Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michèle Capon

Densité de l'espace des fonctions affines continues sur un convexe compact X dans l'espace L^p d'une mesure maximale

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° 26, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A8_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 26, 14 p.

24 juin 1971

DENSITÉ DE L'ESPACE DES FONCTIONS AFFINES CONTINUES SUR UN CONVEXE COMPACT X DANS L'ESPACE L^p D'UNE MESURE MAXIMALE

par Michèle CAPON

Introduction. - Pour tout convexe compact, on désignera par $\mathfrak{a}(X)$ l'espace des fonctions affines continues sur X. Rappelons l'énoncé du théorème de Carathéodory :

Soit X un convexe compact de $\underset{\sim}{R}^n$. Tout point x est barycentre d'une mesure maximale m, portée par un ensemble fini de points extrémaux. De plus, on peut toujours choisir ces points affinement indépendants (donc en nombre $\leqslant n+1$).

Pour cette mesure, on a en particulier

$$\mathfrak{a}(X) = L^p(m) , \qquad \text{pour tout } p \geqslant 1 .$$

C'est une identité de ce type, que nous nous proposons de généraliser. Soit X un convexe compact d'un e. l. c. s. ; on peut se poser les problèmes suivants :

$[\mathcal{P}_p]$ $p \geqslant 1$ étant fixé, existe-t-il, pour tout x_0 dans X, une mesure maximale m_p sur X, de barycentre x_0, telle que $\mathfrak{a}(X)$ soit dense dans $L^p(m_p)$?

$[\mathcal{P}]$ Existe-t-il, pour tout x_0 dans X, une mesure maximale m, de barycentre x_0, telle que $\mathfrak{a}(X)$ soit dense dans $L^p(m)$ pour tout $p \geqslant 1$?

Enfin, on peut se demander si, pour un point x_0 de X, une réponse positive aux problèmes $[\mathcal{P}_p](x_0)$ pour tout $p \geqslant 1$ (à savoir, il existe m_p maximale, de barycentre x_0, telle que $\mathfrak{a}(X)$ soit dense dans $L^p(m_p)$) implique une réponse positive au problème $[\mathcal{P}](x_0)$.

Le problème $[\mathcal{P}_p](x_0)$ n'est qu'un cas particulier du problème, posé par G. CHOQUET, à la fin de son exposé sur le problème des moments.

Notation. - Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_1^+(X)$, nous noterons M_μ l'ensemble des mesures $\nu \in \mathfrak{M}_1^+(X)$, telles que $r(\mu) = r(\nu)$. Dans le cas $p = 1$, les travaux de DOUGLAS, ALFSEN et SKAU permettent d'énoncer le résultat suivant :

Soit X un convexe compact d'un e. l. c. s., $m \in \mathfrak{M}_1^+(X)$. Pour que $\mathfrak{a}(X)$ soit dense dans $L^1(m)$, il faut et il suffit que m soit point extrémal de M_m.

1. Résultats généraux.

THÉORÈME 1. - On se donne $m \in \mathfrak{M}_1^+(X)$, et p tel que $1 \leqslant p < \infty$. On a l'équivalence des deux énoncés suivants :

(a) $\mathcal{C}(X)$ <u>est dense dans</u> $L^p(m)$;

(b) <u>Pour toute</u> $g \in L^{p'}(m)$ <u>avec</u> $\int_X |g| \, dm = 1$, $\mu = |g|.m$ <u>est un point extrémal de</u> M_μ .

<u>Démonstration.</u>

(b) $\Longrightarrow$ (a) . Si $\mathcal{C}(X)$ n'est pas dense dans $L^p(m)$, il existe g dans $L^{p'}(m)$ orthogonale à $\mathcal{C}(X)$, et on peut supposer que $\int |g| \, dm = 1$. Les mesures $2g^+.m$ et $2g^-.m$ sont toutes deux non nulles, distinctes (car étrangères), et elles ont même barycentre qui est aussi celui de μ . Or $\mu = |g| \, dm = (1/2)(2g^+.m + 2g^-.m)$, donc μ n'est pas point extrémal de M_μ .

(a) $\Longrightarrow$ (b) . Supposons qu'il existe g dans $L^{p'}(m)$, avec $\int |g| \, dm = 1$, et telle que $\mu = |g|.m$ ne soit pas point extrémal de M_μ . On a alors

$$\mu = (m_1 + m_2)/2 \ , \qquad m_1 \text{ et } m_2 \in M_\mu \ .$$

On a $m_i \leqslant 2\mu = 2|g|.m$, donc, d'après Radon-Nikodym, il existe $g_i \geqslant 0$ dans $L^1(m)$, telle que $m_i = g_i.m$. D'où

$$\mu = (1/2)(g_1.m + g_2.m) = |g|.m \ ,$$

donc $(1/2)(g_1 + g_2) = |g|$, m presque-partout, et, comme $|g|$ est dans $L^{p'}(m)$, g_1 et g_2 sont aussi dans $L^{p'}(m)$. Enfin, comme la résultante de $m_1 - m_2$ est 0 , $g_1 - g_2$ est orthogonale à $\mathcal{C}(X)$, donc $\mathcal{C}(X)$ n'est pas dense dans $L^p(m)$.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> X <u>un simplexe. Pour toute mesure maximale</u> m , $\mathcal{C}(X)$ <u>est dense dans</u> $L^p(m)$ <u>pour tout</u> p <u>tel que</u> $1 \leqslant p < +\infty$.

