE 1.9.

(a) On suppose que tout x de X est un G_δ et que l'idéal $M^\sim$, engendré par $M = M^+ - M^+$, est fermé dans $C_0(X)$. Alors on a l'égalité $\mathcal{O}(M) \cap M^\sim = M_K$.

(b) Si X est un espace compact, dont tout point est un G_δ , et si M est un sous-espace de $C(X)$, qui contient une fonction strictement positive, alors $\mathcal{O}(M) = M_K = \{f \in C(X)\ ;\ f^\wedge(x) = f^\vee(x)$ pour tout x dans $X\}$.

Démonstration. - L'assertion (b) est une conséquence de (a) puisqu'alors $M^\sim$ coïncide avec l'espace $C(X)$.

Pour établir (a), il suffit de remarquer que toute forme linéaire positive sur un idéal fermé $M^\sim$ de $C_0(X)$ se prolonge en une mesure bornée sur X . Ce fait peut se démontrer de plusieurs façons différentes : par exemple, en remarquant qu'un idéal fermé est en fait un idéal pour la structure d'algèbre de $C_0(X)$, et que toute forme linéaire positive est une forme linéaire continue sur $M^\sim$.

Remarque. - Le corollaire 9(b) a été indépendemment démontré par BERENS et LORENTZ [2], et le théorème 8 a été obtenu par BAUER dans le cas où M est un sous-espace adapté de l'espace $C_0(X)$ [voir [1]].

Soit M un sous-espace de $C_0(X)$ où X est un espace localement compact. On appellera frontière de Choquet du sous-espace M l'ensemble ∂_M des points x de X tels que ε_x soit l'unique mesure bornée sur X qui prolonge la forme linéaire

ℓ_x définie sur M par $\ell_x(f) = f(x)$. Il ressort des méthodes utilisées dans [5] (méthodes utilisées aussi dans la démonstration du théorème 8) qu'un point x de X est dans ∂_M si, et seulement si, $f^\vee(x) = f^\wedge(x)$ pour tout f dans $M^\sim$ dès que toute forme linéaire positive sur $M^\sim$ se prolonge en une unique mesure bornée positive sur X . Cette condition implique que $M^\sim$ est dense dans $C_0(X)$.

COROLLAIRE 1.10.

(a) Soient X un espace localement compact, et M un sous-espace de $C_0(X)$ tel que $M^\sim$ soit dense dans $C_0(X)$. Si, pour tout f dans $M^\sim$, les fonctions $f^\wedge$ et $f^\vee$ coïncident, alors $\Theta(M) = C_0(X)$.

(b) Supposons que tout point x de X soit un G_δ et que toute forme linéaire positive sur $M^\sim$ se prolonge en une unique mesure positive bornée sur X . Alors $\Theta(M) = C_0(X)$ si, et seulement si, $\partial_M = X$. Chacune des conditions précédentes implique que M sépare les points de X .

La démonstration consiste en une simple application du théorème 1.8. En conséquence, on retrouve le résultat classique de KOROVKIN :

"Si $V = C([0 , 1])$ et si M est le sous-espace des polynômes de degré inférieur à deux, alors $\Theta(M) = V$ ".

En effet, $M^\sim$ est égal à $C([0 , 1])$, et il est clair que $\partial_M = X$ puisqu'en chaque point x il existe une fonction f de M positive qui s'annule uniquement au point x . Plus généralement, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.11. - Soient X un espace localement compact, et $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions positives de $C_0(X)$ qui sépare les points de X . Si M désigne le sous-espace engendré par $\{\mathfrak{F} , \mathfrak{F}^2 , \mathfrak{F}^3\}$, on a $\Theta(M) = C_0(X)$.

Démonstration. - Le sous-espace $M^\sim$ est dense dans $C_0(X)$ puisque, pour tout x dans X , il existe une fonction f de $\mathfrak{F}$ telle que $f(x) > 0$. Il suffit par conséquent de vérifier que, pour tout f dans $M^\sim$, les deux fonctions $f^\wedge$ et $f^\vee$ coïncident sur X , mais ceci est simple à voir.

COROLLAIRE 1.12. - Soient M un sous-espace de $C_0(X)$, et $(\mu_n)_{n\in N}$ une suite équicontinue de mesures positives bornées telle que, pour tout h dans M , la suite $\mu_n(h)$ converge vers $h(x_0)$. Alors, pour tout f dans $M^\sim$, telle que $f^\wedge(x_0) = f^\vee(x_0)$, la suite $\mu_n(f)$ converge vers $f(x_0)$.

Si $M^\sim$ est dense dans $C_0(X)$ (en particulier, si M contient une fonction strictement positive), et si $x_0 \in \partial_M$, alors $\mu(f)$ converge vers $f(x_0)$ pour tout f dans $C_0(X)$.

Le corollaire 1.12 est une extension de la proposition 3 de [2] où seuls les espaces $C(X)$ sont considérés. Ce corollaire sera considérablement renforcé dans la deuxième partie.

Le corollaire 1.12 est faux pour une mesure μ_0 non réticulante. En effet, soit M, le sous-espace de $C([0\,,\,1])$ formé des polynômes de degré inférieur à 2. Soient $(t_i)_{i=1}^4$ quatre points distincts de $[0\,,\,1]$; les mesures $(\varepsilon_{t_i})_{i=1}^4$ sont liées sur le sous-espace M.

Il existe donc des coefficients $(\lambda_i)_{i=1}^4$ non nuls tels que

$$\mu = \sum_{i=1}^4 \lambda_i\, \varepsilon_{t_i} \in M^0 .$$

Par suite, μ^+ et μ^- sont deux mesures positives qui coïncident sur M. Ainsi, si la suite $(\mu_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ est définie par $\mu_n = \mu^+$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(h) = \mu^-(h) \quad \text{pour tout} \quad h \in M .$$

Cependant, $\mu_n = \mu^+$ ne converge pas vaguement vers la mesure μ^- bien que, la frontière de Choquet ∂_M du sous-espace M coïncide avec le segment $[0\,,\,1]$. On verra une étude systématique des opérateurs non réticulants dans la troisième partie.

