Gustave Choquet

Sur la séparation des cônes faiblement complets

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° C3, p. C1-C5
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A18_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, Communication n° 3, 5 p.

SUR LA SÉPARATION DES CÔNES FAIBLEMENT COMPLETS

par Gustave CHOQUET

Le seul théorème général et non trivial de séparation de cônes convexes fermés que l'on connaisse, concerne un couple de cônes dont l'un au moins doit être localement compact. On pourrait espérer qu'à condition de se restreindre à une classe de cônes très réguliers, par exemple faiblement complets et métrisables, on pourrait obtenir de nouveaux théorèmes de séparation.

L'exemple qui suit, construit pour répondre à une question de H. FAKHOURY, laisse peu d'espoir concernant l'existence de tels théorèmes.

Notre procédé de construction, qui utilise des cônes de fonctions continues non bornées, semble susceptible d'autres applications. Nous l'utiliserons, par exemple, aussi pour une construction commode de cônes faiblement complets métrisables qui sont rencontrés par chacun de leurs hyperplans d'appui suivant un cône de dimension finie.

Nous poserons également quelques problèmes. Enfin, nous terminerons par un énoncé indépendant de ce qui précède : Tout espace polonais est homéomorphe à l'ensemble des points extrémaux d'un convexe faiblement complet polonais X . On sait que l'on peut même imposer à X d'être compact ; mais débarrassée cette restriction, la démonstration devient extrêmement simple.

THÉORÈME 1. - *Il existe deux sous-cônes convexes fermés* A , B *de* $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *tels que* :

1° $A \cap B = \{0\}$;

2° *Il n'existe aucune forme linéaire, continue sur* $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, *qui sépare* A , B *au sens large* ;

3° *Le cône* $A + B$ *(qui est fermé) est réticulé pour son ordre propre, et a une base linéairement compacte* ;

4° A *et* B *sont des faces fermées complémentaires de* $A + B$.

Preuve. - Désignons par α , β , I les ouverts de $[0, 1]$ ainsi définis :

$$\alpha = \bigcup_1^\infty \left]\,(2n+1)^{-1} , (2n)^{-1}\,\right[\ ; \quad \beta = \bigcup_1^\infty \left]\,(2n)^{-1} , (2n-1)^{-1}\,\right[\ ; \quad I = \alpha \cup \beta \ .$$

Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}(I , \mathbb{R})$ constitué par les fonctions :

$$1 \ , \ x^p \ , \ \log^q(x^{-1}) \ , \ \log^r((x - s^{-1})^{-1}) \ , \text{ où } p , q , r , s \in \mathbb{N}^* \ .$$

Soient X et V respectivement, le cône convexe et le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I , \mathbb{R})$, engendrés par $\mathcal{Q}$; l'ensemble $\mathcal{Q}$ est une base algébrique de V ; posons enfin :

$$Y = \{f \in V \; ; \; f(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in I\} .$$

On a évidemment $X \subset Y$.

On peut identifier X à la somme directe $\underset{\sim}{R}_{+}^{(N)}$, V à $\underset{\sim}{R}^{(N)}$, et le dual algébrique V^* de V à $\underset{\sim}{R}^N$. Pour la dualité canonique entre V et V^*, les polaires X^0, Y^0 de X, Y s'identifient alors respectivement à $\underset{\sim}{R}_{+}^{N}$ et à un sous-cône fermé de $\underset{\sim}{R}_{+}^{N}$.

L'espace V, ordonné par Y, est un espace adapté (voir CHOQUET [1]) de fonctions continues sur I, donc tout élément de Y^0 est identifiable à une mesure de Radon positive sur I, bornée, et unique parce que $(Y - Y)$ contient tous les polynômes sur $[0 , 1]$. Posons alors :

$$A = \{\mu \in Y^0 \; ; \; \mu \text{ est portée par } \alpha\} ;$$

$$B = \{\mu \in Y^0 \; ; \; \mu \text{ est portée par } \beta\} .$$

Ces deux cônes sont fermés dans Y^0 et sont deux faces complémentaires de ce cône ; de plus, Y^0 est réticulé pour son ordre propre puisqu'il est héréditaire dans $\mathfrak{M}^+([0 , 1])$.

Enfin, $Y^0 = A + B$ a pour base $Y^0 \cap \{\mu(1) = 1\}$; cette base est visiblement bornée sur toute droite affine, donc linéairement compacte.

Il nous reste à montrer le point crucial 2°. Notons d'abord que $\underset{\sim}{R}_{+}^{N}$ a la propriété intéressante que les formes linéaires sur $\underset{\sim}{R}^N$, dont la restriction à $\underset{\sim}{R}_{+}^{N}$ est continue, sont aussi continues sur $\underset{\sim}{R}^N$; donc ces formes ne sont autres que les éléments de V. Or si f est un tel élément, dire que la forme linéaire sur $\underset{\sim}{R}^N$, associée à f, est positive sur A, négative sur B, équivaut à dire que la fonction f est positive sur α, négative sur β ; ceci entraîne que la combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{D}$ qui définit f, ne comporte aucun terme en $\log^q(x^{-1})$ ou en $\log^r(x - s^{-1})^{-1}$; c'est donc un polynôme prenant les deux signes dans tout voisinage de 0 ; donc $f \equiv 0$. D'où l'énoncé 2°.