Soient m une mesure maximale sur X , et $g \in L^{p'}(m)$ avec $\int_X |g| \, dm = 1$, soit $\mu = |g|.m$. Il suffit de montrer que μ est un point extrémal de M_μ . Or μ est, comme m , portée par tout ensemble bordant, donc elle est maximale. Si $\mu = (m_1 + m_2)/2$, où $m_i \in M_\mu$, on a $m_i \leqslant 2\mu$, donc m_1 et m_2 sont maximales. Or, dans M_μ , il existe une seule mesure maximale, puisque X est un simplexe, donc $m_1 = m_2 = \mu$. Autrement dit, μ est un point extrémal de M_μ .

COROLLAIRE 3. - <u>Soit</u> X <u>un convexe compact.</u>

1° <u>Les deux propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) $\mathcal{C}(X)$ <u>est dense dans</u> $L^1(m)$ (m <u>mesure sur</u> X , $m \in \mathfrak{M}_1^+(X)$) ;

(b) m <u>est un point extrémal de</u> M_m .

2° <u>Tout point de</u> X <u>est barycentre d'une mesure maximale telle que</u> $\mathcal{C}(X)$ <u>soit dense dans</u> $L^1(m)$.

Ces énoncés sont dus à DOUGLAS, ALFSEN et SKAU. Nous allons les redémontrer en utilisant le théorème 1.

Démonstration. - Dans le corollaire 3, 1°, l'implication (a) ==> (b) résulte du théorème 1 en prenant $g = 1$, et l'implication (a) <== (b) résulte du théorème 1 et du lemme ci-après.

LEMME 4. - Soient m et μ dans $\mathfrak{M}_1^+(X)$, $\lambda \in \underset{\sim}{R}_+$. Si m est extrémale dans M_m, et si $\mu \leqslant \lambda m$, alors μ est extrémale dans M_μ.

En effet, si $\mu = (m_1 + m_2)/2 \leqslant \lambda m$, où $m_i \in M_\mu$, on a $\lambda m = \mu + \pi$, où $\pi \in \mathfrak{M}^+(X)$, donc $\lambda m = ((\pi + m_1) + (\pi + m_2))/2$, d'où

$$m = (m_1' + m_2')/2 , \qquad \text{avec } m_i' = \lambda^{-1}(\pi + m_i) .$$

On a alors $m_i' \geqslant 0$ et $m_i'(1) = \lambda^{-1}(\pi(1) + m_i(1)) = 1$. De plus, $r(m_i') = r(m)$, car, si $f \in \mathfrak{A}(X)$, on a

$$m_i'(f) = \lambda^{-1}(\pi(f) + m_i(f)) = \lambda^{-1}(\pi(f) + \mu(f)) = m(f) .$$

Mais m est extrémale dans M_m, donc

$$m = m_1' = m_2' ,$$

donc

$$\pi + m_1 = \pi + m_2 = \lambda m ,$$

et par suite $m_1 = m_2 = \mu$.

C. Q. F. D.

L'énoncé 3, 2°, sera démontré si on trouve un point extrémal de $M_{\varepsilon_{x_0}}$ qui soit une mesure maximale. Cela résulte du lemme suivant.

LEMME 5. - Soient F un e. l. c. s., K un convexe compact de F, P un cône convexe fermé et saillant définissant un ordre sur F (donc aussi sur K).

(a) Cet ordre est inductif sur K ;

(b) Si $A(K)$ est l'ensemble des points maximaux de K pour l'ordre induit, alors $A(K) \cap \mathcal{E}(K) \neq \emptyset$.

Démonstration. - Ce lemme est connu (voir PHELPS [2]). Nous ne donnerons qu'un plan de démonstration.

Pour (a), on utilise le fait suivant : pour toute famille x_α totalement ordonnée de K, les $(x_\alpha + P) \cap K$ sont des compacts non vides emboîtés.

Pour (b), on introduit la famille $\mathfrak{F}$ des faces croissantes de K , i. e. des parties fermées, non vides de K , telles que

$$(1) \qquad \left.\begin{matrix}(x_1 + x_2)/2 \in F \\ x_1 \text{ et } x_2 \in K\end{matrix}\right\} \Longrightarrow x_1 \text{ et } x_2 \in F \ ,$$

$$(2) \qquad \left.\begin{matrix}x_1 \geqslant x_0 \\ x_0 \in F \text{ et } x_1 \in K\end{matrix}\right\} \Longrightarrow x_1 \in F \ .$$

On ordonne par inclusion, et on vérifie que $\mathfrak{F}$ est inductive vers le bas. Si F_0 est une face minimale de K , on montre que F_0 est réduite à un point x_0 , et que $(x_0 + P) \cap K = \{x_0\}$. En outre, x_0 est extrémal dans K , donc $x_0 \in \mathcal{E}(K) \cap A(K)$.

C. Q. F. D.

On applique alors le lemme au convexe compact M_{ε_x} et au cône

$$P = S^0 = \{\mu \in \mathfrak{M}(X) \mid \mu(f) \geqslant 0 \ , \ \forall f \text{ convexe continue}\} \ .$$

Ce cône définit l'ordre de Choquet sur $\mathfrak{M}(X)$, et, d'après le lemme 5, il existe un élément m à la fois extrémal et maximal dans M_{ε_x} . C'est évidemment une mesure maximale, et elle répond au problème posé.

LEMME 6. - <u>Pour tout</u> $p_0 > 1$, <u>on peut trouver un convexe compact</u> X <u>et</u> $\Phi_0 \in X$, <u>barycentre d'une seule mesure maximale</u> m , <u>tels que, pour tout</u> $p \geqslant p_0$, $\mathcal{A}(X)$ <u>soit non dense dans</u> $L^p(m)$.

