Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Stephen Simons

Critères de faible compacité en termes du théorème du minimax

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° 24, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A7_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 24, 5 p.

10 juin 1971

CRITÈRES DE FAIBLE COMPACITÉ EN TERMES DU THÉORÈME DU MINIMAX

par Stephen SIMONS

Introduction. - Dans le lemme 2 et le théorème 4 de cet exposé, nous donnerons une démonstration simple du théorème du minimax de FAN et KÖNIG. On peut déduire facilement de ce résultat que, si X est une partie non vide, $\sigma(E , E')$-compacte, et convexe d'un e. l. c. réel séparé E , alors :

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Pour toute partie non vide, convexe et équicontinue } Y \text{ de } E' , \\ \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} \langle x , y\rangle \leqslant \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \langle x , y\rangle \ . \end{cases}$$

Dans le théorème 6, nous démontrerons un résultat réciproque : Si X est une partie non vide, bornée, convexe, et complète de E , et si la condition (1) est satisfaite, alors X est $\sigma(E , E')$-compacte.

Il est démontré dans [3] (theorem 14, (16) ==> (17)) que, si X est une partie non vide, bornée et convexe de E , telle que pour tout élément φ de E' il existe un élément x de X avec $\langle x , \varphi\rangle = \sup\langle X , \varphi\rangle$, alors la condition (1) est satisfaite. On obtient donc une nouvelle démonstration du théorème de James.

Nous n'utiliserons pas l'axiome du choix avant la deuxième partie de la démonstration du théorème 6.

1. Notation. - Si X est un ensemble non vide, et f une fonction réelle sur X , posons $S_X(f) = \sup f(X)$.

2. LEMME. - Soient X un ensemble non vide, et $a_1 , \ldots , a_m$ des fonctions réelles sur X telles que, si x_1 et x_2 appartiennent à X , il existe un élément x de X tel que, pour tout $i = 1 , \ldots , m$, $a_i(x) \leqslant (1/2)[a_i(x_1) + a_i(x_2)]$.

Dans ce cas, on peut trouver des nombres réels $\lambda_1 , \ldots , \lambda_m \geqslant 0$, tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$, et

$$S_X(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m) = S_X(a_1 \wedge \ldots \wedge a_m) \ .$$

Démonstration. - Puisqu'il n'y a rien à démontrer si $S_X(a_1 \wedge \ldots \wedge a_m) = \infty$, nous supposons que $S_X(a_1 \wedge \ldots \wedge a_m) < \infty$. Si f est un élément de R^m , posons

$$\alpha(f) = S_X((a_1 - f(1)) \wedge \ldots \wedge (a_m - f(m))) \ ,$$

et

$$\beta(f) = \inf_{\lambda>0} \lambda[\alpha(0) - \alpha(f/\lambda)] \quad .$$

Alors α est une fonction concave sur R^m , et, pour tout élément f de R^m ,

$$\alpha(f) + \bigwedge_{i=1}^{m} f(i) \leqslant \alpha(0) \leqslant \alpha(f) + \bigvee_{i=1}^{m} f(i) \quad .$$

Nous en déduisons que β est une forme sous-linéaire sur R^m , telle que, pour tout élément f de R^m ,

$$\beta(f) \leqslant \bigvee_{i=1}^{m} f(i) \quad , \tag{2}$$

et

$$\beta(f) \leqslant \alpha(0) - \alpha(f) \quad . \tag{3}$$

Il résulte du théorème de Hahn-Banach qu'il existe des nombres réels $\lambda_1 , \ldots , \lambda_m$ tels que, pour tout élément f de R^m ,

$$\lambda_1 f(1) + \ldots + \lambda_m f(m) \leqslant \beta(f) \quad . \tag{4}$$

Nous déduisons des inégalités (2) et (4) que $\lambda_1 , \ldots , \lambda_m \geqslant 0$ et $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$. De plus,

$$S_X(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m) = \sup_{y\in X} \lambda_1 a_1(y) + \ldots + \lambda_m a_m(y) \quad .$$

D'après les inégalités (4), (3), et la définition de α , il résulte de cela que

$$S_X(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m)$$

$$\leqslant \alpha(0) - \inf_{y\in X} \sup_{x\in X} [(a_1(x) - a_1(y)) \wedge \ldots \wedge (a_m(x) - a_m(y))] \quad ,$$

d'où

$$S_X(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m) \leqslant \alpha(0) = S_X(a_1 \wedge \ldots \wedge a_m) \quad .$$

Comme l'inégalité $\geqslant$ est trivialement satisfaite, le lemme est démontré.

