PHILIPPE TURPIN

Espaces vectoriels topologiques non localement convexes, espaces d'Orlicz

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. n° 2, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
11e-12e années, 1971-1973, n° 2, 12 p.
25 mai 1972

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES NON LOCALEMENT CONVEXES, ESPACES D'ORLICZ

par Philippe TURPIN

Sommaire. - 1° Conditions pour qu'il existe une application linéaire continue non nulle d'un espace d'Orlicz $L^\varphi(0\ ,\ 1)$ dans un autre $L^\varphi(0\ ,\ 1)$, φ concave, un opérateur linéaire compact non nul $L^\varphi \to L^\varphi$. 2° Conditions pour qu'une application linéaire continue $f : F \to E$, E et F espaces vectoriels topologiques complets (non localement convexes), envoie une suite de F sommable (x_h) (telle que $\sum s_h x_h$ converge quand $s_h = 0$ ou 1) sur une suite $f(x_h)$ " ℓ^∞-sommable" (telle que $\sum s_h x_h$ converge quand $\sup_h |s_h| < \infty$). Le seul lien entre les deux problèmes est l'outil utilisé : A chaque application linéaire (continue)

$$f : F \to E ,$$

on associe un espace vectoriel de suites scalaires, son "galbe" (c'est en gros l'ensemble des suites λ_n telles que $\sum \lambda_n f(x_n)$ soit petit quand les x_n sont (uniformément) petits). Le premier problème est traité de manière plus complète dans [14] mais l'utilisation des galbes clarifie ici l'exposé.

1. Introduction.

On considère dans cet exposé des espaces vectoriels topologiques (ou e. v. t.) réels (on pourrait aussi bien les prendre complexes), non supposés localement convexes. Rappelons qu'un filtre ω d'un espace vectoriel E est le filtre des voisinages de 0 pour une topologie vectorielle sur E (c'est-à-dire compatible avec la structure d'espace vectoriel de E) si, et seulement si,

(a) ω admet une base constituée d'ensembles équilibrés et absorbants,

(b) pour tout $U \in \omega$, on peut trouver $V \in \omega$ tel que $V + V \subset U$.

2. Espaces d'Orlicz ([4], [5], [6], [7], [9], [11]).

2.1 : Soit T un espace mesuré, ensemble T muni d'une tribu $\mathcal{H}$ de parties de T et d'une mesure positive non nulle dt définie sur $\mathcal{H}$. Par exemple, l'intervalle $(0\ ,\ 1)$ et $\underset{\sim}{N}$ seront toujours considérés comme des espaces mesurés, avec, respectivement, la mesure de Lebesgue et la mesure cardinale. M_T désigne alors l'espace vectoriel topologique des dt-classes de fonctions numériques mesurables sur T , la topologie étant celle de la convergence en mesure sur tout ensemble mesurable de mesure finie. On note $|H|$ la mesure d'un ensemble $H \in \mathcal{H}$. M_T admet comme système fondamental de voisinages de 0 l'ensemble des

$$U(a\ ,\ \varepsilon\ ,\ H) = \{x \in M_T\ ;\ \ |\{t \in H\ ;\ \ |x(t)| > a\}| \leq \varepsilon\}\ ,$$

$a > 0$, $\varepsilon > 0$, $H \in \mathcal{H}$, $|H| < \infty$. Si T est σ-fini, M_T est métrisable et complet. M_T n'est pas localement convexe si T n'a pas d'atomes.

2.2. Fonctions d'Orlicz : On appelle ainsi toute fonction $\varphi : \underset{\sim}{R}_+ \to \underset{\sim}{R}_+$ croissante, nulle en 0 , et seulement en 0 , continue en 0 .

φ et ψ étant des fonctions d'Orlicz,

$$\varphi < \psi \quad (\text{resp. } \varphi <_0 \psi \ , \ \varphi \overset{\infty}{<} \psi)$$

signifie qu'il existe des constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles qu'on ait, pour tout u (resp. au voisinage de 0 , de ∞)

$$a\varphi(bu) \leqslant \psi(u) \ .$$

On dit que φ et ψ sont équivalentes (resp. équivalentes au voisinage de 0 , de ∞) quand on a $\varphi < \psi$ et $\psi < \varphi$ (resp. $\varphi <_0 \psi$ et $\psi <_0 \varphi$, $\varphi \overset{\infty}{<} \psi$ et $\psi \overset{\infty}{<} \varphi$).

On considèrera le plus souvent des fonctions d'Orlicz vérifiant la condition

$$(\Delta_2) \qquad \sup_{u>0} \frac{\varphi(2u)}{\varphi(u)} < \infty \ .$$

Il est clair que si φ ou ψ vérifie la condition (Δ_2) $\varphi <_0 \psi$ (resp. $\varphi \overset{\infty}{<} \psi$) si et seulement si $\varphi(u) = O(\psi(u))$ au voisinage de 0 (resp. de ∞).

Une fonction d'Orlicz $\varphi(u)$ vérifie la condition (Δ_2) si, et seulement si elle équivaut à une fonction de la forme $\gamma(u^p)$ où $0 < p < \infty$ et où γ est une fonction d'Orlicz concave [6] : si φ vérifie (Δ_2)

$$\rho(x) = \sup_{u>0} \varphi(xu)/\varphi(u)$$

est fini pour tout x et vérifie $\rho(xy) \leqslant \rho(x)\ \rho(y)$. Par conséquent,

$$\overline{\rho}(\xi) = \log \rho(e^{\xi})$$

est sous-additive en ξ , $(\overline{\rho}(\xi + \xi') \leqslant \overline{\rho}(\xi) + \overline{\rho}(\xi'))$, donc il existe $p > 0$ et q tels que, pour $\xi \geqslant 0$, $\overline{\rho}(\xi) \leqslant p\xi + q$, d'où $\rho(x) \leqslant e^q\, x^p$ pour $x \geqslant 1$. Donc $\varphi(u)$ équivaut à

$$\widetilde{\varphi}(u) = \sup_{x \geqslant 1} \varphi(xu)/x^p \ .$$

Or, sur $\underset{\sim}{R}_+$, $\widetilde{\varphi}(u)/u^p$ décroît, donc $\widetilde{\varphi}(u)$ équivaut à une fonction de la forme $\gamma(u^p)$, γ concave. En effet ([1], [13], [14]), une fonction d'Orlicz φ équivaut à une fonction concave si et seulement si, il existe une constante $M < \infty$ telle que $\varphi(v)/v \leqslant M\varphi(u)/u$ quand $u \leqslant v$. Ajoutons (mêmes références) que φ est sous-additive si elle est concave, qu'elle équivaut à une fonction concave si elle est sous-additive.