<u>Démonstration</u>. - Soient $I = [-1 , 1]$, et α une constante $\geqslant 0$,

$$H = \{f \in \mathcal{C}(I) \ ; \ \int_{-1}^{1} x|x|^{\alpha} \, dx = 0\} \ .$$

On voit facilement que H est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(I)$, qui contient les constantes et sépare les points, et que la frontière de Choquet de H est I tout entier (on voit facilement que, pour tout $x \in I$, il existe une fonction de H qui atteint son maximum strict en x). On pose enfin

$$X = H_1'^{+} = \{\ell \in H'^{+} \ ; \ \ell(1) = 1\} \ .$$

X , muni de la topologie $\sigma(H' , H)$, est un convexe compact. Soit $\delta : x \longmapsto \varepsilon_x$ de I dans X . Il est classique qu'on a alors $\mathcal{E}(X) = \delta(I)$. Les mesures maximales ne sont autres que les mesures positives sur I .

Etudions d'abord $\mathcal{A}(X)$: On sait que $H \oplus \underline{R}$ est dense dans $\mathcal{A}(X)$, mais, comme $1 \in H$, on a $H \oplus \underline{R}|_X = H|_X$. D'autre part, si $f \in H$, on a

$$\sup_{\ell \in X} |\ell(f)| = \sup_{\ell \in \delta(I)} |\ell(f)| = \|f\|_\infty \quad ,$$

donc $H|_X$ est un espace complet, et, par conséquent, il est fermé dans $\mathfrak{A}(X)$. On a donc $\mathfrak{A}(X) = H|_X$.

Etudions maintenant le point $\Phi_0 = r(\mu)$, où $\mu = (\alpha + 3)/2\ |x|^{\alpha+2}$. On identifie les mesures maximales sur X et les mesures positives sur I : Φ_0 est barycentre de la mesure maximale μ. Soit m une autre mesure maximale, de barycentre Φ_0 : $m - \mu$ est orthogonale au noyau de la forme linéaire $x|x|^\alpha\, dx$, donc

$$m = \mu + \lambda x|x|^\alpha\, dx = |x|^\alpha\ (((\alpha + 3)/2)x^2 + \lambda x)\ dx \quad .$$

On voit immédiatement que :

Si $\lambda > 0$, m est < 0 sur un intervalle $]-\varepsilon, 0[$;
Si $\lambda < 0$, m est < 0 sur un intervalle $]0, \varepsilon[$.

Donc m ne peut être positive que si $\lambda = 0$.

$\mu = ((\alpha + 3)/2)|x|^{\alpha+2}$ <u>est la seule mesure maximale de barycentre</u> Φ_0 .

On pose alors $g(x) = 1/x$, pour tout $x \neq 0$ dans I. On a

$$\int_{-1}^{1} |g|^{p'}\, d\mu = (\alpha + 3)/2 \int dx/|x|^{p'-\alpha-2} < \infty, \qquad \text{pour } 1 \leqslant p' < \alpha + 3 \quad .$$

D'autre part, g est orthogonale à $\mathfrak{A}(X)$, car, si $f \in H$, on a

$$\int f.g\, d\mu = \int_{-1}^{1} (\alpha + 3)/2\ f(x)\ (|x|^{\alpha+2})/x\, dx = 0 \quad .$$

Or, si p' est l'exposant conjugué de p, on a

$$p' < \alpha + 3 \iff p > (\alpha + 3)/(\alpha + 2) \quad ,$$

donc

$\forall\ p > (\alpha + 3)/(\alpha + 2)$, $\mathfrak{A}(X)$ <u>est non dense dans</u> $L^p(\mu)$.

Le lemme est démontré, car $(\alpha + 3)/(\alpha + 2)$ peut prendre toute valeur dans $]1, 3/2]$.

<u>Remarque</u> 7. - Le problème $[\mathcal{P}_p]$ ne peut être résolu pour X qui est presque un simplexe, puisque H est de codimension 1 dans $\mathcal{C}(I)$, ou, de façon équivalente, si r désigne l'application résultante de $\mathfrak{M}_1^+(I)$ sur X, $r^{-1}(x)$ est de dimension 1 au plus, car $r(\mu) = r(\nu) \implies (\mu - \nu)$ est orthogonale à H, donc $\mu - \nu = \lambda x|x|^\alpha\, dx$. De plus, X est métrisable (compact faible dans le dual d'un espace métrisable séparable), donc on ne pourra espérer des réponses plus favorables en se limitant aux convexes compacts métrisables.

THÉORÈME 8. - <u>Il existe un convexe compact</u> X <u>et un point</u> $\Phi_0 \in X$, <u>tels que</u> Φ_0 <u>soit barycentre d'une seule mesure maximale</u> m , <u>et tels que</u> $\mathcal{A}(X)$ <u>soit non dense dans</u> $L^p(m)$ <u>dès que</u> $p > 1$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons $I_n = [-1 , 1]$, et

$$H_n = \{f \in \mathcal{C}(I_n) \ ; \ \int_{-1}^{1} x^{2n-1} f(x)\, dx = 0\} .$$

Soit K le compactifié d'Aleksandrov de la somme topologique des I_n . On note ω le point à l'infini, et on pose

$$H_0 = \{f \in \mathcal{C}(K) \text{ telles que } f_n = f|_{I_n} \text{ soit dans } H_n \text{ et que } \lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = f(\omega) = 0\} .$$

Soit enfin $H = H_0 \oplus \mathbb{R}$. Il est clair que H_0 est fermé dans $\mathcal{C}(K)$, donc H est fermé et contient les constantes. On voit aisément que H sépare les points de K , et, qu'en tout point x de K , il existe une fonction de H qui atteint son maximum strict en x .