3. COROLLAIRE. - <u>Soient</u> X <u>un ensemble convexe non vide dans un espace vectoriel réel, et</u> $a_1 , \ldots , a_m$ <u>des fonctions réelles concaves sur</u> X . <u>Il existe alors des nombres réels</u> $\lambda_1 , \ldots , \lambda_m \geqslant 0$ <u>tels que</u> $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ <u>et</u>

$$S_X(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m) = S_X(a_1 \wedge \ldots \wedge a_m) \quad .$$

4. THÉORÈME (Voir [1] et [2]). - <u>Soient</u> X <u>un espace non vide compact,</u> Y <u>un ensemble non vide, et</u> f <u>une fonction réelle sur</u> $X \times Y$, <u>tels que, pour tout élément</u> y <u>de</u> Y , $f(. , y)$ <u>soit semi-continue supérieurement sur</u> X .

(5) $\begin{cases}\underline{\text{Si}}\ y_1\ \underline{\text{et}}\ y_2\ \underline{\text{appartiennent à}}\ Y\text{, }\underline{\text{il existe un élément}}\ y\ \underline{\text{de}}\ Y\ \underline{\text{tel que,}}\\ \underline{\text{pour tout élément}}\ x\ \underline{\text{de}}\ X\text{, } f(x , y) \leqslant (1/2)[f(x , y_1) + f(x , y_2)] ;\end{cases}$

<u>et</u>

(6) $\begin{cases}\underline{\text{Si}}\ x_1\ \underline{\text{et}}\ x_2\ \underline{\text{appartiennent à}}\ X\text{, }\underline{\text{il existe un élément}}\ x\ \underline{\text{de}}\ X\ \underline{\text{tel que,}}\\ \underline{\text{pour tout élément}}\ y\ \underline{\text{de}}\ Y\text{, } f(x , y) \geqslant (1/2)[f(x_1 , y) + f(x_2 , y)] .\end{cases}$

<u>Alors</u> $\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x , y) \geqslant \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x , y)$.

<u>Démonstration</u>. - Soient $-\infty < t < u < \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x , y)$. Nous déduisons de l'hypothèse (5), par récurrence, que, si $y_1 , \dots , y_m$ appartiennent à Y , et si $\lambda_1 , \dots , \lambda_m$ sont des nombres dyadiques $\geqslant 0$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$, il existe un élément y de Y tel que, pour tout élément x de X ,

$$f(x , y) \leqslant \textstyle\sum_i \lambda_i f(x , y_i) \quad .$$

Comme $\sup_{x\in X} f(x , y) > u$, il existe un élément x de X tel que

$$\textstyle\sum_i \lambda_i f(x , y_i) > u \quad .$$

Nous avons ainsi démontré que $S_X(\sum_i \lambda_i f(. , y_i)) \geqslant u$. Ce résultat reste vrai par continuité, même si $\lambda_1 , \dots , \lambda_m$ ne sont pas nécessairement dyadiques. Nous déduisons du lemme 2 que $S_X(f(. , y_1) \wedge \dots \wedge f(. , y_m)) \geqslant u$, d'où

$$\cap_{i=1}^{n} \{x ;\ x \in X ,\ f(x , y_i) \geqslant t\} \neq \emptyset \quad .$$

Or il résulte de la compacité de X et de la semi-continuité des $f(. , \varphi_i)$ que

$$\cap_{y\in Y} \{x ;\ x \in X ,\ f(x , y) \geqslant t\} \neq \emptyset \quad ,$$

d'où $\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x , y) \geqslant t$. Nous arrivons à la conclusion du théorème en laissant tendre t , u vers "inf sup".

5. <u>Remarque</u>. - Le lemme 2 est en fait un cas particulier du théorème 4.

6. THÉORÈME. - <u>Soit</u> X <u>une partie non vide, bornée et convexe d'un e. l. c. séparé réel. Si la condition</u> (1) <u>est satisfaite, alors</u> :

(7) $\begin{cases}\underline{\text{Pour toute partie non vide, convexe et équicontinue}}\ Y\ \underline{\text{de}}\ E'\text{ , }\underline{\text{et pour tout}}\\ \underline{\text{élément}}\ d\ \underline{\text{de}}\ \overline{\langle X , . \rangle}\text{ , } \inf_{x\in X} S_Y(d - \langle x , .\rangle) \leqslant 0 ,\end{cases}$

(<u>où</u> $\overline{\langle X , . \rangle}$ <u>représente l'adhérence de</u> $\{\langle x , . \rangle ;\ x \in X\}$ <u>dans</u> $R^{E'}$). <u>Si, de plus,</u> X <u>est complète, alors</u> X <u>est</u> $\sigma(E , E')$-<u>compacte</u>.

