Stephen Simons

Formes sous-linéaires minimales

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, nº 2 (1970-1971), exp. nº 23, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A6_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 23, 8 p.

3 juin 1971

FORMES SOUS-LINÉAIRES MINIMALES

par Stephen SIMONS

1. Introduction

Dans cet exposé, nous nous proposons de montrer comment la technique des formes sous-linéaires minimales peut être appliquée aussi bien à la démonstration du théorème de Hahn-Banach qu'à celle du théorème de Choquet.

Dans la première section, nous démontrons quatre versions du théorème de Hahn-Banach. Dans la deuxième section, nous démontrons des résultats analogues, mais avec des conditions de mesurabilité. Dans la troisième section, nous traitons des théorèmes d'existence et d'unicité des mesures, sur un ensemble convexe compact, portées par l'ensemble des points extrémaux.

Pour des raisons d'ordre pédagogique, nous avons limité notre étude à des situations assez concrètes. Et nous renvoyons notre lecteur à [4], au cas où il désirerait en trouver une discussion plus complète, mais aussi plus abstraite.

Je tiens à exprimer ici toute ma gratitude à H. FAKHOURY qui a bien voulu m'aider à la rédaction en français de cet exposé.

2. Quatre versions du théorème de Hahn-Banach

1. Notation. - Soit E un espace vectoriel réel. Posons

$$E^V = \{S \ ; \ S \in R^E \ , \ S \text{ est sous-linéaire sur } E\} \ ,$$

$$E^* = \{L \ ; \ L \in R^E \ , \ L \text{ est linéaire sur } E\} \ ,$$

et représentons par $<$ le préordre défini sur R^E par $S < T$ si, et seulement si, $S(f) \leqslant T(f)$ pour tout élément f de E.

2. LEMME. - *Soient S un élément de E^V, et h un élément de E. Si f appartient à E, posons*

$$S_h(f) = \inf\{S(f - \lambda h) - S(- \lambda h) \ ; \ \lambda \geqslant 0\} \ . \tag{1}$$

Alors S_h appartient à E^V, $S_h < S$, et $S_h(h) \leqslant - S(- h)$.

Démonstration. - Si f est un élément de E, et $\lambda \geqslant 0$, alors

$$S(f - \lambda h) - S(- \lambda h) \geqslant - S(- f) \quad ,$$

et il en résulte que S_h appartient à R^E. On peut alors vérifier facilement qu'en fait S_h appartient à E^V. En faisant $\lambda = 0$ dans le deuxième membre de (1), on déduit que $S_h < S$. De même, pour $\lambda = 1$, on déduit que $S_h(h) \leqslant - S(- h)$.

3. LEMME. - Soit $\mathcal{C}$ une chaîne dans E^V. Si f appartient à E, posons

$$M(f) = \inf\{T(f) \; ; \; T \in \mathcal{C}\} \quad .$$

Alors M appartient à E^V.

Démonstration. - Soit S un élément fixe de $\mathcal{C}$. Si T appartient à $\mathcal{C}$, et $T > S$, alors, pour tout élément f de E, $T(f) \geqslant S(f)$. Si T appartient à $\mathcal{C}$, et $T < S$, alors, pour tout élément f de E, $T(f) \geqslant - T(- f) \geqslant - S(- f)$. Il en résulte que M appartient à R^E. On peut alors vérifier facilement qu'en fait M appartient à E^V.

4. THÉORÈME (Premier théorème de Hahn-Banach). - Si S appartient à E^V, il existe un élément L de E^* tel que $L < S$.

Démonstration. - Il résulte du lemme 3 et du lemme de Zorn qu'il existe un élément $(<)$-minimal L de E^V tel que $L < S$.

Soit h un élément de E. Il résulte du lemme 2, et de la minimalité de L, que $L < L_h$, d'où $L(h) \leqslant L_h(h) \leqslant - L(- h)$. Comme L appartient à E^V, $L(h) \geqslant - L(- h)$. Nous avons donc démontré que $L(- h) = - L(h)$ pour tout élément h de E, et il en résulte que $L \in E^*$.

5. THÉORÈME (Deuxième théorème de Hahn-Banach). - Si S appartient à E^V, et h est un élément de E, il existe un élément L de E^* tel que $L < S$ et $L(h) = S(h)$.