Posons $X = H_1'^{+}$. L'application $\delta : x \longmapsto \varepsilon_x$ de K dans X est injective continue, et on déduit de ce qui précède que $\delta(K) = \mathcal{E}(X)$. L'ensemble des mesures maximales sur X s'identifie donc à $\mathcal{M}_1^+(K)$. Comme dans le lemme 6, on montre que $\mathcal{A}(X) = H$.

Etudions maintenant $\Phi_0 = r(\mu)$, où $\mu = \sum_p \mu_p$, avec $1 \leqslant p < \infty$, et $\mu_p = (2p + 1)/2^{p+1}\, x^{2p}\, dx$. Il est classique que toute $m \in \mathcal{M}_1^+(K)$ est de la forme

$$m = \sum_{p\geqslant 1} m_p + m(\omega)\ \varepsilon_\omega ,$$

avec

$$m_p \geqslant 0 \text{ sur } I_p , \qquad m(\omega) \geqslant 0 , \qquad \text{et} \qquad \sum_{p\geqslant 1} \|m_p\| + m(\omega) = 1 .$$

Si en outre m admet Φ_0 pour barycentre, on a $m(f) = \mu(f)$ pour toute f dans H , donc en particulier $m_p(f) = \mu_p(f)$ pour f dans H_p . La démonstration du lemme 6 montre que $m_p = \mu_p$, et par conséquent $m(\omega) = 1 - \sum_{p\geqslant 1} \|\mu_p\| = 0$, donc

μ <u>est la seule mesure maximale de barycentre</u> Φ_0 .

Pour $p_0 > 1$, $\mathcal{A}(X)$ est non dense dans $L^{p_0}(\mu)$: En effet, soit n un entier tel que $(2n + 1)/2n < p_0$, et soit $F \in L^{p_0}(\mu_n)$; alors $F.1_{I_n} \in L^{p_0}(\mu)$. En supposant que $\mathcal{A}(X)$ est dense dans $L^{p_0}(\mu)$, on peut trouver G dans H telle que $\int_K |G - F.1_{I_n}|^{p_0}\, d\mu < \varepsilon$, donc

$$\int_{I_n} |G_n - F|^{p_0} \, d\mu < \varepsilon \quad .$$

Or $G_n \in H|_{I_n} = H_n$, donc H_n serait dense dans $L^{p_0}(\mu_n)$, ce qui contredit l'exemple construit au lemme 6. On a donc montré que

$$\forall \; p > 1 \; , \qquad \mathcal{A}(X) \; \underline{\text{est non dense dans}} \; L^p(\mu) \quad .$$

THÉORÈME 9. - <u>Il existe un convexe compact</u> X <u>et un</u> $\Phi_0 \in X$, <u>tels que</u> :

1° <u>Pour tout</u> $p \geqslant 1$, <u>il existe, dans</u> $M_{\varepsilon_{x_0}}$, <u>une mesure maximale</u> m_p <u>telle que</u> $\mathcal{A}(X)$ <u>soit dense dans</u> $L^p(m_p)$;

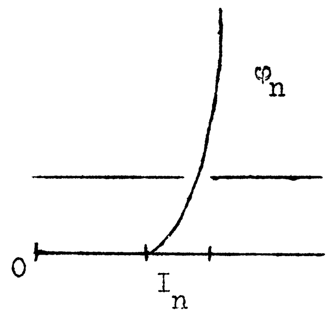
2° <u>Il n'existe aucune mesure maximale, dans</u> $M_{\varepsilon_{x_0}}$, <u>telle que</u> $\mathcal{A}(X)$ <u>soit dense dans</u> $L^p(m)$ <u>pour tout</u> $p \geqslant 1$.

Nous ne donnerons qu'un plan de démonstration. On note $I_n = [1/(n+1) \; , \; 1/n]$, et K le compactifié d'Aleksandrov de la somme topologique des I_n . 0 désignera le point à l'infini, et dx la mesure sur K dont la restriction à chaque I_n est la mesure de Lebesgue. On construit alors une suite φ_n de fonctions mesurables sur K telles que :

(1) $\varphi_n > 0$ presque-partout sur K , et $\varphi_n \equiv 1$ sur I_p , $p \neq n$;

(2) $\int_K \varphi_n \, dx = 1$, et $\int_K (1-x)\varphi_n \, dx = 1/2$;

(3) Pour tout $p' > 1$, $\int_K \varphi_n^{p'} \, dx = +\infty$.

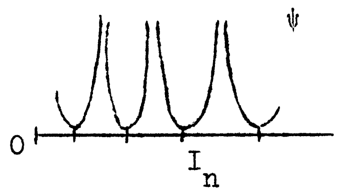


On construit de même ψ vérifiant :

(1') $\psi > 0$ presque-partout (dx) ;

(2') $\int_K \psi \, dx = 1$, $\int_K (1-x)\psi \, dx = 1/2$;

(3') $\int_K |(\psi - 1)/\psi|^{5/4} \, \psi \, dx < +\infty$, et $\int_K |\psi - 1|^{5/4} \, dx < +\infty$.



Soit

$$H = \{ f \in \mathcal{C}(K) \; ; \; \int f \, \varphi_n \, dx = \int f \, \psi \, dx = \int f \, dx \; , \quad \forall \; n \geqslant 1 \} \quad .$$

H est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(K)$, qui contient les constantes et sépare les points. On montre que la frontière de Choquet de H est K tout entier. On pose alors $X = H_1'^{+}$, et on note δ l'application $x \longmapsto \varepsilon_x$ de K dans X .