<u>Démonstration</u>. - On suppose que Y et d satisfont aux hypothèses de la condition (7), et $\varepsilon > 0$. Comme d est une fonction bornée et affine sur Y , on peut

écrire $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$, où, pour tout $i = 1 , \dots , m$, Y_i est une partie non vide et convexe de E' , et $\operatorname{osc} d(Y_i) \leqslant \varepsilon$. On déduit de la condition (1) (avec Y remplacée par Y_i) qu'il existe un élément x_i de X tel que

$$\inf_{y \in Y_i} \langle x_i , y \rangle \geqslant \inf_{y \in Y_i} \sup_{x \in X} \langle x , y \rangle - \varepsilon \quad .$$

Puisque d appartient à $\overline{\langle X , . \rangle}$, et $\operatorname{osc} d(Y_i) \leqslant \varepsilon$, on en conclut que

$$\inf_{y \in Y_i} \langle x_i , y \rangle \geqslant \inf_{y \in Y_i} d(y) - \varepsilon \geqslant \sup_{y \in Y_i} d(y) - 2\varepsilon \quad ,$$

d'où

(8) $$S_{Y_i}(d - \langle x_i , . \rangle) \leqslant \sup_{y \in Y_i} d(y) - \inf_{y \in Y_i} \langle x_i , y \rangle \leqslant 2\varepsilon \quad .$$

D'après le corollaire 3, appliqué aux fonctions $d - \langle x_1 , . \rangle , \dots , d - \langle x_m , . \rangle$ sur Y , il existe un élément x de X tel que

$$S_Y(d - \langle x , . \rangle) = S_Y((d - \langle x_1 , . \rangle) \wedge \dots \wedge (d - \langle x_m , . \rangle))$$
$$\leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant m} S_{Y_i}(d - \langle x_i , . \rangle) \quad .$$

On déduit donc de l'inégalité (8) que

$$S_Y(d - \langle x , . \rangle) \leqslant 2\varepsilon \quad .$$

Nous avons démontré que la condition (7) est satisfaite.

Supposons maintenant X complète, et représentons par $\mathcal{U}$ l'ensemble filtrant des voisinages fermés, convexes et cerclés de l'origine dans E . Soit d un élément de $\overline{\langle X , . \rangle}$. Si U appartient à $\mathcal{U}$, nous appliquons la condition (7) avec $Y = U^0$. Il existe donc un élément $\psi(U)$ de X tel que

$$S_{U^0}(|d - \langle \psi(U) , . \rangle|) \leqslant 1/2 \quad .$$

(Le $|.|$ est permis, parce que U^0 est symétrique, et $d - \langle \psi(U) , . \rangle$ linéaire.) Si U , V et W appartiennent à $\mathcal{U}$, et $V , W \subset U$, alors $\psi(U) - \psi(W) \in U^{00} = U$, d'après le théorème des bipolaires. Puisque X est complète, il existe alors un élément x de X tel que $\psi \to x$. Soit y un élément de E' . Si U appartient à $\mathcal{U}$, et si U^0 contient y , alors $|d(y) - \langle \psi(U) , y \rangle| \leqslant 1/2$; donc, passant à la limite, $|d(y) - \langle x , y \rangle| \leqslant 1/2$. Par homogénéité, $d = \langle x , . \rangle \in R^{E'}$.

Nous avons démontré que $\langle X , . \rangle$ est fermé dans $R^{E'}$, donc, d'après le théorème de Tychonoff, X est $\sigma(E , E')$-compacte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FAN (Ky). - Minimax theorems, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 39, 1953, p. 42-47.

[2] KÖNIG (H.). - Über das von Neumannsche Minimax-Theorem, Arch. der Math., t. 19, 1968, p. 482-487.

[3] SIMONS (S.). - Maximinimax, minimax, and antiminimax theorems and a result of R. C. James (à paraître).

(Texte reçu le 23 juin 1971)

Stephen SIMONS
University of California
SANTA BARBARA, Calif. 93106
(Etats-Unis)