Nous allons maintenant donner des résultats concernant les ombres dans les espaces $L^p(\mu)$. Si X est un espace compact, et μ une mesure positive sur X, on note I l'injection positive canonique de $C(X)$ dans $L^p(\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Il est clair que I est un opérateur réticulant de $C(X)$ dans $L^p(\mu)$ dont le support coïncide avec le support de la mesure μ. Ainsi si M est un sous-espace de $C(X)$, on peut considérer l'ombre $\Theta(M\,,\,I\,,\,L^p(\mu))$ qui est un sous-espace de $C(X)$. Mais comme $C(X)$ est canoniquement plongé dans $L^p(\mu)$, on peut considérer M comme un sous-espace de $L^p(\mu)$ et, par conséquent, étudier le sous-espace de $L^p(\mu)$ défini par l'ombre $\Theta(M)$ de M relativement à l'identité de $L^p(\mu)$ et aux opérateurs positifs de $L^p(\mu)$ dans lui-même.

PROPOSITION 1.13. - <u>Soient</u> X <u>un espace compact</u>, μ <u>une mesure positive sur</u> X, <u>et</u> M <u>un sous-espace de</u> $C(X)$ <u>contenant une fonction strictement positive sur le support de</u> μ. <u>Si</u> ∂_M <u>contient</u> $\mathrm{Supp}(\mu)$, <u>alors on a les relations suivantes</u>

(a) $\qquad \Theta(M\,,\,I\,,\,L^p(\mu)) = C(X)\,, \qquad 1 \leq p < \infty\,,$

(b) $\qquad \Theta(M) = L^p(\mu)\,, \qquad 1 \leq p < \infty\,.$

La démonstration de cette proposition se ramène à la remarque précédente et au théorème 1.6. L'assertion (b) se déduit de (a) en utilisant le fait que $\Theta(M)$ est fermé, qu'il contient $C(X)$ et que ce dernier espace est dense dans $L^p(\mu)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Le théorème suivant est dû à KRASNOSELSKIJ et LIFSIČ ; la démonstration que nous donnons reproduit la méthode utilisée par BERENS et LORENTZ pour établir ce résultat ; toutefois, elle est simplifiée par l'utilisation du lemme 1.

THÉORÈME 1.14. - <u>Soient</u> X <u>un espace compact métrisable</u>, M <u>un sous-espace qui contient une fonction strictement positive</u>, <u>et</u> μ <u>une mesure positive sur</u> X. <u>Alors</u> μ <u>est portée par</u> ∂_M <u>si, et seulement si</u>, $\Theta(M\,,\,I\,,\,L^p(\mu)) = C(X)$ <u>pour</u>

$1 \leqslant p < \infty$, (<u>resp</u>. $\mathcal{O}(M) = L^p(\mu)$ <u>pour</u> $1 \leq p < \infty$).

<u>Démonstration</u>. – On introduit l'ensemble

$$M_X = \{f \in C(X) \ ; \ f^\wedge(x) = f^\vee(x) \ \ \mu\text{-presque partout}\} .$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $f \in M_X$.

(b) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\delta > 0$, il existe un sous-compact K de X tel que $\mu(X \setminus K) < \delta$, et il existe deux suites $(h_i)_{i=1}^p$ et $(h_j)_{j=1}^n$ de fonctions de M telles que

$$\vee_{j=1}^n h_j \leq f \leqslant \wedge_{i=1}^p h_i ,$$

$$(\wedge_{i=1}^p h_i - \vee_{j=1}^n h_j)(k) < \varepsilon , \quad \text{pour tout point } k \text{ de } K .$$

La démonstration étant élémentaire, nous omettrons de la reproduire. Pour achever la preuve du théorème, nous avons besoin de quelques lemmes.

LEMME 1.15. – <u>La mesure</u> μ <u>est portée par</u> ∂_M <u>si, et seulement si, le sous-espace</u> M_X <u>coïncide avec</u> $C(X)$.

Si μ est portée par ∂_M il est clair que M_X coïncide avec $C(X)$ puisque, d'après [5], pour tout f dans $C(X)$, les fonctions $f^\wedge$ et $f^\vee$ coïncident sur ∂_M . Inversement, supposons que $M_X = C(X)$; par suite la mesure μ est portée par tout ensemble bordant associé à M (voir [5] pour la notion d'ensemble bordant). Par conséquent, la mesure μ est maximale au sens de CHOQUET, et elle est portée par ∂_M . Ceci a un sens puisque ∂_M est un G_δ , X étant un compact métrisable.

LEMME 1.16. – <u>Avec les notations précédentes, on a les inclusions suivantes</u>

$$M^\sim_{\text{Supp } \mu_0} \subset \mathcal{O}(M , I , L^p) \subset M_X$$

<u>pour tout</u> p <u>vérifiant</u> $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

<u>Démonstration</u>. – La première inclusion est une conséquence du théorème 1.6 sachant que le support de l'opérateur I coïncide avec le support de la mesure μ_0 .

Pour montrer la deuxième inclusion, considérons une fonction f_0 de $C(X)$ qui n'appartient pas à M_X . La fonction $f_0^\wedge$ étant s. c. s. et bornée sur X , elle est dans $L^\infty(\mu)$; par conséquent, on peut définir l'opérateur T de $M \oplus \underset{\sim}{R}.f_0$ dans $L^\infty(\mu)$ vérifiant $T(g + \lambda f_0) = g + \lambda f_0^\wedge$ pour tout $g \in M$ et $\lambda \in \underset{\sim}{R}$. L'opérateur T est continu, positif, et comme M est cofinal dans $C(X)$, l'opérateur T se prolonge en un opérateur $T^\sim$ continu positif de $C(X)$ dans $L^\infty(\mu)$ puisque ce dernier est complètement réticulé. Par suite, la fonction f_0 n'est pas dans $\mathcal{O}(M , I , L^\infty(\mu))$. Maintenant, si p est pris dans $[1 , \infty[$, l'espace $L^\infty(\mu)$ est inclus dans $L^p(\mu)$, et l'opérateur $T^\sim$, qui est positif de $C(X)$ dans $L^p(\mu)$, est aussi continu de $C(X)$ dans $L^P(\mu)$. Ceci montre que f_0 n'est pas dans $\Theta(M, I, L^P(\mu))$.