Avec ces notations, on a $\mathcal{A}(X) = H$ et $\mathcal{E}(X) = \delta(K)$. On prend $\Phi_0 = r(dx)$. Pour démontrer le théorème, on étudie ceux des points extrémaux de $M_{\varepsilon_{\Phi_0}}$ qui sont des mesures maximales, et on voit que ce sont les mesures $m \in \mathcal{M}_1^+(K)$ de la forme

$$m = [\Sigma_{p \in S} (\varphi_p - 1) + 1]\, dx \ , \quad \text{où} \quad S \subset \underset{\sim}{N} \ , \qquad \text{et} \qquad n = \psi \, dx \ .$$

Pour chacune d'elles, on trouve facilement un indice $p' > 1$, et une fonction $g \in L^{p'}(m)$ orthogonale à $\mathcal{Q}(X)$, donc l'assertion 2° est démontrée.

Pour montrer le 1°, on étudie $m_n = \varphi_n \, dx$, et on montre, en étudiant les fonctions orthogonales à $\mathcal{Q}(X)$, que $\mathcal{Q}(X)$ est dense dans $L^p(m_n)$ pour $p < 2n - 1$.

2. Etude des cas favorables.

Soient S un simplexe, x_0 un point de $\mathcal{E}(S)$, et $E = \mathcal{Q}_{x_0}(S)$ l'espace des fonctions affines continues sur S , nulles en x_0 . On sait, d'après ROGALSKI [3], que S est affinement isomorphe à $K = \{\ell \in E'_+ \ ; \ \|\ell\| \leqslant 1\}$.

THÉORÈME 10. - Soit S un simplexe tel que toute mesure maximale soit intérieurement portée par $\mathcal{E}(S)$. Le problème $[\mathcal{P}]$ est alors positivement résolu pour $X = \mathrm{conv}(K \cup - K)$.

D'après la caractérisation donnée par ROGALSKI [3], E est un espace simplicial, donc E'^+ est un L-espace de Kakutani.

Etudions d'abord $\mathcal{E}(X)$: Si on note $L(K)$ l'ensemble des points de K qui sont de norme 1 , et $\mathcal{E}(E'^+)$ l'ensemble des génératrices extrémales de E'^+ , il est classique que

$$\mathcal{E}(K) = L(K) \cap \mathcal{E}(E'^+) \cup \{0\} \ .$$

On vérifie aisément que X est la boule unité de E'^+ , et que

$$\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(K) \cup \mathcal{E}(-K) - \{0\} \ .$$

Ce sont donc les points de la sphère qui sont sur les génératrices extrémales de E'^+ et leurs symétriques.

$\mathcal{Q}(X)$ s'identifie à $E \oplus \underset{\sim}{R}|_X$, car E est un espace de Banach. Pour toute $f \in E$, on notera φ_f la forme linéaire sur E' : $\ell \longmapsto \ell(f)$. La démonstration repose sur deux remarques :

1° Soient ℓ_1 et $\ell_2 \in L(K)$ telles que $\inf(\ell_1 , \ell_2) = 0$. Si μ_{ℓ_1} et μ_{ℓ_2} sont les mesures maximales sur K de barycentres ℓ_1 et ℓ_2 , on a alors $\inf(\mu_{\ell_1} , \mu_{\ell_2}) = 0$. En effet, le cône des mesures maximales M est en bijection affine avec le cône $\widetilde{K} = \cup_{\lambda \geqslant 0} \lambda(K \times 1)$ par l'application $\mu_\ell \longmapsto (\ell , \|\ell\|)$. Il suffit donc de montrer que $(\ell_1 , 1)$ et $(\ell_2 , 1)$ sont étrangers. Or il résulte d'un calcul facile (voir PHELPS [2]) que

$$\inf[(\ell_1 , 1) ; (\ell_2 , 1)] = (\inf(\ell_1 , \ell_2) , \inf(1 - \|\ell_1\| , 1 - \|\ell_2\|)) = (0 , 0) .$$

2° Si $\ell \in L(K)$, la mesure maximale μ_ℓ est portée par $\mathcal{E}(K) - \{0\}$. En effet, il résulte de l'hypothèse qu'elle est portée par $\mathcal{E}(K)$. Si elle n'est pas portée par $\mathcal{E}(K) - \{0\}$, il existe un entier n tel que, si on pose $K_n = (1 - (1/n))K$, alors $0 < \mu_\ell(K_n) = \alpha < 1$. Posons alors $\nu_1 = 1/\alpha \, \mu_\ell|_{K_n}$, $\nu_2 = (1 - \alpha)^{-1} \mu_\ell|_{\complement K_n}$; on a $\mu = \alpha\nu_1 + (1 - \alpha)\nu_2$, donc

$$r(\mu) = \ell = \alpha \, r(\nu_1) + (1 - \alpha) \, r(\nu_2) .$$

On en déduit, puisque $r(\nu_1) \in K_n$, que $\|\ell\| < 1$, ce qui est impossible, car $\ell \in L(K)$.

Choisissons maintenant ℓ_0 dans X :

$$\ell_0 = \ell_0^+ - \ell_0^- \qquad \text{et} \qquad \|\ell_0\| = \|\ell_0^+\| + \|\ell_0^-\| = \alpha_1 + \alpha_2 .$$

<u>1er cas</u> : Supposons que $\|\ell_0\| = 1$. On peut écrire

$$\ell_0 = \alpha_1 \, \ell_1 - \alpha_2 \, \ell_2 , \qquad \text{avec} \begin{cases} \ell_1 = \ell_0^+/\|\ell_0^+\| , & \text{si } \ell_0^+ \neq 0 , \\ \ell_1 = 0 , & \text{si } \ell_0^+ = 0 , \\ \ell_2 = \ell_0^-/\|\ell_0^-\| , & \text{si } \ell_0^- \neq 0 , \\ \ell_2 = 0 , & \text{si } \ell_0^- = 0 . \end{cases}$$

