Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Elias Saab

Quelques propriétés topologiques des points d'appui d'ensembles convexes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 3, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A1_0>

QUELQUES PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DES POINTS D'APPUI D'ENSEMBLES CONVEXES

par Elias SAAB

[d'après l'article de R. R. PHELPS (*)]

Tous les espaces vectoriels topologiques considérés seront réels. Soient E un espace vectoriel topologique et C un convexe fermé de E ; un point $x \in C$ est dit point d'appui de C s'il existe $f \in E'$, $f \neq 0$, et telle que :

$$f(x) = \sup_{y \in C} f(y) = \sup_C f .$$

Dans ce cas, f s'appelle fonction d'appui de C.

L'ensemble des points d'appui de C sera noté par $\mathrm{App}\, C$, la frontière topologique de C par $\mathrm{Fr}(C)$, l'intérieur de C par $\mathrm{int}(C)$.

On sait que si $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$, alors $\mathrm{App}\, C = \mathrm{Fr}(C)$, mais en général nous avons seulement le théorème suivant :

THÉORÈME 1 (BISHOP-PHELPS). - *Si C est un convexe fermé d'un espace de Banach E, alors $\mathrm{App}\, C$ est dense dans la frontière de C.*

Nous étudirons, dans cet exposé, les propriétés topologiques de $\mathrm{App}\, C$ et des fonctions d'appui de C.

THÉORÈME 2. - *Si C est un convexe fermé d'un espace localement convexe métrisable, alors $\mathrm{App}\, C$ est un F_σ.*

PROPOSITION 3. - *Si C est un convexe fermé d'un espace de Banach, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathrm{App}\, C = \mathrm{Fr}(C)$,

(b) $\mathrm{App}\, C$ *est un* G_δ.

Nous obtenons après des résultats de connexité, à savoir :

THÉORÈME 4. - *Si C est un convexe fermé d'un espace vectoriel topologique qui ne contient aucun hyperplan, alors $\mathrm{Fr}(C)$ est connexe par arc.*

THÉORÈME 5. - *Si C est un convexe fermé d'un espace vectoriel topologique tel que $0 \in \mathrm{int}(C)$ et si, de plus, C ne contient aucun hyperplan, alors l'ensemble*

$$A = \{f \in E' \ ;\ f(x) = 1 = \sup_C f \ \text{pour un certain} \ x \in C\}$$

(*) PHELPS (R. R.). - Some topological properties of support points of convex sets, Israel J. Math., t. 13, 1972, p. 327-336.

des fonctions d'appui normalisées est $\sigma(E', E)$-connexe.

De ce théorème découle le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6. - Si C est un convexe faiblement compact d'un espace vectoriel topologique E, alors App C est faiblement connexe.

Le corollaire précédent peut être déduit du théorème 9 si E est un espace de Banach.

DÉFINITION 7. - La norme dans un espace de Banach est dite localement uniformément convexe si

$$\|x_n\| = \|x\| = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty}\|x_n + x\| = 2 \text{ implique } \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0 .$$

TROJANSKI a démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 8. - Si E est un espace de Banach qui contient un sous-ensemble faiblement compact total K, alors E admet une norme équivalente qui est localement uniformément convexe.

Comme conséquence de ce théorème, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 9. - Soit E un espace de Banach, et soit C un ensemble convexe fermé de E dont l'intersection, avec toute boule de E, est faiblement compacte, et qui ne contient aucun hyperplan. Alors App C est connexe.

De ce théorème on déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 10. - Si E est un espace de Banach réfléxif, si C est un convexe fermé de E qui ne contient aucun hyperplan, alors App C est connexe par arc.

Il faut noter que le problème de la connexité (même pour la topologie faible) de App C, sans des hypothèses supplémentaires de compacité, reste ouvert.

Nous savons quand même démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 11. - Si E est un espace de Banach, et si C est un convexe fermé qui ne contient aucun hyperplan, alors pour toute application linéaire continue T de E dans un espace de dimension finie F, on a T(App C) = T(Fr(C)), donc T(App C) est connexe.

DÉFINITION 12. - Soient E un espace normé, et $x \in E$; $\|x\| = 1$, considérons

$$J(x) = \{f \in E' ; \|f\| = 1 = f(x)\} .$$

Si M est un sous-espace vectoriel de E, et si T est une application linéaire de M dans E, l'ensemble

$$V(T) = \{f(T(x)) ; x \in M , \|x\| = 1 \text{ et } f \in J(x)\}$$

s'appelle l'<u>image numérique</u> de T . D'où le théorème suivant concernant ces notions.

THÉORÈME 13. - <u>Soient</u> E <u>un espace normé</u>, M <u>un sous-espace vectoriel dense de</u> E , <u>et</u> $T : M \longmapsto E$ <u>une application linéaire</u> (<u>non nécessairement continue</u>). <u>Alors</u> $V(T)$ <u>est connexe</u>.

(Texte reçu le 13 novembre 1973)

Elias SAAB
Foyer Franco-libanais
15 rue d'Ulm
75005 PARIS