Démonstration. - On applique le résultat du théorème 4 à l'élément S_{-h} de E^V.

6. LEMME. - Soient S un élément de E^V, F un sous-espace de E, et φ un élément de F^*, tels que φ soit dominé par S sur F. Si f appartient à E, posons

$$S'(f) = \inf\{S(f + g) - \varphi(g) \; ; \; g \in F\} \quad .$$

Alors S' appartient à E^V, $S' < S$, et $S'|F = \varphi$.

Démonstration. - Nous ne donnerons pas les détails, qui sont semblables à ceux de la démonstration du lemme 2.

7. THÉORÈME (Troisième théorème de Hahn-Banach). - *Si* S *est un élément de* E^V, F *un sous-espace de* E, *et* φ *un élément de* F^*, *tels que* φ *soit dominé par* S *sur* F, *il existe un élément* L *de* E^* *tel que* $L < S$ *et* $L|F = \varphi$.

Démonstration. - On applique le résultat du théorème 4 à l'élément S' de E^V, défini dans le lemme 6.

8. LEMME. - *Soient* S *un élément de* E^V, *et* D *un sous-ensemble non vide et convexe de* E, *tels que* $\inf S(D) > -\infty$. *Si* f *appartient à* E, *posons*

$$S'(f) = \inf\{S(f + \lambda g) - \lambda \inf S(D) \; ; \; g \in D \, , \; \lambda \geqslant 0\} \; .$$

Alors S' *appartient à* E^V, $S' < S$, *et* $\sup S'(-D) \leqslant -\sup S(D)$.

Démonstration. - Nous ne donnerons pas les détails, qui sont semblables à ceux de la démonstration du lemme 2.

9. THÉORÈME (Quatrième théorème de Hahn-Banach). - *Si* S *est un élément de* E^V, *et* D *est un sous-ensemble non vide et convexe de* E, *alors il existe un élément* L *de* E^* *tel que* $L < S$ *et* $\inf L(D) = \inf S(D)$.

Démonstration. - Si $\inf S(D) = -\infty$, on applique le résultat du théorème 4. Si $\inf S(D) > -\infty$, on applique le résultat du théorème 4 à l'élément S' de E^V, défini dans le lemme 8.

10. *Remarque.* - On traite de l'histoire du théorème 9 dans [4], remark 29. Voir aussi [1] et [2].

3. Le théorème de Hahn-Banach avec des conditions de mesurabilité

11. *Notation.* - Dans cette section, $\mathfrak{A}$ représentera un σ-anneau de parties de E invariant par translations, et S sera un élément $(\mathfrak{A})$-mesurable de E^V. De plus, on supposera que la topologie définie sur E par la semi-norme

$$P : f \longmapsto S(f) + S(-f)$$

est séparable.

12. LEMME.

(a) *Si* h *appartient à* E, *alors l'élément* S_h *de* E^V, *défini dans le lemme 2.*

est $\mathfrak{A}$-mesurable.

(b) Si F et φ répondent aux mêmes conditions que dans le lemme 6, alors l'élément S' de E^{V}, défini dans le lemme 6, est $\mathfrak{A}$-mesurable.

13. THÉORÈME.

(a) Il existe un élément $(\mathfrak{A})$-mesurable L de E^* tel que $L < S$.

(b) Si h appartient à E, il existe un élément $(\mathfrak{A})$-mesurable L de E^* tel que $L < S$ et $L(h) = S(h)$.

(c) Si F et φ répondent aux mêmes conditions que dans le théorème 7, il existe un élément $(\mathfrak{A})$-mesurable L de E^* tel que $L < S$ et $L|F = \varphi$.

Démonstration.

(a) Soit $h_1, h_2, \dots$, une suite dense dans (E, P). Si f appartient à F, posons

$$L(f) = \inf_{n\geqslant 1} S_{h_1,\dots,h_n}(f) \quad .$$

Il résulte du lemme 2 et du lemme 3 que $L \in E^{V}$. De plus, pour tout $n \geqslant 1$,

$$L(h_n) \leqslant S_{h_1,\dots,h_n}(h_n) \leqslant - S_{h_1,\dots,h_{n-1}}(- h_n) \leqslant - L(- h_n) \quad ,$$

d'où $L(h_n) + L(- h_n) \leqslant 0$. Si f appartient à E, et $n \geqslant 1$, alors

$$L(f) + L(- f) \leqslant L(f - h_n) + L(h_n) + L(- f + h_n) + L(- h_n) \leqslant P(f - h_n) \quad .$$

Mais, comme $\{h_n ; n \geqslant 1\}$ est dense dans (E, P), on en déduit que

$$L(f) + L(- f) \leqslant 0 \quad .$$

Il en résulte que $L \in E^*$. Il résulte évidemment du lemme 12 (a) que L est $(\mathfrak{A})$-mesurable.