LEMME 1.17. - Si p est pris dans l'intervalle semi-ouvert $[1, \infty[$, alors on a l'égalité

$$\Theta(M, I, L^P) = M_X .$$

Démonstration. - Grâce au lemme précédent, il suffit d'établir l'inclusion $\Theta(M, I, L^P) \supset M_X$. Or une fonction f est dans M_X si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\delta > 0$, il existe un sous-compact K de X tel que $\mu(X \setminus K) < \delta$, et il existe deux suites $(h_i)_{i=1}^n$ et $(h'_j)_{j=1}^p$ dans M vérifiant

(a) $$\bigvee_{j=1}^p h'_j \leq f \leq \bigwedge_{i=1}^n h_i ,$$

(b) $$\left(\bigwedge_{i=1}^n h_i - \bigvee_{j=1}^p h'_j\right)(k) < \varepsilon , \text{ pour tout point } k \text{ dans } K .$$

Or on peut toujours supposer $\|f\| \leq 1$; comme M est cofinal dans $C(X)$, il est uniformément cofinal dans $C(X)$ (proposition 1.7). Si γ est le coefficient d'uniforme cofinalité, on peut supposer que $\|h_i\| \leq \gamma$ et $\|h'_j\| \leq \gamma$. Par conséquent, la norme dans $L^P(\mu)$ de $\bigwedge_{i=1}^n h_i - \bigvee_{j=1}^P h'_j$ est majorée par $\gamma[\delta + \varepsilon\|\mu\|]$. Comme δ et ε sont arbitraires, nous sommes dans les conditions du lemme 1.1, et par suite la fonction f est dans $\Theta(M, I, L^P(\mu))$.

Les lemmes 15-17 montrent bien que $\Theta(M, I, L^P(\mu)) = C(X)$ si, et seulement si, μ est portée par ∂_M (avec $1 \leq p < \infty$). Pour montrer que $\Theta(M) = L^P(\mu)$, un raisonnement élémentaire, utilisant la densité de $C(X)$ dans $L^P(\mu)$, suffit.

DÉFINITION 1.18. - On dira qu'un espace de Banach ordonné et normal V est p-uniformément convexe si, pour tous couples (g_n) et (f_n) de suites dans V^+ telles que $0 \leq g_n \leq f_n$ et $\|f_n\| = 1$, la condition $\lim_{n\to\infty} \|g_n\| = 1$ implique $\|g_n - f_n\| = 0$.

Remarquons que les espaces $L^P(\mu)$, pour p dans $[1, \infty[$, vérifient la condition de la définition 18 ; par contre, les espaces $C_0(\underset{\sim}{N})$ ou $\ell^\infty(\underset{\sim}{N})$ ne vérifient pas cette condition.

DÉFINITION 1.19. - Soient V et W deux espaces de Banach réticulés, et P un opérateur réticulant de V dans W. Un opérateur positif T de V dans W est une P-contraction si, pour tout f dans V^+, on a $\|T(f)\| \leq \|P(f)\|$. On note $\mathfrak{A}(P)$ le convexe des P-contractions.

THÉORÈME 1.20. - Soient V et W deux espaces de Banach réticulés, où W est p-uniformément convexe, et P un opérateur réticulant de V dans W. Alors le sous-espace $\mathrm{Ret}(M)$, réticulé fermé engendré par M, est inclus dans l'ombre $\Theta_{\mathfrak{A}(P)}(M, P, W)$.

La démonstration du théorème repose sur le lemme suivant.

LEMME 1.21. - Soient V et W deux espaces de Banach réticulés, où W est p-uniformément convexe. Soient P un opérateur réticulant de V dans W et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite équicontinue d'opérateurs positifs de V dans W qui sont des P-contractions. Alors le sous-espace $C(T_n , P)$ formé des éléments f de V tels que $\lim T_n(f) = P(f)$ est un sous-espace fermé réticulé de V.

Démonstration. - L'ensemble $C(T_n , P)$ est un sous-espace vectoriel fermé puisque $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite équicontinue d'opérateurs linéaires, et P est linéaire. Soit $f^{\sim}$ un élément non nul de $C(T_n , V)$, et montrons que $f^+ \in C(T_n , P)$. Comme T_n est un opérateur positif, il est clair que l'on a

$$0 \leqslant [T_n(f)]^+ \leqslant T_n(f^+) .$$

D'autre part, on peut vérifier que

$$\|T_n(f)^+ - P(f^+)\| = \|T_n(f)^+ - P(f)^+\| \leqslant \|T_n(f) - P(f)\| ,$$

par conséquent, la suite $T_n(f)^+$ converge vers $P(f^+)$. Considérons les deux suites

$$h_n = \frac{T_n(f^+)}{\|T_n(f^+)\|} \quad \text{et} \quad g_n = \frac{[T_n(f)]^+}{\|T_n(f^+)\|} ;$$

il est clair que $0 \leqslant g_n \leqslant h_n$ et $\|h_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\|g_n\|$ converge vers 1. En effet,

$$\|g_n\| = \frac{\|[T_n(f)]^+\|}{\|T_n(f^+)\|} .$$

Or le numérateur converge vers $\|P(f^+)\|$ d'après ce qui précède, et puisque T_n est une P-contraction et W 1-normal,

$$\|[T_n(f)]^+\| \leqslant \|T_n(f^+)\| \leqslant \|P(f^+)\| .$$

Ceci montre que $\|T_n(f^+)\|$ converge aussi vers $P(f^+)$, ce qui établit que $\|g_n\|$ converge vers 1. Comme W est p-uniformément convexe $h_n - g_n$ tend vers 0, ce qui prouve que $T_n(f^+)$ converge vers $P(f^+)$. Ainsi l'élément f^+ appartient à $C(T_n , P)$.