2.3. Espaces d'Orlicz : Si φ est une fonction d'Orlicz, T un espace mesuré, on pose

$$L_T^{\varphi} = \{x \in M_T \ ; \ \int_T \varphi(|x(t)|)\, dt < \infty \ .$$

L_T^{φ} est un convexe équilibré de M_T (un espace vectoriel quand φ vérifie (Δ_2)),

$$L_T^{*\varphi} = \{x \in M_T \ ; \ \exists\ \varepsilon > 0 \ , \ \varepsilon x \in L_T^\varphi\}$$

est l'espace vectoriel engendré par L_T^φ . Si, pour $\varepsilon > 0$,

$$B_T^\varphi(\varepsilon) = \{x \in M_T \ ; \ \int_T \varphi(|x(t)|)\ dt \leq \varepsilon\} \ ,$$

on munit $L_T^{*\varphi}$ de la topologie vectorielle admettant pour système fondamental de voisinages de 0 l'ensemble des $\varepsilon B_T^\varphi(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Cette base de filtre définit bien une topologie vectorielle. Par exemple, on a

$$\varepsilon B_T^\varphi(\varepsilon) + \eta B_T^\varphi(\eta) \subset (\varepsilon + \eta)\ B_T^\varphi(\varepsilon + \eta)$$

puisque si $x \in B_T^\varphi(\varepsilon)$ et $y \in B_T^\varphi(\eta)$,

$$\int \varphi \circ \frac{|\varepsilon x + \eta y|}{\varepsilon + \eta} \leq \int \varphi \circ \sup\{|x| \ , \ |y|\} \leq \int \varphi \circ |x| + \int \varphi \circ |y| \leq \varepsilon + \eta \ .$$

$L_T^{*\psi} \subset L_T^{*\varphi}$ avec injection canonique continue si $\varphi \prec \psi$, donc $L_T^{*\varphi}$ et sa topologie ne dépendent que de la classe d'équivalence de φ . Si T est l'espace mesuré $\underset{\sim}{N}$ (resp. $(0 , 1)$), $L_T^{*\psi} \subset L_T^{*\varphi}$ si et seulement si $\varphi \prec_0 \psi$ (resp. $\varphi \prec^\infty \psi$), et l'injection canonique est alors continue. $L_T^{*\varphi} = M_T$, avec même topologie, quand φ est bornée et $|T| < \infty$. $L_T^{*\varphi}$ est un e. v. t. métrisable et complet (complet parce que, par exemple, l'injection canonique de $L_T^{*\varphi}$ dans M_T est continue et que les $\varepsilon B_T^\varphi(\varepsilon)$ sont complets dans M_T si φ est continue (toute fonction d'Orlicz équivaut à une fonction d'Orlicz continue). Si φ vérifie la condition (Δ_2), $L_T^{*\varphi} = L_T^\varphi$ admet l'ensemble des $B_T^\varphi(\varepsilon)$,, $\varepsilon > 0$, comme système fondamental de voisinages de 0 , l'ensemble des fonctions simples (combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables de mesures finies) est dense dans $L_T^{*\varphi}$. Si $T = \underset{\sim}{N}$ (resp. si $T = (0 , 1)$) les réciproques sont essentiellement vraies : on trouve que φ équivaut au voisinage de 0 (resp. de ∞) à une fonction vérifiant la condition (Δ_2) ([4], [5], [9]). Quand φ vérifie (Δ_2), on écrit L_T^φ plutôt que $L_T^{*\varphi}$. On écrit $\ell^{*\varphi}$, ℓ^φ , plutôt que $L_{\underset{\sim}{N}}^{*\varphi}$, $L_{\underset{\sim}{N}}^\varphi$. Quand $\varphi(u) = u^p$, $0 < p < \infty$, on a les espaces classiques L^p , ℓ^p . $L_{(0,1)}^{*\varphi}$ (resp. $\ell^{*\varphi}$) est localement convexe si et seulement si φ équivaut au voisinage de ∞ (resp. de 0) à une fonction convexe ([7], [9], [15]), c'est-à-dire si, et seulement si, il existe une constante $M < \infty$ telle qu'on ait au voisinage de ∞ (resp. de 0)

$$\varphi(u)/u \leq M\varphi(v)/v \quad \text{quand} \quad u \leq v \ .$$

Par exemple ℓ^p , L^p ne sont pas localement convexes si $0 < p < 1$.

3. Galbe d'une application linéaire.

3.1. DÉFINITION : Soient E et F des espaces vectoriels topologiques, et $f : F \to E$ une application linéaire. Le galbe de f est alors l'ensemble $G(f)$ des suites scalaires $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 0}$ telles que, pour tout voisinage U de 0 dans E , il existe un voisinage V de 0 dans F tel que

$$\bigcup_{N \geq 0} \sum_{n=0}^N \lambda_n\ f(V) \subset U \ , \tag{3,1}$$

où

$$\sum_{n=0}^N \lambda_n\ f(V) = \{\sum_0^N \lambda_n\ f(x_n) \ ; \ x_n \in V \ , \ 0 \leq n \leq N\} \ .$$

Il est clair que $G(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\underset{\sim}{R}^N$, que

$$\underset{\sim}{R}^{(N)} \subset G(f) \subset \ell^1$$

si f est continue et si $f(F)$ n'est pas adhérent à 0 dans E. Par exemple, $\ell^1 \subset G(f)$ si E ou F est localement convexe et si f est continue.