On définit m sur X par

$$\int_X F(\ell) \, dm(\ell) = \alpha_1 \int_K F(\ell) \, d\mu_1(\ell) + \alpha_2 \int_K F(- \ell) \, d\mu_2(\ell) .$$

On vérifie aisément que m est positive, de masse 1 , portée par $\mathcal{E}(X)$, donc maximale et de barycentre ℓ_0 , car, si $F = \varphi_f$, on a

$$\int_X \varphi_f(\ell) \, dm(\ell) = \alpha_1 \, \ell_1(f) - \alpha_2 \, \ell_2(f) = \ell_0(f) = \varphi_f(\ell_0) .$$

Pour montrer la densité de $\mathcal{A}(X)$ dans $L^p(m)$, on se donne $F \in \mathcal{C}(X)$. μ_{ℓ_1} et μ_{ℓ_2} étant étrangères, il existe deux boréliens disjoints qu'on peut prendre K_σ , contenus dans $\mathcal{E}(K)$ et qui portent $\alpha_1 \mu_{\ell_1}$ et $\alpha_2 \mu_{\ell_2}$, d'après la remarque 2. Soient $B_1 = \cup_n B_{1n}$ et $B_2 = \cup_n B_{2n}$ ces deux boréliens. On peut, puisque K est un simplexe et que $\{0\} \cup B_{1n} \cup B_{2n}$ est un compact de $\mathcal{E}(K)$, trouver une fonction F_n affine continue sur K , telle que

$$\begin{cases} F_n(\ell) = F(\ell) \ , \quad \text{si} \quad \ell \in B_{1n} \ , \\ F_n(\ell) = - F(-\ell) \ , \quad \text{si} \quad \ell \in B_{2n} \ , \\ F_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \|F_n\| \leqslant \|F\| \ . \end{cases}$$

F_n se prolonge en une fonction affine continue sur X et de même norme. On a

$$\int_X |F - \widetilde{F}_n|^p \, dm \leqslant 2^p \, \|F\|^p \, [\alpha_1 \, \mu_{\ell_1}(K - B_{1n}) + \alpha_2 \, \mu_{\ell_2}(K - B_{2n})] \ ,$$

donc la suite $\widetilde{F}_n$ tend vers F dans $L^p(m)$.

<u>2e cas</u> : Si $0 < \alpha_1 + \alpha_2 = \|\ell_0\| < 1$, on peut supposer par exemple $\ell_1 \neq 0$, donc $B_{11} \neq \emptyset$. Fixons e dans B_{11} , et posons

$$\int_X F(\ell) \, dm(\ell) = \alpha_1 \int_K F(\ell) \, d\mu_{\ell_1}(\ell) + \alpha_2 \int_K F(-\ell) \, d\mu_{\ell_2}(\ell) + ((1 - \|\ell_0\|)/2)(F(e) + F(-e)) \ .$$

On vérifie aisément que m est maximale de barycentre ℓ_0 , et, pour montrer la densité de $\mathfrak{A}(X)$ dans $L^p(m)$, on se donne $F \in \mathcal{C}(X)$. On peut remplacer F par $G = F - ((F(e) + F(-e))/2)$. On a alors $G(e) = - G(-e)$. D'après le 1er cas, on peut trouver $\widetilde{F}_n$ dans $\mathfrak{A}_0(X)$ telle que

$$\int_K |G(\ell) - \widetilde{F}_n(\ell)|^p \, d\mu_1(\ell) \to 0 \ ,$$

$$\int_K |G(-\ell) - \widetilde{F}_n(-\ell)|^p \, d\mu_2(\ell) \to 0 \ ,$$

et comme $e \in B_{11}$, on a $\widetilde{F}_n(e) = G(e)$ pour $n \geqslant 1$, donc

$$\widetilde{F}_n(-e) = - \widetilde{F}_n(e) = - G(e) = G(-e) \ .$$

On déduit de là, que la suite $\widetilde{F}_n$ tend vers F dans $L^p(m)$.

<u>3e cas</u> : $\ell = 0$. Ce cas se traîte aisément, en posant $m = (1/2)(\varepsilon_e + \varepsilon_{-e})$ où $e \in \mathcal{E}(K)$.

COROLLAIRE 11. - <u>Le problème</u> $[\mathcal{P}]$ <u>est positivement résolu, lorsque</u> X <u>est la boule unité du dual d'un</u> M-<u>espace</u> E . <u>En particulier, pour la boule unité de</u> $\mathfrak{M}^0(Y)$, <u>espace des mesures bornées sur un espace localement compact</u> Y , <u>et pour la boule unité de</u> $\mathfrak{M}(Y)$, <u>espace des mesures sur un compact</u> Y .

En effet, on applique le théorème à $S = K = \{\ell \in E'^+ \ ; \ \|\ell\| \leqslant 1\}$. On sait que S est un simplexe, car E'^+ est réticulé. Toute mesure maximale est portée par $\mathcal{E}(K)$, car, si $\ell \in K$, on écrit $\ell = \|\ell\| \, \ell/\|\ell\| + (1 - \|\ell\|)0 = \|\ell\| \, \ell_1 + (1 - \|\ell\|)0$, donc $\mu_\ell = \|\ell\|\, \mu_{\ell_1} + (1 - \|\ell\|)\varepsilon_0$. Or, en raisonnant comme dans la remarque 2, on montre que μ_{ℓ_1} est portée par $\mathcal{E}(K) - \{0\}$, donc μ_ℓ est portée par $\mathcal{E}(K)$. On vérifie aisément que $X = \mathrm{conv}(K \cup - K)$ est la boule unité de E' ; on peut donc appliquer le théorème.

Signalons un cas simple où on sait résoudre $[\mathcal{P}]$.

