DAVID A. EDWARDS

Suites décroissantes de simplexes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 16, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A12_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 16, 3 p.

14 mars 1974

SUITES DÉCROISSANTES DE SIMPLEXES

par David A. EDWARDS

On ne donne ici qu'un résumé de résultats. Un exposé complet, avec des démonstrations, sera publié ailleurs.

1. Un ensemble convexe compact sera toujours un tel ensemble dans un espace vectoriel topologique réel localement convexe séparé. Un simplexe sera toujours un simplexe de Choquet.

Soit X un ensemble convexe compact quelconque. Nous notons $\mathcal{Z}(X)$ l'ensemble de toutes les mesures de probabilité sur X qui sont maximales dans $\mathcal{M}_1^+(X)$ pour l'ordre $\prec$ de balayage [2]. Pour chaque $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$, nous écrivons

$$\mathcal{Z}_\mu(X) = \{\nu \in \mathcal{Z}(X) \;:\; \nu \succ \mu\} .$$

Nous notons $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble de tous les points extrémaux de X , et par $\mathcal{A}(X)$ l'espace de toutes les fonctions réelles continues affines sur X . La topologie de $\mathcal{M}(X)$ sera la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}(X) , \mathcal{C}(X))$. Nous nous servons de la théorie des limites projectives pour les ensembles convexes compacts [3].

THÉORÈME 1. - Soit $(X_i)_{i\in I}$ un système projectif de convexes compacts, soit X sa limite, et soient Φ_{ij} , Φ_i les applications affines continues associées (on ne suppose pas $\Phi_{ij}(X_i) = X_j$). Alors, pour tout $\mu \in \mathcal{Z}(X)$, tout $i \in I$, et tout voisinage U dans $\mathcal{M}_1^+(X_i)$ de la mesure $\Phi_i(\mu)$, il existe un $n_0 \in I$, avec $n_0 \geq i$, tel que

$$\Phi_{ni}(\mathcal{Z}_{\Phi_n(\mu)}(X_n)) \subseteq U \quad \text{pour tout} \quad n \geq n_0 .$$

COROLLAIRE 2 (CHOQUET [2]). - On prend les mêmes hypothèses, et soient x un point de $\mathcal{E}(X)$, V un voisinage dans X_i de $\Phi_i(x)$. Alors il existe un $n_0 \in I$, avec $n_0 \geq i$, tel que

$$\Phi_{ni}(\mathcal{E}(X_n)) \cap V \neq \emptyset \quad \text{pour tout} \quad n \geq n_0 .$$

COROLLAIRE 3 (DAVIES et VINCENT-SMITH [4]). - Si, dans le théorème 1, tous les X_i sont des simplexes, alors leur limite X est également un simplexe.

Rappelons-nous qu'une dépendance affine extrémale [1], sur un compact convexe X , est une mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$ telle que

(i) $\mu(f) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{A}(X)$,

(ii) les deux parties de la décomposition de Jordan de μ sont des mesures maximales sur X .

Rappelons-nous en outre que X est un simplexe si, et seulement si, il n'y a pas de telles dépendances non-zéros sur X. Nous voyons donc que si dans le théorème 1 la limite X n'est pas simplexe, alors, selon le corollaire 3, il faut qu'il y ait des dépendances affines extrémales non-zéros sur des X_i. Nous laissons au lecteur le soin de préciser cette remarque en utilisant le théorème 1.

2. Les résultats de CHOQUET et de DAVIES et VINCENT-SMITH que nous venons d'énoncer ont des conséquences intéressantes pour les polyèdres convexes dans un espace euclidien $\mathbb{R}^d$ de dimension finie d.

Un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^d$ s'appelle un polyèdre convexe quand il est un convexe compact tel que l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ est fini. Dans ce cas, nous notons $\nu(X)$ le nombre de points dans $\mathcal{E}(X)$.

PROPOSITION 4. - *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille filtrante décroissante de polyèdres convexes dans $\mathbb{R}^d$, telle que $\nu(X_i) \leq p < \infty$ pour tout $i \in I$, où p est un entier positif. Alors $X \equiv \bigcap_{i\in I} X_i$ est un polyèdre convexe tel que $\nu(X) \leq p$. Si de fait $\nu(X) = p$, alors il existe $n_0 \in I$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\nu(X_n) = p$; et, de plus, on peut ainsi appliquer des étiquettes*

$$\mathcal{E}(X_n) = \{x^{n1} , x^{n2} , \ldots , x^{np}\} \qquad (n \geq n_0)$$
$$\mathcal{E}(X) = \{x^1 , x^2 , \ldots , x^p\}$$

de telle façon que $x^{nr} \to x^r$ *quand* $n \to \infty$, *pour chaque* $r = 1 , 2 , \ldots , p$.

COROLLAIRE 5. - *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille filtrante décroissante de simplexes dans $\mathbb{R}^d$ telle que l'intérieur de $X \equiv \bigcap_{i\in I} X_i$ ne soit pas vide. Alors X, et tous les X_i, sont des simplexes de dimension d, et on peut ainsi appliquer des étiquettes*

$$\mathcal{E}(X_i) = \{x^{i0} , x^{i2} , \ldots , x^{id}\}$$
$$\mathcal{E}(X) = \{x^0 , x^1 , \ldots , x^d\}$$

de telle façon que $x^{ir} \to x^r$ *quand* $i \to \infty$, *pour chaque* $r = 0 , 1 , 2 , \ldots , d$.

Si, dans le corollaire 5, nous omettions la condition que l'intérieur de X ne soit pas vide, alors le résultat ne resterait pas vrai. On le voit en prenant comme X_n l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$:

$$X_n = \mathrm{conv}\{(1 , 0) , (-1 , 0) , (0 , \tfrac{1}{n})\} .$$

3. Nous considérons maintenant les suites décroissantes de simplexes (qui peuvent être de dimension infinie). Nous nous rappelons qu'un simplexe X s'appelle un simplexe de Bauer si l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ est fermé dans X.

PROPOSITION 6. - *Soit X un simplexe métrisable quelconque. Alors il existe une suite décroissante (X_n) de simplexes de Bauer métrisables telle que $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$.*

Ce théorème découle du théorème 5.2 de [5], avec l'aide de quelques constructions. On donnera les détails ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFSEN (E. M.). - Compact convex sets and boundary integrals. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Ergebnisse der Mathematik, 57).

[2] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis. Vol. 1-3. - New York, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

[3] CHOQUET (G.). - Mesures coniques, affines et cylindriques, Symposia Mathematica, Vol. 2, p. 145-182. - London, Academic Press, 1969 (Istitute nazionale di Alta Matematica).

[4] DAVIES (E. B.) and VINCENT-SMITH (G.). - Tensor products, infinite products, and projective limits of Choquet simplexes, Math. Scand., t. 22, 1968, p. 145-164.

[5] LAZAR (A. J.) and LIDENSTRAUSS (J.). - Banach spaces whose duals are L_1 spaces and their representing matrices, Acta Math., Uppsala, t. 126, 1971, p. 165-193.

(Texte reçu le 7 mai 1974)

David A. EDWARDS
Mathematical Institute
24-29 St Giles
OXFORD (Grande-Bretagne)