Bien que la définition ci-dessus suffise pour cet exposé, mentionnons qu'il est souvent utile de munir $G(f)$, $f : F \to E$, d'une structure d'espace vectoriel à convergence [2] : on dit qu'un filtre σ de $G(f)$ invariant par homothétie non nulle tend vers 0 quand, pour tout voisinage U de 0 dans E, il existe $S \in \sigma$ et un voisinage V de 0 dans F tels que (3,1) soit vérifié pour tout $\lambda \in S$. Si σ est un filtre quelconque de $G(f)$, on dit qu'il tend vers 0 quand il est plus fin qu'un filtre invariant par homothétie non nulle et tendant vers 0. Alors $G(f) \subset \ell^1$ continûment, en ce sens que tout filtre tendant vers 0 dans $G(f)$ est une base d'un filtre tendant vers 0 dans ℓ^1, si $f(F)$ n'est pas adhérent à 0 dans E. Et $\ell^1 \subset G(f)$ continûment si et seulement si $f : F \to E$ est continue quand on munit F de la topologie localement convexe la plus fine qui soit moins fine que la topologie donnée sur F. Par exemple, E est localement convexe et de topologie non grossière si, et seulement si, i_E désignant l'application identique de E, $G(i_E) = \ell^1$, un filtre tendant vers 0 dans $G(i_E)$ exactement quand il tend vers 0 dans ℓ^1. Pour $G(i_E)$, qui donne une classification des e. v. t., voir [17], [15].

3.2: Soient E, F, G des espaces vectoriels topologiques, $f : F \to E$, $g : G \to F$ des applications linéaires continues. Alors (immédiat), on a

$$G(f) \cup G(g) \subset G(f \circ g) . \tag{3,2}$$

Un galbe d'application linéaire est invariant par multiplication point par point par une suite scalaire bornée, par permutation des indices. On en verra plus loin (5.6, lemme) une autre propriété de stabilité.

3.3: Par exemple ([14], théorème 4), si φ et ψ sont des fonctions d'Orlicz concaves telles que $\varphi <_0 \psi$ (resp. $\varphi \overset{\infty}{<} \psi$) on a

$$G(\ell^\psi \subset \ell^\varphi) = \ell^{\varphi|_0\psi} \quad [\text{resp. } G(L^\psi_{(0,1)} \subset L^\varphi_{(0,1)}) = \ell^{\varphi|^\infty\psi}] \tag{3,3}$$

où $\varphi\,|_0\,\psi(u) = \sup_{0<x\leq 1} \varphi(ux)/\psi(x)$, $\varphi\,|^\infty\,\psi(u) = \sup_{x\geq 1} \varphi(x)/\psi(x/u)$, $\varphi\,|^\infty\,\psi(0)=0$, et où le premier membre de (3,3) désigne le galbe de l'injection canonique

$$\ell^\psi \to \ell^\varphi \quad (\text{resp. } L^\psi \to L^\varphi) ,$$

et où $\ell^{\varphi|\psi} = \underset{\sim}{R}^{(N)}$ quand $\varphi|\psi(0+) > 0$.

4. Opérateurs linéaires entre espaces d'Orlicz.

4.1. PROPOSITION : Soit φ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition (Δ_2), soit E un espace vectoriel topologique séparé, et soit $f : L^\varphi_{(0,1)} \to E$ une application linéaire continue non nulle. Alors,

$$G(f) \subset \ell^{\varphi(-1)} ,$$

<u>où</u> $\varphi_{(-1)}(u) = 1/\varphi(1/u)$ <u>pour</u> $u \neq 0$, $\varphi(0) = 0$.

Quand φ n'est pas bornée, $\varphi_{(-1)}$ est une fonction d'Orlicz vérifiant (Δ_2). Si φ est bornée, $\varphi_{(-1)}(0+) > 0$ et $\ell^{\varphi(-1)} = \underset{\sim}{R}^{(N)}$. Comme l'ensemble des fonctions simples est dense dans $L^{\varphi}_{(0,1)}$, il existe $H \subset (0, 1)$, mesurable, de fonction caractéristique I_H , tel que $f(I_H) \neq 0$, et il existe un voisinage U de 0 dans E tel que

$$(4,1) \qquad f(I_H) \notin U .$$

Soit $\lambda \in G(f)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout N ,

$$(4,2) \qquad f(\textstyle\sum_0^N \lambda_n B^{\varphi}_{(0,1)}(\varepsilon)) \subset U ,$$

donc tel que

$$(4,3) \qquad \textstyle\sum_0^{\infty} \varphi_{(-1)}(\lambda_n) \leqslant \dfrac{|H|}{\varepsilon} .$$

En effet, si (4,3) était faux, il existerait une partition $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ de H , H_n mesurable, et $|H_n| \leqslant \varepsilon\, \varphi_{(-1)}(\lambda_n)$, d'où

$$\frac{1}{\lambda_n} I_{H_n} \in B^{\varphi}_{(0,1)}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad I_H = \textstyle\sum_0^N I_{H_n} \in \sum_0^N \lambda_n B^{\varphi}_{(0,1)}(\varepsilon) ,$$

ce qui contredirait (4,1). La proposition est démontrée.

4.2. COROLLAIRE [11] : <u>Si</u> φ <u>est une fonction d'Orlicz vérifiant la condition</u> (Δ_2), $L^{\varphi}_{(0,1)}$ <u>admet une forme linéaire continue non nulle si, et seulement si,</u> $u = \mathcal{O}(\varphi(u))$ <u>quand</u> $u \to \infty$, <u>c'est-à-dire si, et seulement si,</u> $L^{\varphi}_{(0,1)} \subset L^1_{(0,1)}$.

En effet, $\ell^1 \subset G(f)$ si f est une forme linéaire continue sur $L^{\varphi}_{(0,1)}$ (car $\underset{\sim}{R}$ est localement convexe), et donc $\ell^1 \subset \ell^{\varphi(-1)}$ si $f \neq 0$, d'où $\varphi_{(-1)}(u) = \mathcal{O}(u)$ au voisinage de 0 , et donc $u = \mathcal{O}(\varphi(u))$ au voisinage de ∞ . La réciproque est immédiate : l'inclusion $L^{\varphi} \subset L^1$ est continue.