THÉORÈME 12. - Soit X la boule unité du dual d'un espace de Banach, telle que tout point de la sphère unité soit extrémal. Le problème $[\mathcal{P}]$ est positivement résolu pour X .

En effet, si $x_0 \in X$, on l'écrit (si $x_0 \neq 0$)

$$x_0 = ((1 + \|x_0\|)/2)(x_0/\|x_0\|) + ((1 - \|x_0\|)/2)(- x_0/\|x_0\|) = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 ,$$

et on pose $m = \alpha\varepsilon_{x_1} + (1 - \alpha)\varepsilon_{x_2}$. Il est alors immédiat que m résout le problème $[\mathcal{P}]$. Le cas $x_0 = 0$ se traîte de façon analogue.

COROLLAIRE 13. - Soit μ une mesure positive sur un espace localement compact, et soit p tel que $1 < p < \infty$; le problème $[\mathcal{P}]$ est positivement résolu pour la boule unité de $L^p(\mu)$.

Nous allons maintenant étudier le cas du dual d'un L-espace.

THÉORÈME 14. - Si B est la boule unité du dual d'un L-espace de Kakutani E , le problème $[\mathcal{P}]$ est positivement résolu pour B .

On sait que le dual de E est un M-espace possédant un élément unité, et qu'il est isomorphe pour l'ordre et isométrique à l'espace $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues sur son spectre X qui est un compact stonien. On démontre, dans KELLEY [1], que E est isomorphe au sous-espace des mesures sur X qui sont nulles sur tout borélien maigre. Nous appellerons "mesure normale" sur X une telle mesure.

Etudions d'abord $\mathcal{E}(B)$: On vérifie aisément que $\mathcal{E}(B)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(X)$ telles que $f^2 = 1$, donc

$$\mathcal{E}(B) = \{f \in \mathcal{C}(X) \ ; \ f = 1_U - 1_{\complement U} , \ U \text{ ouvert et fermé de } X\} .$$

E étant un espace de Banach, $\mathcal{A}(B)$ s'identifie avec $E \oplus \underline{R}|_B$. On considère E comme sous-espace de $\mathcal{M}(X)$, pour toute mesure ν normale sur X ; nous noterons φ_ν la forme linéaire sur E' définie par $\varphi_\nu(f) = \nu(f)$.

Fixons maintenant $f_0 \in B$. Nous allons construire une application de $\{- 1 , 1\}$

dans $\mathcal{E}(B)$, ce qui nous permettra d'exhiber la mesure maximale résolvant le problème $[\mathcal{P}]$ pour f_0 . Pour tout $y \in [-1 , 1]$, on pose

$$U'_y = \{x \in X \; ; \; f_0(x) > y\} \qquad \text{et} \qquad U_y = \overline{U'_y} \; .$$

On définit alors e_y par $e_y(x) = 1_{U_y} - 1_{\complement U_y}$. L'essentiel de la démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME 15. - <u>Soit</u> $F \in \mathcal{C}(B)$; <u>l'application</u> $y \longmapsto F(e_y)$ <u>de</u> $[-1 , 1]$ <u>dans</u> $\underline{\mathbb{R}}$ <u>est continue à droite. Elle est limite presque-partout pour la mesure de Lebesgue d'une suite</u> $\widetilde{F}_n$ <u>de fonctions étagées, de norme</u> $\leqslant \|F\|$, <u>et combinaisons linéaires de</u> 1 <u>et</u> $1_{[-1,f_0(a)]}$, <u>où</u> a <u>parcourt l'ensemble des points de</u> X <u>qui sont dans le support d'une mesure normale</u>.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de montrer que $y \longmapsto e_y$ est continue à droite, pour avoir la première assertion. Or, si y_n est une suite décroissante vers y , on a :

1° Pour $x \in X$ tel que $f_0(x) > y$, alors $f_0(x) > y_n$ pour n assez grand.

2° Pour $x \in X$ tel que $f_0(x) \leqslant y$, alors $f_0(x) \leqslant y_n$, donc $e_{y_n}(x)$ tend vers $e_y(x)$ pour tout $x \in U'_y \cup \complement U_y$, et par suite sur le complémentaire d'un ensemble rare. La suite étant bornée, on en déduit, d'après le théorème de Lebesgue, que $\nu(e_{y_n})$ tend vers $\nu(e_y)$ pour toute ν normale. $y \longmapsto F(e_y)$ est donc continue à droite.

Soit $[\alpha , \beta] \subset [-1 , 1]$ le plus petit intervalle contenant l'image $f_0(X)$ de f_0 . Pour tout $y_0 \in [-1 , \beta[$, on peut trouver $h > 0$ tel que l'oscillation de $F \circ e_y$ dans $[y_0 , y_0 + h[$ soit $< \varepsilon = 1/n$. On peut supposer que $y_0 + h$ est dans l'image de f_0 , car, sinon, $y_0 + h \in]f_0(a_1) , f_0(a_2)[$. Or $F \circ e_y$ est constante dans un tel intervalle. Donc, pour tout $y_0 \in [-1 , \beta[$, il existe $a_0 \in X$ tel que l'oscillation de $F \circ e_y$ soit inférieure à ε dans $[y_0 , f_0(a_0)[$. On vérifie aisément qu'on peut recouvrir $[-1 , \beta - (1/n)]$ par une infinité dénombrable de tels intervalles, de manière à réaliser

$$-1 = y_0 < y_1 \leqslant f_0(a_0) < y_2 \leqslant f_0(a_1) < y_3 \leqslant f_0(a_2) < \dots < f_0(a_p) < \dots \; .$$

On pose

$$F_n(y) = F(e_{-1})1_{[-1,f_0(a_0)[} + \sum_i F(e_{f_0(a_i)})1_{[f_0(a_i),f_0(a_{i+1})[} + F(e_1)1_{[\beta,1]} ,$$

avec $0 \leqslant i < \infty$.