Pour montrer le théorème 1.20, on utilise simplement le fait que M est inclus dans $C(T_n , P)$ pour toute suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs qui converge vers P sur le sous-espace M. Par conséquent, $\overline{\mathrm{Ret}(M)} \subset C(T_n , P)$ pour toute suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{A}(P)$; comme l'intersection de ces sous-espaces est exactement $\mathcal{O}(M , P , W)$, on a établit que $\overline{\mathrm{Ret}(M)} \subset \mathcal{O}(M , P , W)$.

COROLLAIRE 1.22. - Soit M un sous-espace de $L^p(\mu)$ (où $p \in]1 , \infty[$ et μ est une mesure donnée sur un espace localement compact). Si $\mathfrak{A}$ désigne le convexe des contractions positives de $L^p(\mu)$ dans lui-même, alors $\overline{\mathrm{Ret}(M)} = \mathcal{O}_{\mathfrak{A}}(M)$.

Démonstration. - Soit I l'opérateur identité de $L^p(\mu)$ dans lui-même ; les opérateurs de contraction positifs sont exactement les I-contractions du théorème précédent. Par suite, $\overline{\mathrm{Ret}(M)} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(M)$. Inversement, il est prouvé, dans [4], que tout sous-espace réticulé fermé de $L^p(\mu)$ est l'image de $L^p(\mu)$ par une projection continue positive de norme 1. Par suite, si $f \notin \overline{\mathrm{Ret}(M)}$, il existe un opérateur T de $\mathfrak{a}$ tel que $T(f) \in \overline{\mathrm{Ret}}(M)$, et T coïncide avec l'identité sur M. Par conséquent, $\mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(M) \subset \overline{\mathrm{Ret}}(M)$ ce qui achève la démonstration.

Ce corollaire prouve en particulier que l'ombre $\mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(M)$ du sous-espace M de $L^p([0 , 1])$, engendré par 1 et x, est égale à $L^p([0 , 1])$ tout entier.

COROLLAIRE 1.23. - Soit M un sous-espace de $C(X)$ qui sépare les points et contient les constantes. Si P est un opérateur réticulant de $C(X)$ dans un espace $L^p(\mu)$, alors $\mathcal{O}_{\mathfrak{a}(P)}(M , P , L^p(\mu)) = C(X)$.

Remarque. - Le corollaire 1.22 a été indépendemment obtenu par BERENS et LORENTZ [2], BERNAU [3] ainsi que KITTO et WULBERT [9]. Les méthodes utilisées reposent toutes sur le résultat de BERNAU et LACEY [4] affirmant l'existence d'une projection positive de norme 1 sur tout sous-espace réticulé fermé de $L^p(\mu)$.

2. L'ombre d'une partie dans un espace $A(K)$ relativement à la convergence faible.

Si K est un convexe compact, on note $A(K)$ l'espace vectoriel des fonctions affines continues sur K muni de l'ordre et de la norme habituels.

Si T est un opérateur continu positif de $A(K)$ dans $A(X)$ tel que $T(1) = 1$, on pose T' l'application affine continue de X dans K déduite de T par transposition. On note $\mathfrak{a}$ l'ensemble convexe des opérateurs vérifiant les conditions précédentes. Si Φ est une application affine continue de X dans K, il est trivial de trouver un opérateur T de $\mathfrak{a}$ tel que $T' = \Phi$. Dans cette partie, M désignera toujours un sous-espace de $A(K)$ qui contient les constantes. Si f est une fonction de $A(K)$, on rappelle que $f^\wedge$ et $f^\vee$ désignent les fonctions définies sur K par

$$f^\wedge(k) = \inf\{h(k) ; \ h \in M ; \ h \geq f\} ,$$
$$f^\vee(k) = -(-f)(k) .$$

Bien que l'opérateur T considéré dans le théorème suivant ne soit pas réticulant, la démonstration procède comme dans le lemme 1.1.

THÉORÈME 2.1. - Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs de $\mathfrak{a}$, et T un opérateur de $\mathfrak{a}$.

(a) On suppose que, pour tout h dans M, la suite $T_n(h)$ converge simplement vers $T(h)$. Alors, pour tout x dans X et tout f dans $A(K)$ tels que $f^\wedge[T'(x)] = f^\vee[T'(x)]$, la suite $T_n(f)(x)$ converge vers $T(f)(x)$.

(b) On suppose que, pour tout h dans M, la suite $T_n(h)$ converge uniformément vers $T(h)$. Soient f une fonction de $A(K)$ et Y un compact de l'ensemble

$\{k \in K ; f^{\wedge}(k) = f^{\vee}(k)\}$; alors la suite $T_n(f)$ converge uniformément sur le compact $T^{-1}(Y)$ vers la fonction $T(f)$.

(c) On suppose que, pour tout h dans M , la suite $T_n(h)$ converge simplement vers $T(h)$. Soit f une fonction de $A(K)$ telle que $f^{\wedge}(k) = f^{\vee}(k)$ pour tout point k dans $T'[\mathcal{E}(X)]$; alors la suite $T_n(f)$ converge simplement et faiblement vers la fonction $T(f)$.

Démonstration.

(a) Soient x un point de X , et f une fonction de $A(K)$ vérifiant l'hypothèse. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux suites finies $(h_i)_{i=1}^{n}$ et $(h'_j)_{j=1}^{p}$ de fonctions de M telles que

(α) $\bigvee_{i=1}^{n} h_i \leqslant f \leqslant \bigwedge_{j=1}^{p} h'_j$,

(β) $(\bigwedge_{j=1}^{p} h'_j - \bigvee_{i=1}^{n} h_i)(T'(x)) < \varepsilon$.