4.3. PROPOSITION : <u>Si</u> φ <u>est une fonction d'Orlicz concave, on a</u>

$$(4,4) \qquad G(L^{\varphi}_{(0,1)} \subset M_{(0,1)}) = \ell^{\varphi(-1)} ,$$

<u>où le premier membre de</u> (4,4) <u>désigne le galbe</u> $G(i)$ <u>de l'injection canonique</u> i <u>de</u> $L^{\varphi}_{(0,1)}$ <u>dans</u> $M_{(0,1)}$.

C'est en fait un cas particulier de (3,3). Si $\theta(u) = \inf\{u , 1\}$, θ est une fonction d'Orlicz concave, donc sous-additive, $M_{(0,1)} = L^{\theta}_{(0,1)}$ (avec même topologie) et, φ étant concave, on voit que, pour tous x et u ,

$$\theta(ux) \leqslant \varphi_{(-1)}(u)\, \varphi(x) .$$

Soit alors $\lambda \in \ell^{\varphi(-1)}$. Si $x_n \in B^{\varphi}_{(0,1)}(\eta)$,

$$\int_0^1 \theta(|\textstyle\sum_0^N \lambda_n x_n(t)|)\, dt \leqslant \sum_0^N \int_0^1 \theta(|\lambda_n x_n(t)|)\, dt \leqslant \eta \sum_0^{\infty} \varphi_{(-1)}(|\lambda_n|) .$$

Donc $\lambda \in G(L^{\varphi}_{(0,1)} \subset M_{(0,1)})$, ce qui compte tenu de 4.1, prouve la proposition.

4.4. THÉORÈME : Soient φ et ψ des fonctions d'Orlicz, φ concave, ψ vérifiant (Δ_2). Il n'existe alors une application linéaire continue non nulle de $L^{\psi}_{(0,1)}$ dans $L^{\varphi}_{(0,1)}$ que si $L^{\psi}_{(0,1)} \subset L^{\varphi}_{(0,1)}$.

Démonstration. - Soit f une application linéaire continue non nulle de L^{ψ} dans L^{φ} . D'après 4.3, 3.2 et 4.1, on a, si i est l'injection canonique $L^{\varphi} \to M_{(0,1)}$,

$$\ell^{\varphi(-1)} = G(i) \subset G(i \circ f) \subset \ell^{\psi(-1)} ,$$

d'où $\psi_{(-1)}(u) = O(\varphi_{(-1)}(u))$ au voisinage de 0 , et donc $\varphi(u) = O(\psi(u))$ au voisinage de ∞ , ce qui implique $L^{\psi}_{(0,1)} \subset L^{\varphi}_{(0,1)}$. La réciproque vient de ce que cette inclusion est continue quand elle a lieu.

4.5: Un opérateur linéaire est dit compact quand il envoie quelque voisinage de 0 dans un ensemble compact.

THÉORÈME : Si φ est une fonction d'Orlicz concave, il n'existe un opérateur linéaire compact non nul de $L^{\psi}_{(0,1)}$ dans $L^{\varphi}_{(0,1)}$ que si $L^{\varphi}_{(0,1)} = L^{1}_{(0,1)}$.

Démonstration. - Si $L^{\varphi} \neq L^{1}$, on a $\varphi(u) = o(u)$ quand $u \to \infty$, donc tout compact de $L^{\varphi}_{(0,1)}$ est contenu et borné (c'est-à-dire absorbé par tout voisinage de l'origine) dans quelque espace $L^{\psi}_{(0,1)} \subsetneqq L^{\varphi}_{(0,1)}$ avec ψ concave ([14], proposition 3). Par conséquent, tout opérateur compact $f : L^{\varphi} \to L^{\psi}$ se factorise par une application linéaire continue $g : L^{\varphi} \to L^{\psi} \subsetneqq L^{\varphi}$; $g = 0$, donc $f = 0$.

Remarque 1. - On a vu également dans [14] que s'il existe une application linéaire non nulle $L^{\psi}_{(0,1)} \to L^{\varphi}_{(0,1)}$ envoyant quelque voisinage de 0 de L^{ψ} sur un ensemble borné de L^{φ} , et si ψ vérifie (Δ_2) et φ est concave, alors L^{ψ} possède un voisinage de 0 borné dans L^{φ} . La démonstration est voisine de celle de 4.4 ; elle peut s'exprimer en termes de galbes à condition de définir le galbe d'applications linéaires entre espaces à convergence.

Remarque 2. - Le théorème 4.5 est obtenu par une autre méthode dans [10] (théorème 3.3). Observons cependant que la méthode ci-dessus donne un résultat plus fort ([14], théorème 3).

PROBLÈME 1 : Si φ vérifie (Δ_2) et si $\varphi(u)$ et $u/\varphi(u)$ tendent vers ∞ avec u , je ne sais pas s'il existe un e. v. t. E et une application linéaire compacte non nulle $f : L^{\varphi}_{(0,1)} \to E$.

PROBLÈME 2 [10] : L'existence d'un opérateur linéaire compact non nul $f : E \to E$, E e. v. t., entraîne-t-elle l'existence d'une forme linéaire continue non nulle $E \to \mathbb{R}$? C'est vrai si f possède un vecteur propre non nul [19].

5. Convergence de séries.

5.1 : On dit qu'une suite x_h , $h \geqslant 0$, d'un espace vectoriel topologique E est sommable quand il existe $x \in E$ (noté $\sum_0^\infty x_h$) tel que, pour tout voisinage U de 0 dans E, on puisse trouver un entier N tel que, pour tout ensemble fini d'entiers $H \supset \{0, \ldots, N\}$, $x - \sum_{h\in H} x_h \in U$. Si E est complet, $(x_h) \subset E$ est sommable si, et seulement si, toute série $\sum_{h=0}^\infty s_h x_h$, $s_h = 0$ ou 1, est convergente.