COROLLAIRE 2. - <u>Dans tout espace vectoriel de dimension infinie dénombrable</u> F, <u>muni de la topologie</u> $\sigma(F , F^*)$, <u>il existe deux cônes convexes fermés</u> $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ <u>dont la somme</u> $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ <u>est saillante et partout dense, et dont l'intersection engendre l'espace.</u>

<u>Preuve</u>. - Comme tous les espaces F sont isomorphes, on peut prendre pour F l'espace V utilisé dans la démonstration précédente. Il suffit alors de prendre pour $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ les polaires respectifs de A, B dans V.

(a) La propriété 1° du théorème 1 se traduit par le fait qu'il n'existe sur V aucune forme linéaire $T \neq 0$ qui soit positive sur $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, donc sur $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, autrement dit que $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ est partout dense dans V.

(b) D'autre part, A est total dans V^*, car pour toute $f \in V$, dire que la forme linéaire sur V^* associée à f est nulle sur A équivaut à dire que $f = 0$

sur α , d'où $f = 0$ partout à cause du caractère analytique de f (ceci entraîne le fait, à première vue paradoxal, que toute $\mu \in B$ est limite dans V^* , d'éléments de $(A - A)$).

Cette propriété de A se traduit par le fait que $\mathfrak{A}$ est saillant ; il en est évidemment de même pour $\mathfrak{B}$.

(c) La propriété 2° peut s'écrire $\mathfrak{A} \cap (- \mathfrak{B}) = \{0\}$, ce qui équivaut à dire, puisque $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont saillants, que $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ est saillant.

(d) $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ est le polaire de $(A + B)$, donc est identique à Y , qui engendre V .

Nous avons donné ce corollaire, bien qu'il soit une conséquence facile du théorème 1, parce qu'il semble qu'une construction directe, dans un espace F , de deux cônes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ayant les propriétés énoncées, ne soit pas commode.

Exemple (intéressant) de cône faiblement complet, 3. - Il n'est pas commode (bien que possible), de construire un cône fermé $X \subset \underset{\sim}{R}_+^N$ dont tout hyperplan fermé d'appui rencontre X seulement en 0 ; il serait agréable de l'obtenir, comme dans la démonstration du théorème 1, comme polaire d'un cône de fonctions ; à défaut d'un tel exemple, notons que chacun des cônes, A , B , $A + B$, du théorème 1, a la propriété, voisine de celle cherchée, que tout hyperplan d'appui de ce cône le rencontre suivant un sous-cône de dimension finie. En effet, si une forme continue $(\neq 0)$ sur $V^* = \underset{\sim}{R}^N$ est positive sur A , par exemple, la fonction f correspondante est positive sur α ; donc elle ne peut s'annuler que sur un sous-ensemble fini de points de α .

Notons que si l'on quitte la classe des cônes métrisables, on peut trouver un exemple tout à fait satisfaisant : Notons V l'espace des combinaisons linéaires de tous les monômes x^p et des fonctions $\log^q(|x - a|^{-1})$, où p , $q \in \underset{\sim}{N}$ et $a \in [0 , 1]$; et notons V_+ l'ensemble des f de V partout positives sur $[0,1]$. Le polaire V_+^* de V_+ dans V^* est un cône faiblement complet sans génératrices extrémales, et tel que tous les hyperplans d'appui le rencontrent en 0 seulement.

Nous allons maintenant poser quelques problèmes qui gravitent autour du théorème 1.

Problème 4. - Le cône fermé $\underset{\sim}{R}_+^N$ de $\underset{\sim}{R}^N$ a la propriété que toute forme linéaire sur $\underset{\sim}{R}^N$ qui est continue sur $\underset{\sim}{R}_+^N$ est aussi continue sur $\underset{\sim}{R}^N$, que l'espace de ces formes est de dimension dénombrable, et que toute forme positive sur $\underset{\sim}{R}_+^N$ est continue (voir CHOQUET [2]).

Soit alors, de façon générale, un cône convexe faiblement complet X d'un espace faible séparé E , où $E = (X - X)$. Désignons par X' l'ensemble des formes linéaires sur E dont la restriction à X est continue. Evidemment, les topologies $\sigma(E , E')$ et $\sigma(E , X')$ ont mêmes traces sur X (c'est faux pour les structures uniformes sauf si $X' = E'$) ; il en résulte que X est encore complet pour

$\sigma(E , X')$.

