Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean Saint Raymond

# Nature de l'image linéaire continue d'un espace de Banach dans un espace de Banach séparable

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 11-12 (1971-1973), exp. n° C1, p. C1-C3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A10_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
11e-12e années, 1971-1973, Communication n° 1, 3 p. C1-01
Novembre 1972

# NATURE DE L'IMAGE LINÉAIRE CONTINUE D'UN ESPACE DE BANACH DANS UN ESPACE DE BANACH SÉPARABLE

par Jean SAINT RAYMOND

THÉORÈME 1. - Il existe une application linéaire continue d'un espace de Banach dans un espace de Banach séparable, dont l'image est une partie co-analytique non borélienne.

Démonstration. - S. MAZURKIEWICZ démontre dans [1] que dans l'espace des fonctions continues sur $[0 , 1]$ , l'ensemble des fonctions différentiables est co-analytique et non borélien. Il construit pour cela un compact dans $\mathcal{C}([0 , 1])$ dont la trace sur l'ensemble des fonctions différentiables n'est pas borélien. On peut voir que ce compact est contenu dans l'ensemble des fonctions 4-lipschitziennes, et par conséquent, que la trace sur l'ensemble des fonctions différentiables est contenue dans l'ensemble des fonctions différentiables à dérivée bornée ; cet ensemble n'est donc pas borélien. Par ailleurs, l'ensemble des fonctions différentiables à dérivée bornée est l'intersection de l'ensemble des fonctions différentiables qui est co-analytique et de l'ensemble des fonctions lipschitziennes qui est un $K_\sigma$ : c'est donc un ensemble co-analytique non borélien.

Soit $\Delta$ l'espace vectoriel des fonctions dérivées bornées sur $[0 , 1]$ muni de la norme uniforme. On vérifie aisément que $\Delta$ est complet. Soit $S$ l'application de $\underset{\sim}{R} \times \Delta$ dans $\mathcal{C}([0 , 1])$ qui à toute fonction de $\Delta$ , $g$ , et à tout nombre réel $y$ , associe la primitive de $g$ qui vaut $y$ à l'origine. Il est clair que $S$ est linéaire et continue, et que $S(\underset{\sim}{R} \times \Delta)$ est l'ensemble des fonctions différentiables à dérivée bornée, donc un ensemble co-analytique non borélien.

LEMME 2. - Pour tout espace de Banach séparable $E$ , il existe une application $\varphi$ continue (et même $C^\infty$ ) de $[0 , 1]$ dans $E$ telle que, pour toute série $(\alpha_p)$ absolument convergente et toute suite $(t_p)$ de points distincts de $[0 , 1]$ , la somme $\sum_{p=1}^\infty \alpha_p \varphi(t_p)$ ne s'annule que si tous les $\alpha_p$ sont nuls.

Démonstration. - On peut construire par récurrence une suite $(e_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs normés de $E$ telle que la distance de $e_n$ à l'espace vectoriel engendré par $\{e_0 , e_1 , \ldots , e_{n-1}\}$ soit égale à $1$ .

Soit $(u_n)$ une suite bornée de nombres réels non tous nuls. Nous montrons que $\sum_{n=0}^\infty (u_n e_n)/n!$ n'est pas nul. Si la somme de cette série normalement convergente était nulle, on aurait pour tout entier $p$ :

$$u_p \frac{e_p}{p!} + \left(\sum_{n=p+1}^\infty \frac{u_n e_n}{n!}\right) = - \sum_{m=0}^{p-1} \frac{u_m e_m}{m!} \in V(e_0 , \ldots , e_{p-1})$$

si $V(e_0, \dots, e_{p-1})$ désigne l'espace engendré par $\{e_0, e_1, \dots, e_{p-1}\}$. On a donc

$$\|\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{u_n e_n}{n!}\| \geq d(\frac{u_p}{p!} e_p, V(e_0, \dots, e_{p-1})) \geq \frac{|u_p|}{p!} d(e_p, V(e_0, \dots, e_{p-1})) = \frac{|u_p|}{p!}$$

Donc :

$$\frac{|u_p|}{p!} \leq \|\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{u_n e_n}{n!}\| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} |u_n| . \frac{\|e_n\|}{n!} \leq \sup_{n \geq p+1} |u_n| . (\sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{n!}) \leq \frac{1}{p.p!} \sup_{n \geq p+1} |u_n| .$$