DÉFINITION : Disons qu'une suite $(x_h)_{h\geq 0}$ d'un espace vectoriel topologique E est ℓ^∞-sommable quand toute série $\sum_0^\infty s_h x_h$, $(s_h) \in \ell^\infty$, est convergente.

Toute suite ℓ^∞-sommable est sommable. S. ROLEWICZ et C. RYLL-NARDZEWSKI montrent, dans [12], que la réciproque est généralement fausse, et posent le problème de préciser les espaces pour lesquels elle est vraie. On sait que la réciproque est vraie pour les espaces localement convexes. On verra mieux plus loin. On trouvera une situation voisine dans [3], p. 18.

5.2 : Cela est un problème d'intégration par rapport à une mesure vectorielle. En effet, la formule $\mu(H) = \sum_{h\in\mu} x_h$ identifie l'ensemble des suites sommables (x_h) d'un espace vectoriel topologique complet E à l'ensemble des mesures vectorielles μ définies sur la tribu des parties de $\underset{\sim}{N}$ et à valeurs dans E. Il s'agit de savoir, pour quels espaces E, une telle mesure peut intégrer toute suite scalaire bornée. Une telle mesure peut être "linéarisée". Soit en effet $\mathbb{S}$ l'espace vectoriel des suites scalaires prenant un nombre fini de valeurs, muni de la topologie vectorielle la plus fine induisant sur

$$K = \{uI_H \ ; \ H \subset \underset{\sim}{N} \ , \ |u| \leq 1 \ , \ u \text{ scalaire}\} \tag{5,1}$$

(I_H est la fonction caractéristique de H) la topologie (compacte) de la convergence simple. Une suite (x_h) d'un e. v. t. complet E est sommable si, et seulement si, il existe une application linéaire continue $\mu : \mathbb{S} \to E$ telle que

$$\mu(e_h) = x_h \text{ pour tout } h \in \underset{\sim}{N} \text{ si } e_h = I_{\{h\}} .$$

Observons que (e_h) est évidemment sommable dans $\mathbb{S}$ et n'est pas ℓ^∞-sommable : en effet, $\mathbb{S}$ s'injecte continûment dans $\underset{\sim}{R}^{\underset{\sim}{N}}$, donc $\sum s_h e_h$ ne converge que si $(s_h) \in \mathbb{S}$. Or $\mathbb{S}$ est complet ([16] ; on déduit déjà de [18], p. 49 que $\mathbb{S}$ est séquentiellement complet, ce qui suffirait ici). Cela redonne donc le résultat, déjà cité de [12] (on peut remplacer $\mathbb{S}$ par un espace métrisable et complet puisque $\mathbb{S}$ est une limite projective de tels espaces).

5.3. THÉORÈME : Soient E et F des espaces vectoriels topologiques, E complet, et $f : F \to E$ une application linéaire telle que $(2^{-n})_{n\geq 0} \in G(f)$. Alors, pour toute suite sommable $(x_h)_{h\geq 0}$ de F, la suite $(f(x_h))_{h\geq 0}$ est ℓ^∞-sommable dans E.

Démonstration. - Soit (x_h) sommable dans F, soit $(s_h) \in \ell^\infty$, montrons que la série $\sum s_h f(x_h)$ vérifie le critère de Cauchy. On peut supposer que $0 \leq s_h \leq 1$.

Alors

$$s_h = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\, r_{h,n} , \qquad r_{h,n} = 0 \text{ ou } 1 .$$

Soit U un voisinage fermé de 0 dans E , soit V un voisinage de 0 dans F tel que $\sum_0^N 2^{-n}\, V \subset U$ pour tout N .

$$(5,2) \qquad \sum_{h_1}^{h_2} s_h\, f(x_h) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\, f\Big(\sum_{h_1}^{h_2} r_{h,n}\, x_h\Big) \subset U$$

quand h_1 est assez grand pour que $\sum_{h\in H} x_h \in V$ dès que H est une partie finie de $[h_1 , \infty[$.

5.4. COROLLAIRE (S. ROLEWICZ et C. RYLL-NARDZEWSKI) : <u>Soit</u> E <u>un espace vectoriel topologique complet tel que</u> $(2^{-n})_{n\geq 0} \in G(i_E)$, i_E <u>désignant l'application identique de</u> E . <u>Alors une suite de</u> E <u>est sommable si et seulement si elle est</u> ℓ^∞-<u>sommable</u>.

Par exemple, si $\varphi(u)$ est une fonction d'Orlicz telle que

$$\lim_{x\to 0}\ \limsup_{u\to\infty} \frac{\varphi(xu)}{\varphi(u)} = 0$$

c'est-à-dire équivalente au voisinage de ∞ à une fonction de la forme $\gamma(u^p)$, $p > 0$, γ fonction d'Orlicz convexe ([6]), alors une suite de $L^\varphi_{(0,1)}$ est sommable si et seulement si elle est ℓ^∞-sommable. Ce sera par exemple le cas pour L^p $p > 0$.

En effet, on voit facilement que $\ell^p \subset G(L^\varphi_{(0,1)})$ si $\varphi(u) = \gamma(u^p)$, γ convexe ([7], [11], [15]).

<u>On ne sait pas si dans un espace d'Orlicz quelconque</u>, <u>par exemple dans</u> $L^{\log(1+u)}_{(0,1)}$ <u>ou dans l'espace</u> $M_{(0,1)}$ <u>des fonctions mesurables sur</u> $(0 , 1)$ <u>muni de la topologie de la convergence en mesure</u>, <u>toute suite sommable est</u> ℓ^∞-<u>sommable</u>. <u>Dans</u> $M_{(0,1)}$ <u>toute suite sommable</u> (x_h) <u>est</u> ℓ^2-<u>sommable</u>, <u>en ce sens que</u> $\sum s_h\, x_h$ <u>converge si</u> $\sum |s_h|^2 < \infty$ [8].