(b) On raisonne comme dans le théorème 5, compte-tenu du lemme 12 (a).

(c) On raisonne comme dans le théorème 7, compte-tenu du lemme 12 (b).

14. Remarque. - Si la topologie définie sur E par la semi-norme

$$f \to S(f) \vee S(- f)$$

est séparable, on peut démontrer un résultat analogue à celui du théorème 9, mais dans lequel L est un élément $(\mathfrak{A})$-mesurable de E^*.

4. Existence et unicité de mesures maximales

15. Notation. - Soit E l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues sur un espace compact X, et $\leqslant$ l'ordre usuel sur E. Soit D un cône dans E tel que, pour tout élément f de E, il existe un élément d de D vérifiant $d \geqslant f$ (D est le cône des "fonctions dominatrices").

Posons

$$\mathcal{P} = \{P \ ; \ P \in E^V , \text{ pour tout } f \in E , \ P(f) = \inf\{P(d) \ ; \ d \in D , \ d \geqslant f\}\} .$$

Soit P un élément de $\mathcal{P}$. Si f appartient à E, et $f \leqslant 0$, alors $P(f) \leqslant P(0) = 0$; il en résulte que P est une application croissante de E dans R.

Posons

$$\mathfrak{M} = \{M \ ; \ M \text{ est un élément } (<)\text{-minimal de } \mathcal{P}\} .$$

16. LEMME. - Si P appartient à $\mathcal{P}$, et si h appartient à D, alors P_h appartient à $\mathcal{P}$, $P_h < P$, et $P_h(h) \leqslant - P(- h)$.

Démonstration. - Soit f un élément de E. Si $\lambda \geqslant 0$, et si d est un élément de D avec $d \geqslant f$, on a $f - \lambda h \leqslant d - \lambda h$, d'où

$$P_h(f) \leqslant P(f - \lambda h) - P(- \lambda h) \leqslant P(d - \lambda h) - P(- \lambda h) .$$

En prenant l'inf pour tout $\lambda \geqslant 0$, on en déduit que $P_h(f) \leqslant P_h(d)$. D'autre part, si $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $P(f - \lambda h) - P(- \lambda h) \leqslant P_h(f) + (\varepsilon/2)$. Puisque P appartient à $\mathcal{P}$, il existe un élément e de D tel que $e \geqslant f - \lambda h$ et $P(e) \leqslant P(f - \lambda h) + (\varepsilon/2)$. Posons $d = e + \lambda h$. Alors d appartient à D, $d \geqslant f$, et

$$P(d - \lambda h) - P(- \lambda h) = P(e) - P(- \lambda h) \leqslant P(f - \lambda h) - P(- \lambda h) + (\varepsilon/2) \leqslant P_h(f) + \varepsilon .$$

Nous avons démontré que, pour tout élément f de E,

$$P_h(f) = \inf\{P_h(d) \ ; \ d \in D , \ d \geqslant f\} .$$

Nous complétons la démonstration en utilisant le lemme 2.

17. LEMME. - Si $\mathcal{C}$ est une chaîne dans $\mathcal{P}$, et si M est défini comme dans le lemme 3, alors M appartient à $\mathcal{P}$.

Démonstration. - On applique le lemme 3 et une permutation simple d'infs.

18. THÉORÈME. - Si P est un élément de $\mathcal{P}$, il existe un élément M de $\mathcal{M}$ tel que $M < \mathcal{P}$.

Démonstration. - On applique le lemme 17 et le lemme de Zorn.

19. THÉORÈME. - Soit M un élément de $\mathcal{P}$. Alors M appartient à $\mathcal{M}$, si, et seulement si, M est linéaire sur $D - D$.

Démonstration.