Le problème consiste à caractériser les X tels que X' soit de dimension dénombrable, et d'étudier si ceci entraîne que toute forme positive sur X appartient à X' . Inversement, si E' est de dimension dénombrable, et si toute forme positive sur X est dans X' , est-ce que X' est de dimension dénombrable ? Ceci est-il lié au fait que E est complet pour $\sigma(E , E')$ ou pour $\sigma(E , X')$?

Problème 5. - Soit C un cône convexe saillant d'un espace vectoriel V ; et soit C_+^* le polaire de C dans C^* .

Comment reconnaître sur C lui-même si C est l'ensemble des formes positives sur C_+^* (resp. positives et continues) ?

Problème 6. - Dans l'exemple du théorème 1, A et B peuvent être séparés par une forme linéaire continue sur $A + B$; la vérification en est facile.

Peut-on améliorer cet exemple en construisant, dans $\underset{\sim}{R}_+^N$, un cône fermé C réticulé, somme directe de deux faces fermées A , B de C , qui ne puissent être séparées au sens large par aucune forme linéaire continue sur C ?

Problème 7. - Soit V un espace vectoriel, muni de la topologie $\sigma(V , V^*)$; et soit A un sous-cône convexe fermé de V .

A quelle condition toute $f \in V^*$ est-elle différence de deux formes positives sur A ?

C'est vrai si A est contenu dans une pyramide simpliciale (i. e. un cône engendré par une base algébrique de V) ; et aussi si A est complet pour $\sigma(V , V^*)$ (noter que le premier cas n'est pas un cas particulier du second lorsque la base algébrique de V a un cardinal non modéré (Cf. CHOQUET [3])).

La réciproque est-elle vraie ?

Eléments extrémaux d'un convexe faiblement complet, 8. - Soit X un convexe faiblement complet d'un e. l. c. faible séparé. Rappelons que lorsque la topologie de X est métrisable, X est un espace polonais, et que l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des points extrémaux de X est un G_δ de X , donc est aussi polonais.

En utilisant une technique analogue à celle utilisée pour le théorème 1, on va montrer la réciproque.

THÉORÈME 9. - Pour tout espace polonais P , il existe un sous-convexe fermé X de $\underset{\sim}{R}_+^N$, qui est linéairement compact et est un simplexe géométrique, et tel que $\mathcal{E}(X)$ soit homéomorphe à P , et fermé dans X .

Preuve. - Soit K un compactifié métrisable de P , tel que $\overline{P} = K$; alors P est un G_δ de K , donc $K \setminus P = \bigcup_n K_n$, où les K_n sont des fermés non denses de K .

Pour tout n , il existe une application continue $f_n > 0$ de K dans $[0 , \infty]$, qui est infinie sur K_n et finie hors de K_n ; d'autre part, il existe une famille (g_n) d'éléments de $\mathcal{C}(K, \underset{\sim}{R})$ contenant 1, qui sépare les points de K.

Soit V l'algèbre engendrée par les traces sur P des f_n et des g_n ; et ordonnons V par le cône V^+ des fonctions positives de V.

L'espace V est adapté par rapport aux constantes ; il en résulte (voir CHOQUET [3]) que toute forme positive sur V est une mesure de Radon positive sur P, unique parce que V contient l'algèbre engendrée par les g_n.

Le cône faiblement complet V_+^* (pour $\sigma(V^*, V)$, est polonais puisque V^* l'est, et il est réticulé puisque c'est un sous-cône héréditaire de $\mathfrak{M}^+(K)$. Sa base

$$\{\mu \in V_+^* \ ; \ \mu(1) = 1\}$$

est le simplexe géométrique cherché. Ses éléments extrémaux sont les mesures de Dirac δ_x où $x \in P$.

L'application bijective $x \longrightarrow \delta_x$ de P sur $\mathcal{E}(X)$ est continue parce que les f appartenant à V sont continues sur P ; et elle est bicontinue parce que $V \cap \mathcal{C}(K, R)$ est partout dense dans $\mathcal{C}(K, \underset{\sim}{R})$. Autrement dit, P et $\mathcal{E}(X)$ sont homéomorphes.

Notons pour terminer que, contrairement à ce qui se passerait si X était compact, $\mathcal{E}(X)$ est fermé dans X ; en effet, toute μ qui est limite de mesures δ_x est évidemment de la même forme (donc est extrémale) puisque, pour tout $a \notin P$, l'un des $f_n(a)$ vaut $+\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). - Le problème des moments, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 1re année, 1961/62, n° 4, 10 p.

[2] CHOQUET (G.). - Cardinaux 2-mesurables et cônes faiblement complets, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 17, 1967, p. 383-393.

[3] CHOQUET (G.). - De ermination and study of positive forms on spaces of functions, J. of approximation theory, t. 10, 1974, p. 358-378.

(Texte reçu le 29 novembre 1974)

Gustave CHOQUET
16 avenue d'Alembert
92160 ANTONY