5.5. COROLLAIRE : <u>Si</u> φ <u>et</u> ψ <u>sont des fonctions d'Orlicz concaves telles que</u> $\sum_0^\infty \sup_{u\geq 1} \varphi(u)/\psi(2^n u) < \infty$ (<u>ce qui implique</u> $L^\psi_{(0,1)} \subset L^\varphi_{(0,1)}$), <u>alors toute suite sommable dans</u> $L^\psi_{(0,1)}$ <u>est</u> ℓ^∞-<u>sommable dans</u> $L^\varphi_{(0,1)}$. <u>En particulier</u> (cf. proposition 4.3), <u>si</u> $\sum_0^\infty 1/\psi(2^n) < \infty$, <u>toute suite sommable dans</u> $L^\psi_{(0,1)}$ <u>est</u> ℓ^∞-<u>sommable pour la topologie de la convergence en mesure</u>.

Il suffit en effet d'appliquer 3.3.

Par exemple, si $0 < r < r' - 1$, toute suite sommable dans $L^{\log^{r'}(1+u)}_{(0,1)}$ est ℓ^∞-sommable dans $L^{\log^{r}(1+u)}_{(0,1)}$ (et donc en mesure). En effet, un calcul simple montre que le galbe de l'inclusion de $L^{\log^{r'}(1+u)}_{(0,1)}$ dans $L^{\log^{r}(1+u)}$ est $\ell^{\varphi(r'-r)}$, où $\varphi_s(u) = \inf\{u , |\log u|^{-s}\}$. On en déduit que dans $E = \bigcap_{r<\infty} L^{\log^{r}(1+u)}_{(0,1)}$, muni de la topologie borne supérieure des topologies induites par les $L^{\log^{r}(1+u)}_{(0,1)}$, une suite est sommable si et seulement si elle est ℓ^∞-sommable. Cela relève aussi du corollaire 5.4 car le galbe de l'application identique de E , égal à $\bigcup_{s<\infty} \ell^{\varphi_s}$

[15], contient (2^{-n}) : cet espace E montre que l'hypothèse de "pseudo-convexité" que prennent dans [12] S. ROLEWICZ et C. RYLL-NARDZEWSKI est strictement améliorée dans le corollaire 5.4 (E n'est pas "localement pseudo-convexe"). Et on va montrer que l'hypothèse sur le galbe prise ci-dessus ne peut guère être améliorée.

5.6. THÉORÈME : Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$, avec $\lambda_{1+n} \leq \lambda_n$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tous espaces vectoriels topologiques E et F , E complet, et pour toute application linéaire $f : F \to E$ telle que $\lambda \in G(f)$, la suite de E $f(x_h)$, $h \geq 0$, est ℓ^∞-sommable dans E pour toute suite x_h , $h \geq 0$, sommable dans F .

(ii) Il existe $a > 0$ tel que $a^N = \mathcal{O}(\sum_N^\infty \lambda_n)$ quand $N \to \infty$.

Démonstration. - L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte du théorème 5.3 et du lemme suivant puisque $\sum_{kN}^\infty 2^{-n} = \mathcal{O}(a^N)$ pour $k \geq |\log_2 a|$.

LEMME : Soit une application linéaire $f : F \to E$, E et F espaces vectoriels topologiques, et soient λ , μ des suites scalaires décroissantes telles qu'on ait, pour un entier $k \geq 1$ convenable,

(5,3) $$\sum_{kN}^\infty \mu_n = \mathcal{O}(\sum_N^\infty \lambda_n) , \quad N \to \infty .$$

Alors $\mu \in G(f)$ si $\lambda \in G(f)$.

On voit facilement que $(\lambda_{[n/k]})_{n\geq 0} \in G(f)$ si $\lambda \in G(f)$ et que (5,3) entraîne $\sum_N^\infty \mu_n = \mathcal{O}(\sum_N^\infty \lambda_{[n/k]})$. On peut donc supposer que

$$\sum_N^\infty \mu_n \leq \sum_N^\infty \lambda_n .$$

Soit P l'ensemble des entiers n tels que $\mu_n > 2\lambda_n$ arrangé en une suite strictement croissante p_i , $0 \leq i < \mathrm{Card}\,(P)$. Construisons une suite d'entiers n_i , $0 \leq i < 2\,\mathrm{Card}\,(P)$, strictement croissante et vérifiant

(5,4) $$n_{2i} \geq p_i$$

(5,5) $$\frac{1}{2}\mu_{p_i} \leq \sum_{n_{2i}}^{n_{2i+1}} \lambda_n < \mu_{p_i}$$

(5,6) $$\sum_{p_i}^\infty \mu_n \leq \sum_{n_{2i}}^\infty \lambda_n .$$

Prenons, si $P \neq \emptyset$, $n_0 = p_0$, et supposons les n_j construits pour $j \leq 2i$. n_{2i+1} sera le plus petit entier à vérifier

$$\frac{1}{2}\mu_{p_i} \leq \sum_{n_{2i}}^{n_{2i+1}} \lambda_n .$$

n_{2i+1} existe d'après (5,6), $n_{2i+1} > n_{2i}$ puisque $\lambda_{n_{2i}} \leq \lambda_{p_i} < \frac{1}{2}\mu_{p_i}$. Alors

$$\sum_{n_{2i}}^{n_{2i+1}} \lambda_n < \frac{1}{2}\mu_{p_i} + \lambda_{n_{2i+1}} \leq \frac{1}{2}\mu_{p_i} + \lambda_{p_i} < \mu_{p_i}$$

et (5,5) est vérifié. Prenons, si $i+1 < \mathrm{Card}\,(P)$, $n_{2i+1} = \max\{p_{i+1}, 1+n_{2i+1}\}$. n_{2i+2} vérifie (5,6), en vertu de (5,4) si $n_{2i+2} = p_{i+1}$, et, si $n_{2i+2} = 1+n_{2i+1}$, parce que

$$\sum_{p_{i+1}}^{\infty} \mu_n \leq \sum_{p_i}^{\infty} \mu_n - \mu_{p_i} \leq \sum_{n_{2i}}^{\infty} \lambda_n - \sum_{n_{2i}}^{n_{2i+1}} \lambda_n = \sum_{n_{2i+2}} \lambda_n .$$