"Appartenance" entraîne "linéarité" : Soit h un élément de D. On utilise le même raisonnement que dans le théorème 4, mais en remplaçant le lemme 2 par le lemme 16, et on en déduit que $M(-h) = -M(h)$. Il en résulte que M est linéaire sur $D - D$.

"Linéarité" entraîne "appartenance" : Soit N un élément de $\mathcal{P}$ tel que $N < M$. Puisque tout élément de $(D - D)^*$ est minimal dans $(D - D)^V$, il résulte de notre hypothèse que $N|D - D = M|D - D$, d'où $N|D = M|D$. Or, d'après la définition de $\mathcal{P}$, $N = M$. Nous avons donc démontré que $M \in \mathcal{M}$.

20. THÉORÈME. - Soit P un élément de $\mathcal{P}$. Alors il existe un seul élément M de $\mathcal{M}$ tel que $M < P$, si, et seulement si, P est linéaire sur $-D$.

Démonstration.

"Unicité" entraîne "linéarité" : Soit h un élément de D. Il résulte du lemme 16 et du théorème 18 qu'il existe un élément $M' \in \mathcal{M}$ tel que $M' < P_h$. Puisque $P_h < P$, alors, d'après notre hypothèse, $M' = M$. En particulier,

$$M(h) = M'(h) \leqslant P_h(h) \leqslant -P(-h) \leqslant -M(-h) \leqslant M(h) .$$

Nous avons démontré que $P(-h) = -M(h)$ pour tout élément h de D. Il résulte donc du théorème 19 que P est linéaire sur $-D$.

"Linéarité" entraîne "unicité" : Soit M un élément de $\mathcal{M}$ tel que $M < P$. Si f appartient à $-D$, d appartient à D, et $d \geqslant f$, alors

$$P(f) = M(d) + M(-d) + P(f) \leqslant M(d) + P(-d) + P(f) ,$$

donc, d'après notre hypothèse,

$$P(f) \leqslant M(d) + P(f - d) \leqslant M(d) .$$

Puisque $M \in \mathcal{M} \subset \mathcal{P}$, il en résulte que $P(f) \leqslant M(f)$. Comme $M < P$, nous avons, en fait, démontré que $M|-D = P|-D$. Il résulte du théorème 19 et de la définition de $\mathcal{P}$ que, pour tout $f \in E$,

$$M(f) = \inf\{-P(-d) ;\ d \in D ,\ d \geqslant f\} .$$

Nous avons ainsi démontré l'unicité de M .

21. Remarque. - Le lecteur peut trouver quatre autres conditions équivalentes à celles du théorème 20 dans [4], theorem 19.

22. Notations. - Par mesure de simplicité, nous passons maintenant au cas particulier le plus important, bien que toute notre analyse soit appliquable à la recherche des résultats obtenus par MEYER dans la théorie du potentiel dans [3], chapter XV. Pour une démonstration complète avec discussion, voir [4], section 7. Pour le reste de cet exposé, X sera une partie compacte convexe d'un e. l. c. réel, et D sera l'ensemble des fonctions réelles continues concaves sur X . Nous représentons par $\operatorname{ex} X$ l'ensemble des points extrémaux de X . Si x appartient à X , et f appartient à E , posons $P_x(f) = \inf\{d(x) \; ; \; d \in D \, , \; d \geqslant f\}$. Alors P_x appartient à $\mathcal{P}$, et $P < \|.\|$.

23. THÉORÈME (Théorème de Choquet). - Soit x un élément de X .

(a) Il existe un élément L de $\mathfrak{M}$ tel que $L < P_x$.

(b) L est une forme linéaire positive sur E telle que $L(1) = 1$, et x est le barycentre de L .

(c) La mesure définie par L est nulle sur tout compact $\mathcal{G}_\delta$ qui ne rencontre pas $\operatorname{ext}(X)$.

Démonstration.

(a) est une conséquence immédiate du théorème 18.

(b) Comme $L < \|.\|$, il résulte du théorème 19 et du théorème de Stone-Weierstrass que L appartient à E^* . On complète la démonstration de (b) en remarquant que, pour tout élément d de D , $L(d) \leqslant [P_x(d) =] \; d(x)$.