On vérifie que $\|F_n - F\| < \varepsilon$. Pour avoir le lemme, il faut montrer qu'on peut choisir a_i dans le support d'une mesure normale. Or la réunion de ces supports est partout dense dans X , car, dans le cas contraire, on pourrait construire

$f \in \mathcal{C}(X) = E'$ telle que $f \neq 0$ et $\nu(f) = 0$, $\forall\ \nu$ normale. Ceci est impossible, car $\sigma(E'\ E)$ est séparée. On peut donc, dans F_n , remplacer a_i par a'_i , contenu dans le support d'une mesure normale et tel que $|f_0(a_i) - f_0(a'_i)| < \varepsilon/2^i$. La suite G_n vérifie encore $|G_n - G| < \varepsilon = 1/n$ sur le complémentaire d'un ensemble de mesure $\leqslant 2/n$.

Le lemme est donc démontré, et on peut maintenant poser, puisque $F \circ e_y$ est mesurable,

$$\int_B F(f)\ dm(f) = 1/2 \int_{-1}^{1} F(e_y)\ dy\ , \qquad \forall\ F \in \mathcal{C}(B)\ .$$

m est positive de masse 1 , portée par $\mathcal{E}(B)$, donc maximale. Son barycentre est f_0 , car, si on prend $F = \varphi_\nu$, on a

$$\int_B \varphi_\nu(f)\ dm(f) = 1/2 \int_{-1}^{1} dy \int_X e_y(x)\ d\nu(x)\ .$$

La définition montre immédiatement que $e_y = 1_{f_0 > y} - 1_{f_0 \leqslant y}$, sauf sur un ensemble rare, donc ν négligeable. On en tire

$$\int_B \varphi_\nu(f)\ dm(f) = 1/2 \int_{-1}^{1} dy \int_X (1_{f_0 > y}(x) - 1_{f_0 \leqslant y}(x))\ d\nu(x)\ .$$

Or l'application $(x\ ,\ y) \longmapsto 1_{f_0 > y}(x) - 1_{f_0 \leqslant y}(x)$ est mesurable pour $d\nu \otimes dy$, donc on peut appliquer Fubini, ce qui donne

$$\int_B \varphi_\nu(f)\ dm(f) = 1/2 \int_X d\nu(x)\ \left(\int_{f_0(x) > y} dy - \int_{f_0(x) \leqslant y} dy\right)$$

$$= 1/2 \int_X 2f_0(x)\ d\nu(x) = \varphi_\nu(f_0)\ .$$

Il reste à montrer la densité de $\mathcal{A}(B)$ dans $L^p(m)$. D'après le lemme 15, il suffit de se donner a dans le support d'une mesure normale ν sur X , et de montrer que la fonction $1_{(-1, f_0(a)(}$ est limite dans $L^p(dy)$ d'une suite de fonctions de la forme $g_n(y) = \varphi_{\nu_n}(e_y) + \lambda_n$. On définit une fonction sur X par

$$h_n(x) = \tfrac{1}{2}\, 1_{|f_0 - f_0(a)| < 1/n} / (\nu(\{|f_0 - f_0(a)| < 1/n\}))\ .$$

Le dénominateur est $\neq 0$, car c'est la mesure d'un voisinage de a . On vérifie aisément que $\nu_n = h_n . \nu$ est une mesure normale, et que

$$(y < f_0(a) - (1/n)) \implies (\varphi_{\nu_n}(e_y) = -(1/2))\ ,$$

$$(y > f_0(a) + (1/n)) \Longrightarrow (\varphi_{\nu_n}(e_y) = (1/2)) \ ,$$

$$|y - f_0(a)| \leqslant (1/n) \Longrightarrow |\varphi_{\nu_n}(e_y)| \leqslant (1/2) \ .$$

On pose alors

$$\lambda_n = 1/2 \qquad \text{et} \qquad g_n(y) = -\varphi_{\nu_n}(e_y) + \lambda_n \ .$$

g_n est une suite bornée qui tend presque partout vers $1_{(-1,f_0(a))}$, donc aussi dans $L^p(dy)$. Le théorème est donc démontré.

COROLLAIRE 16. - Soit μ une mesure positive telle que $L^\infty(\mu) = (L^1(\mu))'$. Le problème $[\mathcal{P}]$ est positivement résolu pour la boule unité de L^∞.

En effet, X est la boule unité du dual de $L^1(\mu)$ qui est un L-espace.

COROLLAIRE 17. - Soit I un ensemble d'indices ; $X = [-1, 1]^I$, muni de la topologie produit, est un convexe compact pour lequel le problème $[\mathcal{P}]$ est positivement résolu.

On munit I de la topologie discrète, et on définit μ pour $\mu\{i\} = 1$ pour tout $i \in I$. X est en bijection avec la boule unité de $L^\infty(\mu)$, et la topologie produit est moins fine que la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$; comme elle est séparée, elles sont identiques, et le théorème s'applique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KELLEY (J. L.) and NAMIOKA (I.). - Linear topological spaces. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1963 (University Series in higher Mathematics).

[2] PHELPS (Robert R.). - Lectures on Choquet's theorem. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

[3] ROGALSKI (Marc). - Espaces de Banach ordonnés, simplexes, frontières de Šilov et problème de Dirichlet, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 5e année, 1965/66, n° 12, 62 p.

(Texte reçu le 26 juin 1971)

Michèle CAPON
E. N. S. J. F.
48 boulevard Jourdan
75 - PARIS 14