On en déduit que

$$p.|u_p| \leq \sup_{n \geq p+1} |u_n| \leq \sup_n |u_n| < \infty$$

et par conséquent

$$\gamma = \sup_{p \in \mathbb{N}} p.|u_p| < \infty .$$

Il existe donc

$$q \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad q.|u_q| \geq \frac{5}{6}\gamma$$

et

$$r \geq q+1 \quad \text{tel que} \quad |u_r| \geq \frac{4}{5} \sup_{n \geq q+1} |u_n| .$$

De ceci on tire :

$$\frac{5}{6}.\gamma \leq q.|u_q| \leq \sup_{n \geq q+1} |u_n| \leq \frac{5}{4}.|u_r| \leq \frac{5}{4}\frac{\gamma}{r}$$

donc $\gamma = 0$ ou $r \leq 3/2$, donc $\gamma = 0$ ou $q = 0$ donc $\gamma = 0$. Par conséquent, tous les $u_n$ sont nuls, sauf peut-être $u_0$, mais $u_0 e_0$ n'est nul que si $u_0 = 0$. Nous avons donc démontré que tous les $u_n$ sont nuls si la suite $(u_n)$ est bornée et si la somme $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n e_n)/n!$ est nulle.

Posons maintenant, pour $t \in [0, 1]$ :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} e_n .$$

On vérifie aisément que $\varphi$ est continue, et même $C^{\infty}$. Supposons qu'il existe une série sommable $(\alpha_p)$ et une suite de points distincts $(t_p)$ de $[0, 1]$ telles que $\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p . \varphi(t_p) = 0$. La famille $(((\alpha_p t_p^n)/n!) e_n)_{n,p}$ est sommable. Par conséquent, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p t_p^n) \frac{e_n}{n!} = 0 .$$

Si on pose $u_n = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p t_p^n$, on vérifie que

$$\sup_n |u_n| \leq \sum_{p=1}^{\infty} |\alpha_p| < \infty .$$

De ceci on déduit que les $u_n$ sont tous nuls, donc que les moments de la mesure $\mu = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \varepsilon_{t_p}$ sont tous nuls. En vertu du théorème de Stone-Weierstrass, $\mu$ est nulle, ce qui montre que les $\alpha_p$ sont tous nuls.

THÉORÈME 3. - Il existe une application linéaire continue d'un espace de Banach dans un espace de Banach séparable, dont l'image ne possède pas la propriété de Baire forte. De plus, l'espace de Banach séparable est arbitraire.

<u>Démonstration</u>. - Soit $E$ un espace de Banach séparable. Choisissons une application $\varphi$ comme dans le lemme 2. Soit $X$ une partie arbitraire de $[0, 1] = I$. Désignons par $F$ l'espace de Banach $\ell^1_X$ des familles sommables indexées par $X$ de nombres réels. Soit maintenant $T$ l'application :

$$(\alpha_x) \longmapsto \sum_{x\in X} \alpha_x \varphi(x)$$

de $F$ dans $E$, et soit $G$ l'image de $T$. $T$ est linéaire et continue puisque

$$\|T((\alpha_x))\| \leq \sum.|\alpha_x|.\|\varphi(x)\| \leq \|(\alpha_x)\|.\sup_{x\in[0,1]}\|\varphi(x)\| .$$

L'application $T$ est injective, d'après la propriété de $\varphi$. De plus, si $y$ est un point de $G \cap \varphi(I)$, on a, si $y = \varphi(\theta)$,

$$\varphi(\theta) - \sum_{x\in X} \alpha_x \varphi(x) = 0$$

ce qui n'est possible que si $\theta \in X$ et si $\alpha_x = 0$ pour $x \neq \theta$. Donc

$$\varphi(I) \cap G = \varphi(X) .$$

Par conséquent, si $X$ ne possède pas la propriété de Baire dans $I$, $\varphi(I) \cap G$ ne possède pas la propriété de Baire dans le compact $\varphi(I)$, puisque $\varphi$ est un homéomorphisme de $I$ sur $\varphi(I)$. Par contre, d'après le théorème de l'application ouverte, $G$ possède la propriété de Baire faible dans $\overline{G}$ : $G$ est maigre ou égal à $\overline{G}$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] MAZURKIEWICZ (S.). - Über die Menge der differenzierbaren Funktionen, Fund. Math., Warszawa, t. 27, 1936, p. 244-249.

Jean SAINT RAYMOND
18 rue de Moscou
75008 PARIS