Si alors $\lambda \in G(f)$, soit U un voisinage de 0 dans E, et soit V un voisinage de 0 équilibré de F tel que, pour tout N, $(\sum_0^N \lambda_n f(V) + \sum_0^N \lambda_n f(V)) \subset \frac{1}{2} U$.

$$\sum_0^N \mu_n f(V) = \sum_{n\leq N, n\notin P} \mu_n f(V) + \sum_{p_i \leq N} \mu_{p_i} f(V)$$
$$\subset 2 \sum_0^N \lambda_n f(V) + 2 \sum_{p_i\leq N} \sum_{n_{2i}}^{n_{2i+1}} \lambda_n f(V) \subset U .$$

Pour démontrer que non-(ii) implique non-(i), on prendra pour F l'espace universel $\mathcal{S}$ introduit en 5.2 et pour f l'injection canonique de $\mathcal{S}$ dans l'espace $\mathcal{S}_\lambda$ défini ci-dessous. Munissons l'ensemble K (formule (5,1)) et $\underset{\sim}{R}^N$ de la topologie de la convergence simple. $\sum_0^\infty \lambda_n x_n$ converge dans $\underset{\sim}{R}^N$ si $x_n \in K$ pour tout n, et l'application $(x_n) \to \sum \lambda_n x_n$ de $\underset{\sim}{K}^N$ dans $\underset{\sim}{R}^N$ est continue. K est compact, donc

$$\sum_0^\infty \lambda_n K = \{\sum_0^\infty \lambda_n x_n ;\ \forall n,\ x_n \in K\}$$

est un compact de $\underset{\sim}{R}^N$. Soit $\mathcal{S}_\lambda$ l'espace vectoriel engendré par $\sum_0^\infty \lambda_n K$, muni de la topologie vectorielle la plus fine induisant sur $\sum_0^\infty \lambda_n K$ la topologie de la convergence simple. $\mathcal{S}_\lambda$ est complet ([16] ; même remarque qu'en 5.2 au sujet de [18]). Observons que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\lambda \subset \ell^\infty$ si $\lambda \neq 0$, que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\lambda$ si $0 \neq \lambda \in \underset{\sim}{R}^{(N)}$.

On voit facilement que la topologie de $\mathcal{S}$ (resp. de $\mathcal{S}_\lambda$) est la topologie vectorielle la plus fine pour laquelle tend vers 0 la trace sur $K+K$ (resp. $\sum_0^\infty \lambda_n(K+K)$) du filtre des voisinages de 0 de $\underset{\sim}{R}^N$. Par conséquent [18], elle admet pour système fondamental de voisinages de 0 l'ensemble des

$$V[(U_m)] = \bigcup_{M<\infty} \sum_0^M U_m \cap (K+K) \quad [\text{resp. } U[(U_m)] = \bigcup_{M<\infty} \sum_0^M U_m \cap (\sum_0^\infty \lambda_n(K+K)] ,$$

où (U_m) parcourt l'ensemble des suites de voisinages de 0 convexes de $\underset{\sim}{R}^N$. Or, en supposant $\sum_0^\infty \lambda_n \leq 1$, on a

$$\sum_0^N \lambda_n [U_m \cap (K+K)] \subset U_m \cap \sum_0^\infty \lambda_n (K+K) ,$$

d'où, pour tout N, $\sum_0^N \lambda_n V[(U_m)] \subset U[(U_m)]$. Donc $\lambda \in G(\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\lambda)$, le galbe de l'injection canonique de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}_\lambda$.

e_h étant la fonction caractéristique de $\{h\}$, la série $\sum_0^\infty s_h e_h$ converge dans $\mathcal{S}_\lambda$ si et seulement si $(s_h) \in \mathcal{S}_\lambda$: $s \in \mathcal{S}_\lambda$ si $\sum_0^\infty s_h e_h$ converge car $\mathcal{S}_\lambda \subset \underset{\sim}{R}^N$ continûment et, inversement, il suffit de remarquer que $\sum_0^\infty s_h e_h$ converge dans $\mathcal{S}_\lambda$ quand $s \in \sum_0^\infty \lambda_n K$.

Or (e_h) est sommable dans $\mathcal{S}$. Supposant que λ ne vérifie pas (ii), il reste à démontrer que $\mathcal{S}_\lambda \subsetneq \ell^\infty$: montrons que, pour tout $\alpha < 0$, $(1+h)^\alpha_{h\geq 0} \notin \mathcal{S}_\lambda$.

Soit $s \in \mathbb{S}_\lambda$,

$$s = \sum_0^\infty \lambda_n \sum_{m=1}^M u_{n,m} I_{H_{n,m}} \ , \quad H_{n,m} \subset \underset{\sim}{N} \ , \quad |u_{n,m}| \leqslant 1 \ .$$

Soient $\alpha < 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geqslant 1$ tel que $M \sum_N^\infty \lambda_n \leqslant \varepsilon\ 2^{NM(\alpha-1)}$,

$$s = \sum_0^{N-1} \lambda_n \sum_{m=1}^M u_{n,m} I_{H_{n,m}} + \sum_N^\infty \lambda_n \sum_1^M u_{n,m} I_{H_{n,m}} \ .$$

La suite du premier terme prend au plus 2^{NM} valeurs distinctes. Celle du deuxième terme est uniformément majorée par $\varepsilon\ 2^{NM(\alpha-1)}$. Donc il existe $A \subset \underset{\sim}{R}$, fini non vide, vérifiant

(5,7) $$\forall\ h \geqslant 0\ , \qquad \inf_{a\in A} |s_h - a| \leqslant \varepsilon\ (\text{Card } A)^{\alpha-1}\ .$$

Prenons $\varepsilon < \frac{1}{2} \inf \{1\ ,\ |\alpha|\}$, et supposons qu'il existe A de cardinal $k \geqslant 1$, vérifiant (5,7) avec $s_h = (1 + h)^\alpha$. Si $0 \leqslant h_1 < h_2 \leqslant k - 1$, $(1 + h_1)^\alpha$ et $(1 + h_2)^\alpha$ ne peuvent être voisins d'ordre $\varepsilon k^{\alpha-1}$ d'un même point de A puisque leur différence est minorée par $|\alpha| k^{\alpha-1} > 2\varepsilon k^{\alpha-1}$, et il ne reste donc aucun point de A pour approcher à $\varepsilon k^{\alpha-1}$ près les $(1 + h)^\alpha$ qui sont strictement inférieurs à $k^\alpha - 2\varepsilon k^{\alpha-1}$, ce qui est absurde.