Pour tout s dans $\underset{\sim}{N}$, il est clair que l'on a :

$$\bigvee_{i=1}^{n} T_s(h_i)(x) \leqslant T_s(f)(x) \leqslant \bigwedge_{j=1}^{p} T_s(h'_j)(x) ,$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} T(h_i)(x) \leqslant T(f)(x) \leqslant \bigwedge_{j=1}^{p} T(h'_j)(x) ,$$

où les bornes supérieures et inférieures sont considérées dans l'espace $C(X)$.

Par conséquent, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} T_s(f)(x)-T(f)(x) &\leqslant \bigwedge_{j=1}^{p} T_s(h'_j)(x)-\bigvee_{i=1}^{n} T(h_i)(x) \\ &\leqslant \bigwedge_{j=1}^{p} T_s(h'_j)(x)-\bigwedge_{j=1}^{p} T(h'_j)(x)+\bigwedge_{j=1}^{p} T(h'_j)(x)-\bigvee_{i=1}^{n} T(h_i)(x) . \end{aligned}$$

Or on a, grâce à l'hypothèse sur f et x ,

$$\bigwedge_{j=1}^{n} T(h'_j)(x) - \bigvee_{i=1}^{n} T(h_i)(x) = \bigwedge_{j=1}^{n} h'_j(T'(x)) - \bigvee_{i=1}^{n} h_i(T'(x)) < \varepsilon .$$

D'autre part, puisque la suite $T_n(h)$ converge simplement vers $T(h)$,

$$|\bigwedge_{j=1}^{p} T_s(h'_j)(x) - \bigwedge_{j=1}^{p} T(h'_j)(x)|$$

peut être rendu inférieur à ε pour s assez grand. De même, on montrera que $T_s(f)(x) - T(f)(x)$ est minorée par une expression qui, pour s assez grand, peut être rendue inférieure à 2ε , ce qui prouve que la limite de $T_s(f)(x)$ est égale à $T(f)(x)$.

(b) La démonstration suit le même schéma que pour le (a), et utilise en plus un classique argument de compacité.

(c) D'après le point (a), pour tout point x de $\mathcal{E}(X)$, la suite $T_n(f)(x)$ converge simplement vers $T(f)(x)$. Le théorème de représentation intégrale permet de montrer que $T_n(f)$ converge simplement, et même faiblement, vers la fonction $T(f)$ ([10], p. 33).

Soit Y l'ensemble convexe des formes linéaires positives sur M qui vérifient

$\ell(1) = 1$. Si R est l'application de restriction canonique de $[A(K)]'$ sur M' , il est clair que $R(K) = Y$. D'après les résultats de [5], il est aisé de voir que la condition $f^\wedge(k) = f^\vee(k)$ pour tout f dans $A(K)$ équivaut à $R(k) \in \mathcal{E}(Y)$. On notera ∂_M la frontière de Choquet de M relativement à $A(K)$, c'est-à-dire l'ensemble des points de K qui sont dans $R^{-1}[\mathcal{E}(Y)]$. L'ensemble est évidemment non vide ainsi que $\partial_M \cap \mathcal{E}(K)$.

COROLLAIRE 2.2. - Soient K et X deux convexes compacts, et $(\Phi_n)_{n\in N}$ une suite d'applications affines continues de X dans K . Soit Φ une application affine continue de X dans K telle que $\Phi[\mathcal{E}(X)] \subset \partial_M$, où M est un sous-espace de $A(K)$ contenant les constantes. Alors la suite $(\Phi_n)_{n\in N}$ converge simplement vers Φ si, et seulement si, pour tout x dans $\mathcal{E}(X)$ et tout f dans M , la suite $f \circ \Phi_n(x)$ converge vers $f \circ \Phi(x)$.

La démonstration consiste en une interprétation en termes de (Φ_n) et de Φ des résultats du théorème 2.1. Remarquons cependant, que la condition $\Phi[\mathcal{E}(X)] \subset \partial_M$ équivaut à la condition " $R \circ \Phi$ est une application directe" (i. e.

$$R \circ \Phi(\mathcal{E}(X)) \subset \mathcal{E}(Y)).$$

Le corollaire précédent s'applique en particulier pour l'étude des ombres relativement à des applications contractantes quand on considère uniquement les convergences faibles. Si M est un sous-espace de V , on note R la surjection canonique de $B(V')$ sur $B(M')$.

COROLLAIRE 2.3 (WULBERT). - Soient V et W deux espaces de Banach, $(T_n)_{n\in N}$, et T des opérateurs de norme inférieure à 1 de V dans W . Soit M un sous-espace de V tel que $R \circ T[\mathcal{E}(B(W'))] \subset \mathcal{E}[B(M')]$; alors, si $T_n(h)$ converge vers $T(h)$ pour la topologie $\sigma(W , W')$ et pour tout h dans M , la suite $T_n(f)$ converge vers $T(f)$ pour la topologie $\sigma(W , W')$ et pour tout f dans V .

Démonstration. - Les applications transposées $(T'_n)_{n\in N}$ et T' sont des applications affines continues de $B(W')$ dans $B(V')$. Soit M_1 le sous-espace de $A[B(V')]$, engendré par M et par la fonction 1 . L'hypothèse montre que $h(T'_n(x))$ converge vers $h(T(x))$ pour tout h dans M_1 et tout x dans $B(W')$. Comme $R \circ T[\mathcal{E}(B(W'))] \subset \mathcal{E}[B(M')]$, on applique le corollaire 2.2.

Dans le cas des espaces de Banach ordonnés, nous avons un énoncé analogue. Soit V un espace de Banach ordonné 1-normal ; on dira qu'un sous-espace M possède la propriété d'extension uniforme avec le coefficient α , si

$$R[B(V'^+)] \subset B(M'^+) \subset \alpha R[B(V'^+)] .$$

Si $\alpha = 1$, on dira que (M , V) possède la 1-P. E. U. D'après [8] on sait que (M , V) possède la 1-P. E. U. dès que la boule unité ouverte de M est filtrante croissante. De plus, c'est trivialement le cas si V admet une unité d'ordre u qui appartient à M et si la norme de V coïncide avec la norme canonique associée à n.

