Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean Saint-Raymond

Séparation des mesures de Radon sur un convexe par les fonctions convexes continues bornées

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. nº C1, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A16_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, Communication n° 1, 2 p.

Novembre 1973

SÉPARATION DES MESURES DE RADON SUR UN CONVEXE PAR LES FONCTIONS CONVEXES CONTINUES BORNÉES

par Jean SAINT-RAYMOND

Soient E un e. l. c. s., et C un convexe de E. Soit $\mathbb{S}$ le cône des fonctions convexes continues et bornées de C dans $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 1. - S'il existe une droite contenue dans $\overline{C}$ qui coupe C suivant un intervalle non réduit à un point, il existe deux probabilités de Radon μ et ν sur C telles que $(\mu - \nu)$ soit orthogonal à $\mathbb{S}$, et non nulle.

Preuve. - Soit $f \in \mathbb{S}$. Définissons g sur $\overline{C}$ par

$$g(x) = \liminf_{y\to x, y\in C} f(y) .$$

g est bornée sur $\overline{C}$, et possède pour surgraphe l'adhérence de celui de f, qui est convexe. Donc g est convexe s. c. i., et prolonge f. Si a et b sont deux points de C tels que la droite passant par a et b est contenue dans $\overline{C}$, la restriction de g à cette droite est convexe et bornée, donc constante. Donc

$$f(a) = g(a) = g(b) = f(b) .$$

Il suffit de prendre $\mu = \varepsilon_a$, $\nu = \varepsilon_b$.

Voici maintenant une réciproque du théorème 1.

THÉORÈME 2. - Si aucune droite contenue dans $\overline{C}$ ne coupe C en deux points distincts, et si μ et ν sont deux probabilités de Radon distinctes sur C, il existe une fonction f dans $\mathbb{S}$ telle que

$$\mu(f) \neq \nu(f) .$$

On peut supposer que $0 \in C$.

Preuve. - Supposons que $\forall f \in \mathbb{S}$, $\mu(f) = \nu(f)$. Posons

$$V = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{1}{n} \overline{C} .$$

V est le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans $\overline{C}$, et V est fermé. Soit π la projection de E sur E/V. Posons $C_1 = \pi(\overline{C})$. Puisque $\overline{C} = \overline{C} + V$, C_1 est fermé dans E/V ; de plus, C_1 ne contient aucune droite.

Soit $P = \{x' \in E' , \sup_{x\in\overline{C}} \langle x' , x\rangle < \infty\}$. On a $P \subset V^0$. De plus, P sépare E/V. Soit $y \in E/V$, $y \neq 0$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny \notin C_1$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $x' \in (E/V)' = V^0$ tel que

$$\langle x' , y\rangle > 1 \geq \sup_{z\in C_1} \langle x' , z\rangle = \sup_{x\in\overline{C}} \langle x' , x\rangle .$$

Donc $x' \in P$ et $\langle x', y\rangle \neq 0$. Si $x' \in P$, la fonction $f_{x'} : C_1 \longrightarrow \underset{\sim}{R}_+$, définie par

$$f_{x'}(x) = e^{\langle x',x\rangle}$$

est convexe, continue et bornée sur C_1 . Donc $f_{x'} \circ \pi \in \mathcal{S}$.

Définissons $j : C_1 \longrightarrow \underset{\sim}{R}_+^P$ par

$$j(x) = (f_{x'}(x))_{x' \in P'}$$

et posons $X = \overline{j(C_1)}$. X est compact. De plus, puisque $f_{x'+y'} = f_{x'} . f_{y'}$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X)$, engendré par les fonctions coordonnées, est une sous-algèbre séparant les points et contenant les constantes, donc est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Soient $\tilde{\mu} = j \circ \pi(\mu)$ et $\tilde{\nu} = j \circ \pi(\nu)$. Puisque $\forall\, x' \in P$, $f_{x'} \circ \pi \in \mathcal{S}$, on a

$$(\tilde{\mu} - \tilde{\nu})(h) = 0$$

pour tout h dans une sous-algèbre dense de $\mathcal{C}(X)$. Donc $\tilde{\mu} = \tilde{\nu}$.

Soient $f \in \mathcal{C}_b(C)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un compact $T \subset C$ tel que

$$\mu(C - T) + \nu(C - T) \leqslant \varepsilon/2\|f\| \, .$$

Puisque P sépare E/V , l'application j est injective. En vertu de l'hypothèse, $\pi_{|T}$ est injective. Donc $\varphi = j \circ \pi_{|T}$ est un homéomorphisme de T sur $T_1 = j \circ \pi(T)$. Donc $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}(T_1)$. Il existe une fonction $g \in \mathcal{C}(X)$ telle que

$$\|g\| = \|f \circ \varphi^{-1}\| \leqslant \|f\|$$

et

$$g_{|T_1} = f \circ \varphi^{-1}$$

Soit $f_1 = g \circ j \circ \pi \in \mathcal{C}_b(C)$. On a

$$\mu(f_1) - \nu(f_1) = \tilde{\mu}(g) - \tilde{\nu}(g) = 0$$

$$|\mu(f - f_1)| \leqslant 2\|f\| . \mu(C - T)$$

$$|\nu(f - f_1)| \leqslant 2\|f\| . \nu(C - T)$$

puisque $\|f - f_1\| \leqslant \|f\| + \|f_1\| \leqslant 2\|f\|$ et que $f - f_1 = 0$ sur T . Donc

$$|\mu(f) - \nu(f)| \leqslant 2\|f\|(\mu(C - T) + \nu(C - T))$$

$$\leqslant \varepsilon \, .$$

Donc $\forall\, f \in \mathcal{C}_b(C)$,

$$\mu(f) = \nu(f) \, .$$

Donc $\mu = \nu$, contrairement à l'hypothèse que μ et ν sont distinctes.

(Texte reçu le 26 janvier 1974)

Jean SAINT-RAYMOND
26 rue de Solférino
92100 BOULOGNE BILLANCOURT