<u>Remarque</u> 1 : $\mathbb{S}$ et $\mathbb{S}_\lambda$ ne sont pas métrisables. Mais en affinant les constructions ci-dessus, on peut établir que si λ ne vérifie pas (ii) il existe des e. v. t. métrisables complets E et F , une application linéaire $f\ :\ F \to E$ telle que $\lambda \in G(f)$, et une suite (x_h) de F sommable telle que, $\forall\ \alpha \in \underset{\sim}{R}$, $\alpha \neq 0$, $\sum_1^\infty h^\alpha f(x_h)$ diverge dans E .

<u>Remarque</u> 2 : Si $f\ :\ F \to E$ est une application linéaire telle que $\lambda \in G(f)$, si E est complet et si (x_h) est sommable dans F , alors $(f(x_h))_{h\geqslant 0}$ est $\mathbb{S}_\lambda$-sommable dans F , en ce sens que $\sum s_h\ f(x_h)$ converge pour tout $s \in \mathbb{S}_\lambda$.

Voir la démonstration du théorème 5.3.

<u>Remarque</u> 3 : L'injection canonique $i_\lambda\ :\ \mathbb{S} \to \mathbb{S}_\lambda$ possède la propriété universelle suivante. Pour qu'une application linéaire $\mu\ :\ \mathbb{S} \to E$, E e. v. t. complet, se factorise par i_λ et par une application linéaire continue $\mathbb{S}_\lambda \to E$, il faut et il suffit que $\lambda \in G(\mu)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BESSAGA (C.), PELCZYNSKI (A.) and ROLEWICZ (S.). - Some properties of the norm in F-spaces, Studia Math., Warszawa, t. 16, 1957, p. 183-192.

[2] FISCHER (H. R.). - Limes Räume, Math. Annalen, t. 137, 1959, p. 269-303.

[3] KAHANE (J.-P.). - Some random series of functions. - Lexington, D. C. Heath, 1968 (Heath mathematical Monographs).

[4] KRASNOSEL'SKIJ (M. A.), RUTICKIJ (B.). - Convex functions and Orlicz spaces - Groningen, P. Noordhoff, 1961.

[5] MATUSZEWSKA (W.). - On generalized Orlicz spaces, Bull. Acad. polon. Sc., t. 8, 1960, p. 349-353.

[6] MATUSZEWSKA (W.) and ORLICZ (W.). - On certain properties of φ-functions, Bull. Acad. pol. Sc., t. 8, 1960, p. 439-443.

[7] MATUSZEWSKA (W.) and ORLICZ (W.). - A note on the theory of s-normed spaces of φ-integrable functions, Studia Math., Warszawa, t. 21, 1961, p. 107-115.

[8] MATUSZEWSKA (W.) and ORLICZ (W.). - A note on modular spaces, IX., Bull. Acad. polon. Sc., t. 16, 1968, p. 801-808.

[9] MAZUR (S.) and ORLICZ (W.). - On some classes of linear spaces, Studia Math., Warszawa, t. 17, 1958, p. 97-119.

[10] PALLASCHKE (D.). - The compact endomorphisms of the metric linear spaces $\mathcal{L}_\Phi$ [preprint].

[11] ROLEWICZ (S.). - Some remarks on the spaces $N(L)$ and $N(\ell)$, Studia Math., Warszawa, t. 18, 1959, p. 1-9.

[12] ROLEWICZ (S.) and RYLL-NARDZEWSKI (C.). - On unconditional convergence in linear metric spaces, Colloq. Math., Warszawa, t. 17, 1967, p. 327-331.

[13] SEMENOV (E. M.). - Imbedding theorems for Banach spaces of functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR, t. 156, 1964, p. 1292-1295.

[14] TURPIN (P.). - Opérateurs linéaires entre espaces d'Orlicz non localement convexes, Studia Math., Warszawa, t. 46, 1973, p. 153-165.

[15] TURPIN (P.). - Espaces et intersections d'espaces d'Orlicz non localement convexes, Studia Math., Warszawa, t. 46, 1973, p. 167-195.

[16] TURPIN (P.). - Sur certaines topologies vectorielles finales, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 647-649.

[17] TURPIN (P.). - Généralisation d'un théorème de S. Mazur et W. Orlicz, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 1971, Série A, p. 457-460 ; Variantes de résultats de S. Mazur et W. Orlicz et convexités généralisées, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 1971, Série A, p. 506-509.

[18] WAELBROECK (L.). - Topological vector spaces and algebras. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 230).

[19] WILLIAMSON (J. H.). - Compact linear spaces in linear topological spaces, J. London math. Soc., t. 29, 1954, p. 149-156.

Philippe TURPIN
Université de Paris-Sud
Mathématiques, Bâtiment 425
Centre universitaire d'Orsay
91405 ORSAY

NOTE ajoutée lors de la correction des épreuves [10 octobre 1973] :

1° Le problème, concernant $M_{(0,1)}$ (posé en [12]), de la page 2-08 a été résolu par B. MAUREY et G. PISIER [Un théorème d'extrapolation et ses conséquences, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 277, 1973, Série A, p. 39-42].

2° On a construit [Cf. TURPIN (P.). - Mesures vectorielles pathologiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 981-984] des mesures vectorielles bornées sans atome n'intégrant pas certaines fonctions mesurables bornées.