COROLLAIRE 2.4. - Soient V et W deux espaces de Banach ordonnés et 1-normaux, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et T des opérateurs positifs de norme inférieure à 1 de V dans W. Soit M un sous-espace de V tel que (M, V) possède la 1-P. E. U. (propriété de l'extension uniforme), et tel que $RT'(\mathcal{E}[B(W'^{+})])$ soit inclus dans $\mathcal{E}[B(M'^{+})]$. Si $T_n(h)$ converge faiblement vers $T(h)$ pour tout h dans M, alors $T_n(f)$ converge faiblement vers $T(f)$ pour tout f dans V.

Si V et W sont deux espaces de Banach ordonnés 1-normaux, et T un opérateur positif de norme inférieure à 1, on note $\Theta_\sigma(M, T, W)$ l'ombre de M relativement à la classe des opérateurs positifs contractants, T, W et à la convergence faible $\sigma(W', W)$. C'est-à-dire un élément f de V est dans $\Theta_\sigma(M,T,W)$ si, et seulement si, pour toute suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs positifs contractants telle que $T_n(h)$ converge vers $T(h)$ pour $\sigma(W', W)$, alors $T_n(f)$ converge vers $T(f)$ pour $\sigma(W', W)$.

PROPOSITION 2.5. - Soient K et X deux convexes compacts, où X est métrisable (en fait, tout point de x est un G_δ suffit). Soit T un opérateur positif de $A(K)$ dans $A(X)$ tel que $T(1) = 1$; alors, tout f de $A(K)$, tel que $f^\vee(k) = f^\wedge(k)$ sur $T'[\mathcal{E}(X)]$, est dans $\Theta_\sigma(M,T,A(X))$. Si l'on considère T comme un opérateur de $A(K)$ dans $C(X)$ on a l'égalité :

$$\{f \in A(K)\ ;\ f^\wedge(k) = f^\vee(k)\ ,\ k \in T'[\mathcal{E}(X)]\} = \Theta_\sigma(M, T, C(X)) .$$

Démonstration. - La première partie est conséquence de ce qui précède. Soit f une fonction de $A(K)$ telle que $f^\wedge(k)$ et $f^\vee(k)$ ne coïncident pas pour un point de $T'[\mathcal{E}(X)]$. Il s'agit de construire une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs positifs de $A(K)$ dans $C(X)$ telle que $T_n(1) = 1$ et $T_n(h)$ converge faiblement vers $T(h)$, mais $T_n(f)$ ne converge pas vers $T(f)$. On peut supposer que $f^\wedge(k) > f(k)$. Comme M contient les constantes, il existe une mesure μ, positive et de masse 1 sur K, qui coïncide avec ε_k sur M et vérifie $\mu(f) = f^\wedge(k)$. Soit x un point de $\mathcal{E}(X)$ tel que $T'(x) = k$; si $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système fondamental de voisinages de x_0 dans X, on pose $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C(X)$ qui vérifient $\Phi_n(x) = 1$ et $\Phi_n|_{C\omega_n} = 0$. Pour tout n, on note T_n l'opérateur de $A(K)$ dans $C(X)$ défini par

$$T_n(g)(x) = \mu(g)\ \Phi_n(x) + (1 - \Phi_n)(x)\ T(g)(x) .$$

Il est clair que $T_n(1) = 1$ et que, pour tout h dans M, on a

$$\lim_n T_n(h)(x) = T(h)(x) .$$

D'après le théorème de Lebesgue, la suite $T_n(h)$ converge faiblement vers $T(h)$, mais la suite $T_n(f)$ ne converge pas vers $T(f)$.

Le résultat précédent se généralise sans difficultés réelles à la situation du corollaire 2.4.

COROLLAIRE 2.6. - Soient V et W deux espaces de Banach ordonnés, 1-normaux, l'espace W étant de plus séparable. Soit T un opérateur positif de norme 1 de V dans W. Si M est un sous-espace de V tel que (M , V) possède la 1-P. E. U., on a les relations suivantes :

$$\Theta_\sigma(M,T,W) \supset \{f \in V \; ; \; f^\wedge(k) = f^\vee(k) \text{ pour } k \text{ dans } T'[\mathcal{E}(X)]\} = \Theta_\sigma(M,T,C(X)) ,$$

où X désigne $B(W'^+)$.

La démonstration est une application de la proposition précédente aux convexes $X = B(W'^+)$, $K = B(V'^+)$ et $R(K) = B(M'^+)$. On voit ainsi que l'hypothèse W séparable est en fait trop forte ; la condition "tout point de X est un G_δ" est suffisante.

Le résultat suivant est une généralisation du corollaire 1.12 au cas des convexes compacts généraux.

COROLLAIRE 2.7. - Soient K un convexe compact, et k un point de K. Soient M un sous-espace de $A(K)$ qui contient les constantes, et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans K. Si, pour tout h dans M, la suite $h(k_n)$ converge vers $h(k)$, alors pour tout f de $A(K)$ telle que $f^\wedge(k) = f^\vee(k)$, la suite $f(k_n)$ converge vers $f(k)$. Si le point k est dans ∂_M, alors la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers k pour la topologie de K.

Démonstration. - En effet, k peut être considéré comme un opérateur de $A(K)$ dans $\mathbb{R} = A(\{1\})$, où $\{1\}$ est le convexe compact réduit à un point. L'image de $\{1\}$ par l'application transposée est évidemment le point k lui-même. On applique alors les résultats précédents.

COROLLAIRE 2.8. - Soient V un espace de Banach ordonné, 1-normal, et M un sous-espace de V tel que (M , V) possède la 1-P. E. U. Soit k un point de $B(V'^+)$ et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(V'^+)$. Si $h(k_n)$ converge vers $h(k)$ pour tout h dans M, et si $k \in \partial_M$, alors la suite k_n converge vers k pour la topologie $\sigma(V' , V)$.