(c) Il suffit d'établir la proposition suivante : Si f_1 , f_2 , ... est une suite dans E , $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots$, et, pour tout élément z de $\operatorname{ext}(X)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(z) \geqslant 0$, alors $\lim_{n\to\infty} L(f_n) \geqslant 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un élément d_1 de D tel que $d_1 \geqslant f_1$ et $L(d_1) \leqslant L(f_1) + (\varepsilon/2)$. Pour tout $n \geqslant 2$, il existe (par récurrence) un élément d_n de D tel que $d_n \geqslant d_n - f_{n-1} + f_n$ et

$$L(d_n) \leqslant L(d_{n-1} - f_{n-1} + f_n) + (\varepsilon/2^n) \quad .$$

Il en résulte que, pour tout $n \geqslant 1$, $d_{n+1} \geqslant d_n$, $d_n \geqslant f_n$, et

$$L(d_n) - L(f_n) \leqslant \varepsilon((1/2) + \dots + (1/2^n)) < \varepsilon \quad .$$

La fonction $\lim_{n\to\infty} d_n$ est concave et semi-continue inférieurement sur X, et, pour tout élément z de $\mathrm{ext}(X)$, $\lim_{n\to\infty} d_n(z) \geqslant \lim_{n\to\infty} f_n(z) \geqslant 0$; donc, d'après le théorème de Bauer, pour tout élément y de X, $\lim_{n\to\infty} d_n(y) \geqslant 0$; et, de plus, d'après le théorème de Dini, $\lim_{n\to\infty} \inf d_n(X) \geqslant 0$, d'où $\lim_{n\to\infty} L(d_n) \geqslant 0$. On en déduit donc que $\lim_{n\to\infty} L(f_n) \geqslant -\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous avons démontré qu'en fait $\lim_{n\to\infty} L(f_n) \geqslant 0$.

Nous remarquons que la démonstration ci-dessus n'utilise, ni le théorème de Lebesgue, ni les propriétés laticielles de D.

24. Remarque. - On peut montrer qu'en fait $\{L ; L \in \mathfrak{M}, L < P_x\}$ coïncide avec l'ensemble des "mesures maximales" avec barycentre x ; et, de plus, que $P_x(f) = \hat{f}(x)$. Le théorème 20 nous mène donc à l'équivalence (a) $\Longleftrightarrow$ (b) dans le théorème suivant. Pour une démonstration de l'équivalence (a) $\Longleftrightarrow$ (c) et d'autres résultats, voir [4] (theorem 37 et remark 38).

25. THÉORÈME (Version locale du théorème de Choquet-Meyer). - Soit x un élément de X. Alors les trois conditions (a), (b) et (c) sont équivalentes :

(a) x est le barycentre d'une seule mesure maximale.

(b) Si g et h appartiennent à $-D$, alors $\hat{g}(x) + \hat{h}(x) = \widehat{g+h}(x)$.

(c) Si, pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$, $y_i \in X$, $z_j \in X$, $\sum_i \alpha_i = 1$, $\sum_j \beta_j = 1$, et $\sum_i \alpha_i y_i = x = \sum_j \beta_j z_j$, il existe alors $\gamma_{ij} \geqslant 0$ et $t_{ij} \in X$ tels que, pour tout i, $\sum_j \gamma_{ij} = \alpha_i$ et $\sum_j \gamma_{ij} t_{ij} = \alpha_i y_i$, et, pour tout j, $\sum_i \gamma_{ij} = \beta_j$ et $\sum_i \gamma_{ij} t_{ij} = \beta_j z_j$.

Dans ce cas, la mesure μ est donnée par la formule

$$\mu(f) = \inf\{-(\widehat{-d})(x) ; d \in D, d \geqslant f\} \qquad (f \in E) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] KÖNIG (H.). - Über das von Neumannsche Minimax-Theorem, Arch. der Math., t. 19, 1968, p. 482-487.

[2] KÖNIG (H.). - On certain applications of the Hahn-Banach and minimax theorems, Arch. der Math., t. 21, 1970, p. 583-591.

[3] MEYER (P.-A.). - Theory of probability. - New York, Blaisdell, 1965.

[4] SIMONS (S.). - Minimal sublinear functionals, Studia Math., Warszawa, t. 37, 1970, p. 37-56.

(Texte reçu le 23 juin 1971)

Stephen SIMONS
University of California
SANTA BARBARA, Calif. 93106
(Etats-Unis)