Soient K et X deux convexes compacts métrisables, et T un opérateur positif de $A(K)$ dans $A(X)$ défini par :

$$T(f)(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \, f[\Phi_i(x)] ,$$

où $(\lambda_i)_{i=1}^n$ est une suite de nombres positifs de $A(X)$, et $(\Phi_i)_{i=1}^n$ une suite de fonctions affines continues de X dans K telles que $\Phi_i[\mathcal{E}(X)] \subset \mathcal{E}(K)$. Il s'agit de trouver des conditions sur un sous-espace M de $A(K)$ pour que $\Theta[M,T,A(X)]$ coïncide avec $A(K)$ tout entier.

On dira que le sous-espace M de $C(X)$ vérifie la propriété (P) si

(1) M contient les constantes ;

(2) $\partial_M \supset \mathcal{E}(X)$;

(3) Pour tout entier p , $1 \leq p \leq n$, et toute suite $k_1, \dots, k_p$ de $\mathcal{E}(K)$, les restrictions à M des formes linéaires $(k_i)_{i=1}^p$ engendrent une face exposée du cône M'^+ .

Notons tout de suite que, pour un sous-espace M contenant les constantes, la propriété (P) est équivalente à la condition suivante :

Pour tout entier p , $1 \leq p \leq n$, et toute suite $(k_i)_{i=1}^p$ de $\mathcal{E}(K)$, il existe une fonction g de M , positive, qui s'annule sur $\mathcal{E}(K)$ uniquement aux points $(k_i)_{i=1}^p$.

<u>Remarque</u>. - La condition précédente n'implique nullement que K soit un simplexe. En effet, il existe des convexes compacts métrisables de dimension infinie tels que, pour tout compact $Y \subset \mathcal{E}(K)$, l'ensemble $\overline{\mathrm{conv}}(Y)$ soit un simplexe de Bauer et une face de K sans que ce dernier soit un simplexe. Pour construire un tel convexe compact K , on pourra poser λ la mesure de Lebesgue sur $[0 , 1]$ et μ la mesure définie par $\mu = \sum_1^\infty (\varepsilon_{x_n})/2^n$, où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dense dans $[0 , 1]$. Si H désigne le noyau de la mesure $\lambda - \mu$ [i. e.

$$H = \{f \in C([0 , 1]) \ ; \ \lambda(f) = \mu(f)\} \text{),}$$

on posera K l'ensemble des formes linéaires positives ℓ sur H qui vérifie $\ell(1) = 1$.

Même si l'on considère uniquement la dimension finie, il existe dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ un convexe compact K tel que, pour toute famille de p points extrémaux $(x_i)_{i=1}^p$ avec $p \leq n$, l'ensemble $\mathrm{conv}[(x_i)_{i=1}^p]$ soit une face fermée de K . Pour construire un tel K , soit $\mathcal{P}_{2n}$ l'espace des polynômes de degré inférieur à $2n$ muni de l'ordre et la norme induits par $C([0 , 1])$; on pose K l'ensemble des formes linéaires positives de norme 1 sur $\mathcal{P}_{2n}$.

THÉORÈME 2.9. - <u>Soient</u> K <u>et</u> X <u>deux convexes compacts métrisables, et</u> T <u>un opérateur positif de</u> $A(K)$ <u>dans</u> $A(X)$ <u>défini par</u> $T(f)(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \, f[\Phi_i(x)]$. <u>Si</u> M <u>est un sous-espace de</u> $A(K)$ <u>qui possède la propriété</u> (P), <u>alors</u>

$$\Theta(M , T , A(X)) = A(K) .$$

La démonstration repose sur le lemme suivant.

LEMME 2.10. - <u>Soit</u> g_0 <u>une fonction positive de</u> $A(K)$ <u>qui s'annule sur</u> $\mathcal{E}(K)$ <u>en</u> p <u>points</u> $k_1, \dots, k_p$ $(1 \leq p \leq n)$. <u>Si</u> $(k_q)_{q \in \mathbb{N}}$ <u>est une suite de points de</u> $\tilde{K}$, <u>le cône engendré par</u> K , <u>telle que</u> $\lim_q g_0(k_q) = 0$, <u>et, pour tout</u> g <u>dans</u> M , $\lim_{q\to\infty} g(k_q)$ <u>existe. Alors la suite</u> $(k_q)_{q \in \mathbb{N}}$ <u>converge vers un point</u> k <u>de</u> K .

<u>Démonstration</u>. - Comme M contient les constantes, la suite $(k_q)_{q \in \mathbb{N}}$ est équicontinue. Soit k une valeur d'adhérence de la suite $(k_q)_{q \in \mathbb{N}}$, et montrons qu'elle

est unique. Il est clair que $g_0(k) = \lim_q g_0(k_q) = 0$. D'après l'existence d'une mesure portée par $\mathcal{E}(K)$, qui représente le point k , on a $k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i k_i$ (ici on utilise la positivité de la fonction g). Soit g_j une fonction de M nulle aux points k_i $(i \neq j)$ et $g_j(k_j) = 1$, alors $g_j(k) = \lim_q g_j(k_q)$, cette limite existant d'après l'hypothèse. Par conséquent, $\alpha_j = \lim_q g_j(k_q)$ ce qui montre bien l'unicité de la valeur d'adhérence $k = \lim_{q\to\infty} k_q$.

<u>Démonstration du théorème</u> 2.9. - Soit $(T_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite équicontinue d'opérateurs positifs de $A(K)$ dans $A(X)$ telle que, pour tout h dans M , la suite $[T_n(h)]_{n\in\underset{\sim}{N}}$ converge vers $T(h)$. Soit x un point de $\mathcal{E}(X)$; il existe une fonction g_0 de M qui est positive et qui ne s'annule sur $\mathcal{E}(K)$ qu'aux points $k_i = \Phi_i(x)$ $(i = 1 ,\ldots, n)$. Soit $(x_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite de $\mathcal{E}(X)$ qui tend vers x ; on a, grâce à la convergence uniforme de la suite $T_n(h)$ vers $T(h)$ pour tout h dans M ,

$$\lim_{n\to\infty} h[T'_n(x)] = \lim_{n\to\infty} T_n(h)(x_n) = T(h)(x) = h[T'(x)] .$$

En particulier, pour $h = g_0$, la limite est nulle. D'après le lemme 2.10, la suite $T'_n(x)$ converge vers un point k qui ne peut être que $T'(x)$. Cela veut dire que $\lim_{n\to\infty} T_n(f)(x_n) = T(f)(x)$. Ce résultat, vrai pour tout x dans $\mathcal{E}(X)$ et toute suite $(x_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ qui converge vers x , montre que la suite $T_n(f)$ converge uniformément sur $\mathcal{E}(X)$ vers la fonction $T(f)$. D'après le principe du maximum de Bauer, la suite $T_n(f)$ converge vers $T(f)$ dans l'espace $A(X)$. Ce qui veut dire $\mathcal{O}(M , T , A(X)) = A(K)$.

COROLLAIRE 2.11. - <u>Soient</u> $(\mu_p)_{p\in\underset{\sim}{N}}$ <u>une suite de mesures positives sur</u> $[0 , 1]$, <u>et</u> μ_0 <u>la mesure à support fini</u> $\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon x_i$, $x_i \in [0 , 1]$. <u>Si, pour tout polynôme</u> h <u>de degré inférieur à</u> $2n$, <u>la suite</u> $\mu_p(h)$ <u>converge vers</u> $\mu_0(h)$, <u>alors</u> $(\mu_p)_{p\in\underset{\sim}{N}}$ <u>converge vaguement vers la mesure</u> μ_0 .

<u>Démonstration</u>. - Il suffit d'établir que l'espace $\mathcal{P}_{(2n)}$ des polynômes de degré inférieur à $2n$ vérifie la condition (P). Pour tout $1 \leq k \leq n$, il existe un polynôme h_k de degré k , qui s'annule uniquement aux points $x_1 ,\ldots, x_k$. Le polynôme h_k^2 est une fonction positive de l'espace $\mathcal{P}_{(2n)}$, qui s'annule uniquement aux points $x_1 ,\ldots, x_k$.

Il est aisé de vérifier que $\mathcal{P}_{(2n)}$ est le plus petit espace de polynômes sur $[0 , 1]$ dont l'ombre $\mathcal{O}(\mathcal{P}_{(2n)} , \mu_0 , \underset{\sim}{R})$ coïncide avec l'espace $C([0 , 1])$. Inversement, si μ_0 a un support infini (par exemple, μ_0 la mesure de Lebesgue), alors, pour tout n dans $\underset{\sim}{N}$, l'ombre $\mathcal{O}(\mathcal{P}_{(2n)} , \mu_0 , \underset{\sim}{R})$ est strictement incluse dans $C([0 , 1])$. Nous terminons sur les deux problèmes suivants dont on ignore la solution.

1° Soit T un opérateur de $A(K)$ dans $A(X)$, défini par

$$T(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f[\Phi_i(x)] ,$$

où $\Phi_i[\mathcal{E}(X)] \subset \mathcal{E}(K)$; déterminer tous les espaces M de $A(K)$ tels que, si T_0 est un opérateur positif de $A(X)$ dans $A(K)$ qui coïncide avec T sur M, alors $T_0 = T$.

Il est clair que si M possède la propriété (P) citée précédemment, alors M répond à la question, grâce au théorème 2.9 ; mais on ignore si la propriété (P) est nécessaire.

2° Soient K et X deux convexes compacts (métrisables), et Φ une application affine continue de X dans K. Alors, l'hypothèse $\Phi(\mathcal{E}(X)) \subset \mathcal{E}(K)$ implique que Φ est extrémale dans le convexe $A(X, K)$ des fonctions affines continues de X dans K, mais la réciproque est fausse en général. Peut-on, dans les résultats précédents, remplacer la condition " $\Phi[\mathcal{E}(X)] \subset \mathcal{E}(K)$ " par la condition " Φ extrémale" dans $A(X, K)$? En particulier, peut-on affirmer que la condition du théorème 2.9 est vraie dès que T est défini par $T(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f[\Phi_i(x)]$, où Φ_i est extrémale dans $A(X, K)$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (H.). - Theorems of Korovkin type for adapted spaces (preprint).

[2] BERENS (H.) and LORENTZ (G. G.). - Theorems of Korovkin type for positive linear operators in Banach lattices (preprint).

[3] BERNAU (S. J.). - Theorems of Korovkin type in L_p-spaces (preprint).

[4] BERNAU (S. J.) and LACEY (M. E.). - The range of a contractive projection in L_p-spaces (preprint).

[5] CHOQUET (G.) et MEYER (P.-A.). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 139-154.

[6] EFFROS (D. E.). - Structure in simplex, II., J. funct. Anal., t. 1, 1967, p. 379-391.

[7] FAKHOURY (H.). - Extensions uniformes des formes linéaires positives, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 23, 1973, fasc. 1, p. 75-93.

[8] FAKHOURY (H.) et ROGALSKI (M.). - Cours engendrés par un compact étoilé du convexe, Applications à l'analyse, Math. Annalen, t. 207, 1973, p. 47-62.

[9] KITTO (W.) and WULBERT (D. E.). - Korovkin approximation in L_p-spaces (preprint).

[10] PHELPS (R. R.). - Lectures on Choquet's theorem. - Princeton, D. Van Nostrand, 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

(Texte reçu le 15 mars 1974)

Hicham FAKHOURY
Université de Paris VI
Département de Mathématiques
Equipe d'analyse
4 place Jussieu, Tour 46
75230 PARIS CEDEX 05

et

Université Claude Bernard [Lyon-I]
Département de Mathématiques
43 boulevard du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE