Hicham Fakhoury

Préduaux de L-espaces et éléments extrémaux

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° 20, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 20, 19 p.

6 mai 1971

PRÉDUAUX DE L-ESPACES ET ÉLÉMENTS EXTRÉMAUX

par Hicham FAKHOURY

L'étude des espaces de Banach dont le dual est isométrique à un espace $L^1(\mu)$, relatif à une mesure μ définie sur un espace localement compact Ω , a été entreprise par LINDENSTRAUSS dans le mémoire [6]. Elle a été particulièrement développée dans le cas où la boule unité de l'espace considéré possède un point extrémal. En effet, un tel espace peut être canoniquement ordonné de telle façon qu'il devienne isomorphe à l'espace des fonctions affines continues sur un simplexe compact ; et là, l'étude peut se faire grâce aux propriétés remarquables de cette classe de convexes compacts.

Dans ce travail, nous montrerons que certaines propriétés géométriques "d'extrémalité", connues dans le cas des espaces de fonctions continues sur un compact, sont vérifiées par tous les espaces de Banach dont le dual est un espace $L^1(\mu)$. Des résultats analogues avaient été démontrés par LAZAR, concernant les espaces de fonctions affines sur un simplexe compact [4]. L'outil essentiel qui nous servira est un théorème de sélection, dû à LAZAR et LINDENSTRAUSS [5], et qui peut être considéré comme une adaptation, au cas de la boule unité d'un espace $L^1(\mu)$-dual, du théorème de sélection de MICHAEL [7].

Dans la deuxième partie, nous caractériserons les convexes maximaux de la sphère unité d'un prédual de L-espace, et nous montrerons que la boule unité est l'enveloppe convexe équilibrée de tels convexes maximaux.

Dans la troisième partie, nous étudierons l'espace $A_0(K , E)$ des applications linéaires continues d'un espace $L^1(\mu)$-dual dans un espace de Banach E , et nous caractériserons les points extrémaux de la boule unité du dual de cet espace. De plus, nous montrerons que, si E est un prédual de L-espace, il en est de même pour l'espace $A_0(K , E)$. Nous donnerons une caractérisation des points extrémaux de la boule unité de l'espace $A_0(K , E)$, pourvu que l'espace E vérifie certaines hypothèses.

Dans la dernière partie, nous étudierons les opérateurs extrémaux de la boule unité de l'espace des opérateurs linéaires continus entre deux C_σ-espaces, et nous retrouverons un résultat dû à BLUMENTHAL-LINDENSTRAUSS et PHELPS concernant les espaces $\mathcal{C}(X)$ [1].

1. Définitions et notations.

Dans toute la suite, X désignera un espace compact, $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions numériques continues sur X. Soit σ un homéomorphisme involutif de X ($\sigma^2 =$ identité), on note $\mathcal{C}_\sigma(X)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(X)$ formé des fonctions σ-impaires [c'est-à-dire vérifiant $f(x) = - f(\sigma(x))$].

Un espace de Banach V est un C_σ-espace, s'il existe un compact X et une involution σ sur X, tels que V soit isométrique à l'espace $\mathcal{C}_\sigma(X)$. Si V est un espace de Banach, son dual V' sera muni, sauf mention du contraire, de la topologie faible $\sigma(V', V)$. La boule unité fermée de V' est notée $B(V')$, ou simplement K, si aucune confusion n'est possible. On désigne par $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble des points extrémaux de K. Une application simple du théorème de Hahn-Banach montre que l'espace V est canoniquement isométrique à l'espace $A_0(K)$ des fonctions affines continues sur K et nulles à l'origine, muni de la norme de la convergence uniforme sur K. Inversement, si K est un convexe compact symétrique, l'espace $[A_0(K)]'$ est canoniquement isométrique à l'espace engendré par K muni de la norme jauge de K. De plus, K est affinement homéomorphe à la boule unité de $[A_0(K)]'$ muni de la topologie faible $\sigma[[A_0(K)]', A_0(K)]$. Dans la suite, nous confondrons ces deux notions.

Si V est un espace de Banach isométrique à l'espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure μ sur un espace localement compact, nous dirons que V est un <u>L-espace</u>. Si V est un espace de Banach dont le dual V' est un L-espace, nous dirons que V est un <u>prédual de L-espace</u>. La classe des préduaux de L-espaces contient tous les espaces $\mathcal{C}(X)$, où X est un espace compact, et plus généralement tous les C_σ-espaces. Rappelons qu'un prédual de L-espace, dont la boule unité contient un point extrémal, peut être canoniquement ordonné de telle façon qu'il devienne isomorphe (pour l'ordre) et isométrique à l'espace des fonctions affines continues sur un simplexe de Choquet.

Soient V un prédual de L-espace, et $K = B(V')$; un convexe $H \subset K$ est une <u>biface</u>, s'il existe une face F de K telle que $H = c(F \cup - F)$. Les bifaces fermées sont caractérisées en fonction de la norme de V', dans la proposition suivante :

PROPOSITION 0. - <u>Soit K la boule unité d'un L-espace dual ; un sous-convexe fermé $H \subset K$ est une biface fermée, si, et seulement si, les propriétés suivantes sont vérifiées</u> :

(a) H <u>est symétrique, et</u> $p \in H$ <u>implique</u> $(p/\|p\|) \in H$;

(b) <u>Si</u> $p \in H$ <u>et</u> $q \in K$ <u>tel que</u> $\|p\| = \|q\| + \|p - q\|$, <u>alors</u> $q \in H$.

Cette proposition permet d'établir que toute intersection et toute enveloppe convexe finie de bifaces fermées est une biface fermée.

Soient E et F deux ensembles non vides, on note $\mathcal{P}_*(F)$ l'ensemble des parties non vides de F ; une application multivoque de E dans F est une application de E dans $\mathcal{P}_*(F)$. Si E et F sont deux espaces topologiques, une application multivoque T de E dans F est dite semi-continue inférieurement (s. c. i.), si, pour tout ouvert $U \subset F$, l'ensemble $\{x \in E ; T(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est un ouvert de E. Si E et F sont des espaces vectoriels, une application multivoque T de E dans F est dite convexe, si, pour tout $x \in E$, l'ensemble $T(x)$ est un convexe de F, et si, de plus,

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) \subset \lambda T(x) + (1 - \lambda) T(y) ,$$

pour tout $0 < \lambda < 1$ et $x , y \in E$.

Cette application est dite impaire, si elle vérifie $T(x) = - T(- x)$, pour tout $x \in E$.

Une application f de E dans F est dite une sélection de T, si elle vérifie $f(x) \in T(x)$, pour tout $x \in E$.

2. Propriétés géométriques de la boule $B(V)$.

Dans cette partie, V désignera un prédual de L-espace, et K la boule unité $B(V')$ de l'espace V' muni de la topologie faible $\sigma(V', V)$. Le théorème suivant est dû à LAZAR et LINDENSTRAUSS [5].

THEOREME 1. - *Soient V un prédual de L-espace, et F un espace de Fréchet, φ une application multivoque de K dans F, à valeurs dans l'ensemble des convexes fermés de F, telle que, φ soit convexe, impaire et s. c. i. ; alors φ admet une sélection linéaire continue de K dans F.*

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce théorème qui se trouve dans [5], mais nous citerons un lemme qui sert à le démontrer et qui nous servira plus loin dans la proposition 7.

LEMME 2. - *Soient V un prédual de L-espace, et E un espace localement convexe séparé. Si φ est une application multivoque de K dans E, à valeurs dans l'ensemble des convexes de E, qui soit convexe, impaire et s. c. i., alors, pour tout voisinage U de 0 dans E, il existe une application continue h de K dans E, vérifiant $h(k) \in \varphi(k) + U$, pour tout $k \in K$.*

Le théorème 1 permet de démontrer facilement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3. - Soient V un prédual de L-espace, h et $-g$ deux applications réelles concaves s. c. i., telles que $h \geq g$. Si, de plus, f et g vérifient

$$h(k) + h(-k) \geq 0 , \qquad \forall k \in K ,$$

$$g(k) + g(-k) \leq 0 , \qquad \forall k \in K ,$$

alors il existe une forme linéaire f continue sur V', telle que, sur K, on ait $g \leq f \leq k$.

Démonstration. - L'hypothèse sur h et g implique

$$g(k) \vee -h(-k) \leq h(k) \wedge -g(-k) \quad ;$$

par suite, l'application multivoque φ, définie sur K et à valeurs dans l'ensemble des convexes fermés, non vide, de $\underset{\sim}{R}$, par

$$\varphi(k) = [g(k) \vee -h(-k) , h(k) \wedge -(g-k)] ,$$

vérifie les hypothèses du théorème 1. Soit f une sélection associée à φ ; pour tout $k \in K$, on a

$$g(k) \vee -h(-k) \leq f(k) \leq h(k) \wedge -g(-k) .$$

Ce corollaire va nous permettre d'étudier les relations entre les convexes maximaux de la sphère unité de V et les points extrémaux de K. Notons, toutefois, que le corollaire 3 admet une démonstration indépendante du théorème 1 ; d'ailleurs, dans [5], c'est une forme affaiblie de ce corollaire qui sert à établir le théorème 1.

LEMME 4. - Soient E un espace de Banach, et Q un convexe maximal de la sphère unité de E ; il existe $k \in \mathcal{E}[B(E')]$ tel que $Q = \{f \in E ; \|f\| = 1 , f(k) = 1\}$.

Démonstration. - Pour tout $f \in Q$, on pose $F_f = \{k \in B(E') ; f(k) = 1\}$. Cet ensemble est un sous-convexe compact de $B(E')$ qui n'est pas vide, puisque toute fonction $f \in Q$ atteint sa norme sur la boule unité de E' qui est faiblement compacte. De plus, F_f est une face fermée de $B(E')$; si on montre que $F = \bigcap_{f \in Q} F_f$ est non vide, il existe un point extrémal $k \in \mathcal{E}(F) \subset \mathcal{E}[B(E')]$, et on aura l'inclusion

$$Q \subset \{f \in E ; \|f\| = 1 , f(k) = 1\} .$$

Comme Q est maximal, l'inclusion précédente est en fait une égalité. Supposons que l'on a $F = \bigcap_{f \in Q} F_f = \emptyset$; par compacité, il existe une suite finie $f_1 , \dots , f_n$ dans Q telle que $\bigcap_{i=1}^{n} F_{f_i} = \emptyset$. Comme l'ensemble Q est convexe, la fonction $f = \sum_1^n \frac{f_i}{n}$ est dans Q, par suite

$$\|f\| = \|\sum_1^n \frac{f_i}{n}\| = 1 \ , \qquad \text{d'où} \quad \|\sum_1^n f_i\| = n \ .$$

Il existe donc un point $k \in B(E')$ tel que $\sum_1^n f_i(k) = n$, ce qui est une contradiction.

THÉORÈME 5. - Soient V un prédual de L-espace, et Q un ensemble convexe de la sphère unité de V ; pour que Q soit maximal, il faut et il suffit qu'il existe un point $k \in \mathcal{E}(K)$ tel que $Q = \{f \in V \ ; \ \|f\| = 1 \ , \ f(k) = 1\}$.

Démonstration. - D'après le lemme 4, il s'agit de montrer que la condition est suffisante.

Supposons que l'ensemble Q , déterminé par un point $k_0 \in \mathcal{E}(K)$ et par la relation

$$Q = \{f \in V \ ; \ \|f\| = 1 \ , \ f(k_0) = 1\} \ ,$$

ne soit pas maximal. Il existe un convexe Q' de la sphère unité qui contient strictement le convexe Q . Soit $f \in Q' \setminus Q$, et $F_f = \{k \in K \ ; \ f(k) = 1\}$. L'ensemble F_f est une face fermée, et, comme $f \notin Q$, le point k_0 n'est pas dans la biface fermée $H = c(F_f \cup - F_f)$. D'après la remarque suivant la proposition 1, $c(H \cup [- k_0 \ , k_0])$ est une biface fermée, où $[- k_0 \ , k_0]$ est le segment dont les extrémités sont k_0 et $- k_0$. D'après le théorème 1, il existe $f' \in V$ de norme 1 et qui vérifie

$$f'_{|H} = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(k_0) = 1 \ .$$

Comme $f' \in Q \subset Q'$, et comme l'ensemble Q' est convexe, $\frac{f + f'}{2} \in Q'$. Or, par construction de f' , l'inégalité stricte suivante est vérifiée :

$$\|f + f'\| < 2 \ .$$

Ce qui montre que Q' n'est pas dans la sphère unité, d'où la contradiction.

THÉORÈME 6. - Soient V un prédual de L-espace, et Q un convexe maximal de la sphère unité de V ; alors $B(V) = c(Q \cup - Q)$.

Démonstration. - L'inclusion $B(V) \supset c(Q \cup - Q)$ étant acquise, il reste à prouver l'inclusion inverse. D'après le théorème 5, l'ensemble Q est associé à un point extrémal k_0 de $B(V')$ par la relation $Q = \{f \in V \ ; \ \|f\| = 1 \ , \ f(k_0) = 1\}$. Soit $f \in B(V) \setminus (Q \cup - Q)$; par suite, $- 1 < f(k_0) < 1$; nous allons construire $h \in Q$ et $g \in - Q$ tels que

$$(\alpha) \qquad f = \lambda h + (1 - \lambda) g \ .$$

Comme nous devons avoir $h(k_0) = 1$, $g(k_0) = - 1$, il s'ensuit que la valeur de λ

est donnée par $\lambda = \dfrac{f(k_0) + 1}{2}$. Comme $\|g\| = 1$, nous avons, en remplaçant λ par sa valeur dans (α), les inégalités suivantes :

$$(\beta) \qquad f(k_0) - 1 \leqslant 2f(k) - f(k_0 + 1)\, h(k) \leqslant 1 - f(k_0) \quad .$$

Comme, de plus, nous avons $\|h\| = 1$, nous déduisons de (β)

$$(\gamma) \qquad \left[\frac{2f(k) + 1 - f(k_0)}{1 + f(k_0)} \wedge 1\right] \geqslant h(k) \geqslant \left[\frac{2f(k) - 1 + f(k_0)}{f(k_0) + 1} \vee - 1\right] \quad .$$

Soient φ et ψ les deux fonctions numériques, respectivement concave continue et convexe s. c. s., définies sur K par

$$\varphi(k) = \frac{2f(k) + 1 - f(k_0)}{1 + f(k_0)} \wedge 1 \ , \qquad \forall\, k \in K \ ,$$

$$\begin{cases} \psi(k) = \dfrac{2f(k) - 1 + f(k_0)}{1 + f(k_0)} \vee - 1 \ , & \forall\, k \in K \ , \quad k \neq k_0 \ , \\ \psi(k_0) = 1 \ . & \end{cases}$$

On peut, sans diminuer la généralité, supposer que $f(k_0) \geqslant 0$; trois cas sont alors à considérer :

(a) $1 \geqslant f(k) > f(k_0)$;
(b) $- f(k_0) \leqslant f(k) \leqslant f(k_0)$;
(c) $- 1 \leqslant f(k) < f(k_0)$;

et on peut aisément vérifier, dans chacun des cas précédents, que les inégalités

$$\psi(k) + \psi(- k) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(k) + \varphi(- k) \leqslant 0$$

sont vérifiées. D'après le corollaire 3, il existe $h \in V$ vérifiant les inégalités (γ) et tel que $h(k_0) = 1$. D'après (α), la fonction g est donnée par

$$g(k) = \frac{2f(k) - [f(k_0) + 1]\, h(k)}{1 - f(k_0)} \ ,$$

par suite $\|g\| = 1$, et on a $g(k_0) = - 1$, ce qui veut dire $g \in - Q$, et achève la démonstration du théorème.

Le théorème 6 renforce le théorème 4.8 de [6] dans le cas particulier des préduaux de L-espace.

3. Étude de l'espace $A_0(K , E)$.

Soient V un prédual de L-espace, et E un espace vectoriel localement convexe séparé ; on désigne par $A_0(K , E)$ l'espace des fonctions linéaires continues de $K = B(V')$ dans E . L'espace $A_0(K , E)$ sera muni de la topologie de la convergence uniforme sur K . Un système fondamental de voisinages de l'origine pour cette topologie est donné par les ensembles suivants :

$$V_{i,\varepsilon} = \{f \in A_0(K , E) \ ; \ \sup_{k\in K} p_i[f(k)] < \varepsilon\} \quad ,$$

où $\varepsilon > 0$, et p_i parcourt la famille des semi-normes continues sur E .

PROPOSITION 7. - <u>L'espace</u> $F \subset A_0(K , E)$, <u>défini par</u>

$$F = \{f \in A_0(K , E) \ ; \ f = \sum_1^n h_p \ x_p \ , \text{ où } h_p \in V \text{ et } x_p \in E\} \quad ,$$

<u>est dense dans</u> $A_0(K , E)$.

<u>Démonstration</u>. - Soient $f \in A_0(K , E)$, $\varepsilon > 0$, et p_i une semi-norme continue sur E ; il suffit de construire $h_1 , \ldots , h_n$ dans V , et $x_1 , \ldots , x_n$ dans E , tels que, pour tout $k \in K$, on ait

$$p_i(f(k) - \sum_1^n h_p(k) \ x_p) < \varepsilon \quad .$$

Pour tout point $x \in E$, posons G_x la p_i-boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon/2$, c'est-à-dire

$$G_x = \{y \in E \ ; \ p_i(x - y) < \varepsilon/2\} \quad .$$

Comme K est $\sigma(V' , V)$-compact, et f est une fonction continue sur K , il existe $x_1 , \ldots , x_n \in E$ tels que $f(K) \subset \bigcup_1^n G_{x_i}$.

Soit φ l'application multivoque de K dans $\underset{\sim}{R}^n$, à valeurs dans l'ensemble des convexes de $\underset{\sim}{R}^n$, définie par

$$\varphi(k) = \{(\lambda_p) \in \underset{\sim}{R}^n \ ; \ \sum_1^n \lambda_i \ x_i \in G_{f(k)}\} \quad .$$

Il est clair que l'application φ est impaire, et que $\varphi(k) \neq \emptyset$ pour tout point $k \in K$. Il est facile de vérifier qu'elle est convexe. De plus, elle est s. c. i., puisque, pour tout point $k \in K$, le convexe $\varphi(k)$ est ouvert dans $\underset{\sim}{R}^n$, d'après la continuité de l'application linéaire T de $\underset{\sim}{R}^n$ dans E définie par

$$T(\lambda_p) = \sum_1^n \lambda_p x_p \quad .$$

Par le lemme 2, il existe une sélection approchée h de φ. Comme h est linéaire continue de K dans $\underset{\sim}{R}^n$, l'application h peut s'écrire $h = (h_p)_{p=1}^n$, où $h_p \in V$.

Soit U le voisinage de 0 dans $\underset{\sim}{R}^n$, défini par

$$U = \{(\alpha_p) \in \underset{\sim}{R}^n \ ; \ p_i(\sum \alpha_p x_p) < \frac{\varepsilon}{2}\} \ ;$$

comme h est une sélection approchée de φ, elle vérifie

$$h(k) \subset \varphi(k) + U \ ;$$

c'est-à-dire que, pour tout $k \in K$, il existe $(\lambda_p) \in \psi(k)$ tel que

$$(h_p(k) - \lambda_p) \in U \quad .$$

Ceci nous permet d'écrire

$$p_i(f(k) - \sum_1^n h_p(k)\ x_p) \leqslant p_i(\sum_1^n \lambda_p x_p - f(k)) + p_i(h_p(k)\ x_p - \lambda_p x_p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad ,$$

ce qui établit la proposition.

PROPOSITION 8. - <u>Soient</u> V <u>et</u> E <u>deux préduaux de</u> L-<u>espace, où</u> $K = B(V')$; <u>l'espace</u> $A_0(K , E)$ <u>est un prédual de</u> L-<u>espace</u>.

Pour la démonstration de cette proposition, rappelons le résultat suivant dû à LINDENSTRAUSS [6] (théorème 6.1, théorème 4.1) :

LEMME 9.

(a) <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach ; pour que</u> E <u>soit un prédual de</u> L-<u>espace, il faut et il suffit que toute collection</u> $B_1 , \dots , B_4$ <u>de</u> 4 <u>boules fermées, se coupant</u> 2 <u>à</u> 2 , <u>ait une intersection non vide</u>.

(b) <u>Si</u> E <u>est un prédual de</u> L-<u>espace, toute collection finie</u> $B_1 , \dots , B_n$ <u>de boules, se coupant</u> 2 <u>à</u> 2 , <u>a une intersection non vide</u>.

<u>Démonstration de la proposition</u> 8. - Nous allons montrer que l'espace $A_0(K , E)$ vérifie l'hypothèse du lemme 9 (a). Soient $f_1 , \dots , f_4$ quatre fonctions de $A_0(K , E)$, telles que les boules fermées $B(f_i \ ; r_i)$ de centre f_i et de rayon r_i se rencontrent 2 à 2 ; ceci peut s'écrire

$$\|f_i - f_j\| \leqslant r_i + r_j \ , \qquad \forall\ i , j = 1 , \dots , 4 \ .$$

D'après la définition de la norme sur l'espace $A_0(K , E)$, ceci signifie que, pour tout point $k \in K$, on a

$$\|f_i(k) - f_j(k)\| \leqslant r_i + r_j \quad .$$

Donc, dans l'espace E , les boules $B(f_i(k) , r_i)$ se coupent 2 à 2 ; comme E est un prédual de L-espace, d'après le lemme 9 (a), l'ensemble

$$\varphi(k) = \bigcap_{i=1}^{4} B(f_i(k) , r_i) \neq \emptyset \quad .$$

Soit Φ l'application multivoque ainsi définie sur K , à valeurs dans les convexes fermés non vide de E . Il est aisé de vérifier que Φ est impaire et convexe. Soient k un point de K , et x un point de $\psi(k)$; considérons un voisinage de x constitué par la boule ouverte $V(x , \varepsilon)$ de centre x et de rayon ε . Si l'application φ n'est pas s. c. i., il existe un point $k \in K$, un $\varepsilon > 0$, et une famille ultrafiltrée (k_α) dans K , qui converge vers k , et telle que $\varphi(k_\alpha) \cap V(x , \varepsilon) = \emptyset$. Comme chacune des applications φ_i définie par $\varphi_i(k) = B(f_i(k) , r_i)$ est s. c. i., il existe α_0 tel que, pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$, on ait

$$\varphi_i(k_\alpha) \cap V(x , \tfrac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset \quad ,$$

par suite

$$\varphi_i(k_\alpha) \cap B(x , \tfrac{2\varepsilon}{3}) \neq \emptyset \quad .$$

Comme E est un prédual de L-espace, d'après le lemme 9 (b), les cinq boules fermées $[B(f_i(k) , r_i)]_{i=1}^4$ et $B(x , \frac{2}{3}\varepsilon)$, qui se rencontrent 2 à 2 , ont une intersection non vide. Par conséquent, ceci contredit le fait que φ n'est pas s. c. i. D'après le théorème 1, il existe une sélection h continue linéaire de K dans E (c'est-à-dire $h \in A_0(K , E)$), telle que, pour tout point $k \in K$, on ait

$$h(k) \in \varphi(k) = \bigcap_{1}^{4} B(f_i(k) , r_i) \quad ,$$

$$\|h(k) - f_i(k)\| \leqslant r_i \; , \qquad \forall\, k \in K \quad .$$

Ce qui veut dire $\|h - f_i\| \leqslant r_i$, où la norme est prise dans l'espace $A_0(K , E)$; mais ceci n'est autre que

$$h \in \bigcap_{1}^{4} B(f_i , r_i) \quad ;$$

ce qui prouve que $A_0(K , E)$ est un prédual de L-espace.

Remarquons que, dans [4], LAZAR a montré que, si V est un prédual de L-espace dont la boule unité admet un point extrémal, et si E est un espace de Banach tel que toute collection de 3 boules fermées, se rencontrant 2 à 2 , ait une intersection non vide, l'espace $A_0(K , E)$ vérifie la même propriété. La démonstration repose sur une "partition affine de l'unité" dans $K = B(V')$, qui n'est pas vérifiée si $B(V)$ n'a pas de points extrémaux.

DÉFINITION 10. - Soient V un prédual de L-espace, et E un espace de Banach. Pour tout $k \in \mathcal{E}[B(V')]$ et $x^* \in \mathcal{E}[B(E')]$, on définit y^*_{k,x^*} par

$$y^*_{k,x^*}(f) = x^*[f(k)] , \qquad \forall f \in A_0(K , E) .$$

THÉORÈME 11. - Soient V un prédual de L-espace, et E un espace de Banach ; les points extrémaux de la boule unité de l'espace $[A_0(K , E)]'$ sont exactement les fonctionnelles $\{y^*_{k,x^*}\}$, où k parcourt $\mathcal{E}[B(V')]$ et $x^* \in \mathcal{E}[B(E')]$.

Démonstration. - Il est clair que les fonctionnelles y^*_{k,x^*} sont de norme 1 . Supposons que y^*_{k,x^*} n'est pas extrémal ; il existe donc deux formes linéaires $y^*_1 \neq y^*_2$ telles que $y^*_{k,x^*} = \dfrac{y^*_1 + y^*_2}{2}$. Il existe, d'après la proposition 7, une famille $h_1 , \ldots , h_n \in V$ et $x_1 , \ldots , x_n \in E$, telles que

$$(\alpha) \qquad y^*_1(\sum_1^n h_p\, x_p) \neq y^*_{k,x^*}(\sum_1^n h_p\, x_p) .$$

Par suite, il existe un indice $i_0 \in [1 , \ldots , n]$ tel que

$$(\beta) \qquad y^*_1(h_{i_0}\, x_{i_0}) \neq y^*_{k,x^*}(h_{i_0}\, x_{i_0}) .$$

On peut, sans diminuer la généralité, supposer que l'on a $\|h_{i_0}\| = 1$; d'après le théorème 6, il existe h et g dans V de norme 1 , et vérifiant $h(k) = 1$, $g(k) = -1$, telles que $h_{i_0} \in [g , h]$. Par suite, on a

$$(\gamma) \qquad y^*_1(hx_{i_0}) \neq y^*_{k,x^*}(hx_{i_0}) .$$

Soient x^*_1 et $x^*_2 \in B(E')$ définis par

$$x^*_1(x) = y^*_1(hx) , \qquad \forall x \in E ,$$

$$x^*_2(x) = y^*_2(hx) , \qquad \forall x \in E .$$

Par conséquent, pour tout $x \in E$, on a

$$\frac{1}{2}\,(x^*_1 + x^*_2)(x) = y^*_{k,x^*}(hx) = x^*(h(k).x) = x^*(x) .$$

Mais, par hypothèse, nous avons supposé x^* extrémal dans $B(E')$, ce qui implique

$x_1^* = x_2^*$. Par suite,

$$y_1^*(hx_{i_0}) = x_1^*(x_{i_0}) = x^*(x_{i_0}) = y^*_{k,x^*}(hx_i) \quad ;$$

ce qui contredit l'inéquation (γ), et montre que y^*_{k,x^*} est extrémal.

Inversement, soit $\mathcal{E} = \{y^*_{k,x^*}$; où $k \in \mathcal{E}(B(V'))$ et $x^* \in \mathcal{E}(B(E'))\}$; nous allons montrer que $\overline{\mathcal{E}}$ contient les points extrémaux de la boule unité de $(A_0(K , E))'$.

Soient $y_0^* \in (A_0(K , E))'$ de norme 1 , et $y_0^* \notin \overline{c(\mathcal{E})}$; d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in A_0(K , E)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$y_0^*(f) > \alpha \qquad \text{et} \qquad y^*(f) < \alpha , \qquad \text{pour tout} \quad y^* \in \overline{c(\mathcal{E})} \quad .$$

En particulier, pour tout $y^*_{k,x^*} \in \mathcal{E}$, on a

$$y^*_{k,x^*}(f) = x^*(f(k)) < \alpha \quad .$$

D'après le théorème de Krejn-Mil'man, appliqué à $B(E')$, ceci montre que $\|f(k)\| \leqslant \alpha$, pour tout point $k \in \mathcal{E}[B(V')]$; le même théorème, appliqué à $B(V')$, montre que l'on a $\|f\| \leqslant \alpha$. Ce qui est une contradiction avec l'inégalité

$$y_0^*(f) > \alpha , \qquad \text{où} \quad \|y_0^*\| \leqslant 1 \quad .$$

Par application du théorème de Krejn-Mil'man à la boule unité de $(A_0(K , E))'$, nous en déduisons que $\mathcal{E}$ est dense dans l'ensemble des points extrémaux de cette boule unité. Soit y^* un tel point extrémal ; il existe une famille ultrafiltrée (k_i) dans $\mathcal{E}[B(V')]$ et $(x_i^*) \subset \mathcal{E}[B(E')]$, telles que $(y^*_{k_i,x_i^*})$ converge vers y^* dans la topologie faible $\sigma[(A_0(K , E))' , A_0(K , E)]$. Soient $k = \lim_i k_i$ et $x^* = \lim_i x_i^*$; on définit la fonctionnelle $y^*_{k,x^*} \in (A_0(K , E))'$ par

$$y^*_{k,x^*}(f) = x^*(f(k)) , \qquad \forall\ f \in A_0(K , E) \quad .$$

Il est facile de vérifier que y^* et y^*_{k,x^*} coïncident ; comme y^* est extrémal, il en est de même de k et x^* respectivement dans $B(V')$ et $B(E')$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Le théorème suivant caractérise, dans certains cas, les éléments extrémaux de la boule unité de l'espace $A_0(K , E)$ lui-même. Remarquons que cette boule unité peut n'avoir aucun point extrémal.

Par exemple, si $V = C_0(\mathbb{N})$, l'espace des suites qui tendent vers 0 à l'infini, et $E = \mathbb{R}$, l'espace $A_0(K , E)$ s'identifie à l'espace $V = C_0(\mathbb{N})$ lui-même ; et il est connu que la boule unité de l'espace $C_0(\mathbb{N})$ n'admet pas de points extrémaux.

THÉORÈME 12. - Soient V un prédual de L-espace, $K = B(V')$, et E un espace de Banach vérifiant l'une des hypothèses suivantes :

(a) E est un prédual de L-espace ;

(b) E est strictement convexe.

Alors, pour que $f \in A_0(K , E)$ soit extrémal dans la boule unité de $A_0(K , E)$, il faut et il suffit qu'il vérifie

$$f[\mathcal{E}(K)] \subset \mathcal{E}[B(E)] \quad .$$

Démonstration. - La condition est évidemment suffisante pour que f soit extrémal dans la boule unité de $A_0(K , E)$; reste à prouver qu'elle est nécessaire.

(a) Supposons que E soit un prédual de L-espace ; d'après la proposition 8, il en est de même pour l'espace $A_0(K , E)$. Si f est extrémal dans la boule unité de $A_0(K , E)$, et y^* extrémal dans la boule unité de $(A_0(K , E))'$, on a, d'après [6] (théorème 4.7),

$$(\alpha) \qquad |y^*(f)| = 1 \quad .$$

Par la caractérisation des points extrémaux de la boule unité de l'espace $A_0(K , E)$ (théorème 11), on a, pour tout $k \in \mathcal{E}(K)$ et $x^* \in \mathcal{E}(B(E'))$,

$$(\beta) \qquad x^*|f(k)| = 1 \quad .$$

Supposons que $f(k) = \frac{x_1 + x_2}{2}$ n'est pas un point extrémal dans $B(E)$; alors, pour tout $x^* \in \mathcal{E}(B(E'))$, l'égalité (β) donne

$$x^*(x_1) = x^*(x_2) \ , \qquad \forall\ x^* \in \mathcal{E}(B(E')) \quad .$$

Par suite, $x_1 = x_2$, ce qui achève la démonstration.

(b) Supposons que E est un espace de Banach strictement convexe. Soit T l'application multivoque de $B(E)$ dans lui-même, à valeurs dans les convexes fermés de $B(E')$, et définie par

$$T(x) = \{x' \in B(E) \ ; \ \|2x - x'\| \leqslant 1\} \quad .$$

Il est clair que $x \in T(x)$, et que T est une application multivoque convexe et impaire. De plus, elle est s. c. i. Soient $x \in B(E)$, et $x' \in T(x)$; nous devons montrer que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ qui converge vers x , il existe une suite $(x'_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ telle que, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $x'_n \in T(x_n)$, et telle que la suite $(x'_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ converge vers x' .

Si $\|x\| = 1$, il n'y a rien à démontrer, puisque $T(x) = \{x\}$.

Si $\|x\| < 1$, soit $(\lambda_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite qui tend vers 1 , telle que

$$\|x + \lambda_n(x' - x)\| \leqslant 1 - \|x - x_n\| \quad ,$$

$$\|x - \lambda_n(x' - x)\| \leqslant 1 - \|x - x_n\| \quad .$$

On peut vérifier que $x_n + \lambda_n(x' - x)$ est dans $T(x_n)$, et il est clair que

$$\lim_{n\to\infty} \|x' - [x_n + \lambda_n(x' - x)]\| = 0 \quad ;$$

ce qui prouve que T est s. c. i.

Soit f un élément de norme 1 dans $A_0(K , E)$; supposons qu'il existe un point $k \in \mathcal{E}(K)$ tel que $f(k) \notin \mathcal{E}(B(E))$. L'application multivoque de K dans $B(E)$, définie par $\varphi = T \circ f$, prend ses valeurs dans l'ensemble des convexes fermés de E ; elle est impaire, convexe et s. c. i. Comme $T \circ f(k)$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{f(k)\}$, il existe, d'après le théorème 1, une sélection linéaire continue $f' \in A_0(K , E)$ qui vérifie $f'(k) \neq f(k)$. Par construction, on a $\|f'\| \leqslant 1$; de plus, l'application f peut s'écrire

$$f = \frac{f' + (2f - f')}{2} \quad ,$$

où l'application $2f - f'$ est aussi de norme 1 . Ce qui prouve que f n'est pas extrémal, et achève la démonstration.

4. Opérateurs extrémaux.

Le théorème 12 permet de donner une caractérisation des opérateurs compacts extrémaux d'un espace dont le dual est strictement convexe, ou bien d'un espace de fonctions continues sur un compact stonien (ce sont les espaces de Banach dont le dual est un prédual de L-espace), dans un prédual de L-espace.

Dans un autre ordre d'idées, nous allons étudier les opérateurs extrémaux de normes inférieures à 1 entre certains préduaux de L-espaces.

Les opérateurs positifs extrémaux entre deux espaces de type $\mathcal{C}(X)$ ont été étudiés par PHELPS [8] et ELLIS [2], en exhibant des propriétés algébriques de ces opérateurs. Plus tard, BLUMENTHAL, LINDENSTRAUSS et PHELPS [1] ont définis les opérateurs extrémaux de normes inférieures à 1 , d'un espace $\mathcal{C}(X)$ dans un espace $\mathcal{C}(Y)$, pour X métrisable. Dans [4], LAZAR a caractérisé les opérateurs extrémaux positifs qui vérifient $T(1) = 1$, d'un espace $\mathcal{C}(X)$ dans l'espace $A(S)$ des fonctions affines continues sur un simplexe compact. De plus, dans [4], divers exemples montrant que les rôles joués par les espaces $\mathcal{C}(X)$ et $A(S)$ ne peuvent pas être échangés.

Rappelons qu'un espace simplicial est un espace de Banach E ordonné par un cône convexe saillant fermé E_+ , tel que l'espace dual E' , muni de l'ordre et de la norme duaux, soit à la fois isomorphe (pour l'ordre) et isométrique à un espace $L^1(\mu)$. Si Y est un espace localement compact, l'espace $\mathcal{C}_0(Y)$ des fonctions numériques continues sur Y et nulles à l'infini est un espace simplicial. Si E et F sont deux espaces de Banach respectivement ordonnés par E_+ et F_+ , on note $\mathcal{L}(E , F)$ l'espace des opérateurs continus de E dans F ; cet espace est naturellement ordonné par le cône $\mathcal{L}_+(E , F)$ défini par

$$(T \in \mathcal{L}_+(E , F)) \iff (T(E_+) \subset F_+) \quad .$$

THÉORÈME 13. - <u>Soient</u> Y <u>un espace localement compact métrisable et dénombrable à l'infini</u>, E <u>un espace simplicial, et</u> T <u>un opérateur de</u> $\mathcal{L}_+(\mathcal{C}_0(Y) , E)$ <u>de norme</u> 1 . <u>Soit</u> $K = B(E')$, <u>et désignons par</u> K_+ <u>la partie positive de la boule unité de</u> E' . <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) T <u>est extrémal dans la partie positive de la boule unité de</u> $\mathcal{L}(\mathcal{C}(Y) , E)$;

(b) <u>Il existe une application linéaire continue</u> ω <u>de</u> K <u>dans</u> $(\mathcal{C}_0(Y))'$, <u>telle que</u>

$$T(f)(k) = \omega(k)(f) \ , \qquad \forall\ f \in \mathcal{C}_0(Y) \ ;$$

(c) <u>Pour tout</u> f <u>et</u> $g \in \mathcal{C}_0(Y)$, $T(f \vee g)$ <u>est la borne supérieure de</u> $T(f)$ <u>et</u> $T(g)$ <u>dans</u> E , <u>et, pour tout</u> $k \in \mathcal{E}(K_+)$, <u>la quantité</u> $\sup_{\|f\| \leqslant 1} [|T(f)(k)|]$ <u>vaut</u> 0 <u>ou bien</u> 1 .

<u>Démonstration.</u>

(a) $\Longrightarrow$ (b) . Soit T^* l'application transposée de l'opérateur T ; T^* est faiblement continue de E' dans l'espace $M_b(Y)$ des mesures bornées sur Y . Soit ψ l'application multivoque définie sur K_+ , et à valeurs dans les convexes fermés de $M_b(Y)$ muni de la dualité avec $\mathcal{C}_0(Y)$ définie par

$$\psi(k) = \{\mu \in M(Y) \ ; \ T^*(k) \leqslant \mu \leqslant 2T^*(k) \ \text{ et } \ \|\mu\| \leqslant 1\} \quad .$$

Cette application est évidemment convexe ; elle est aussi s. c. i. Sinon, il existe $k \in K_+$, $\mu' \in \psi(k)$, et un voisinage ouvert U de μ' , tels qu'il existe un ultrafiltre $(k_\alpha) \in K_+$ qui converge vers k avec $\psi(k_\alpha) \cap U = \emptyset$.

Soit U le voisinage de μ' défini par

$$U = \{\nu \in M(Y) \ ; \ |\nu(f_i) - \mu'(f_i)| < 1 \ , \ f_1 , \ldots , f_n \in \mathcal{C}_0(Y)\} \ ;$$

d'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe une fonction borélienne g définie sur Y , telle que $1 \leqslant g \leqslant 2$, et vérifiant

$$\mu' = g.T^*(k) \ ; \qquad \|\mu'\| = T^*(k)(g) \leqslant 1 \quad .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir une fonction g_1 continue sur Y , à support compact, qui vérifie

(i) $$1 \leqslant g_1 \leqslant 2 \ , \qquad T^*(k)(|g - g_1|) \leqslant \varepsilon \ .$$

De plus, comme la mesure $T^*(k)$ est bornée, on peut choisir g_1 telle que $T^*(k)(g_1) < 1$.

Posons $\nu'_\alpha = g_1 . T^*(k_\alpha)$; les conditions de (i) montrent que $T^*(k_\alpha) \leqslant \nu'_\alpha \leqslant 2T^*(k_\alpha)$. De plus, il existe α_0 telle que, pour $\alpha \geqslant \alpha_0$, on ait $\|\nu'_\alpha\| < 1$, puisque le filtre $T^*(k_\alpha)$ converge vers $T^*(k)$ et que l'ensemble $\{\mu \in M_b(Y) \ , \ T^*(k)(g_1) < 1\}$ est un voisinage ouvert de $T^*(k)$ dans $M_b(Y)$ muni de la dualité avec $\mathcal{C}_0(Y)$. On peut donc, sans diminuer la généralité, supposer que, pour tout α , on a $\nu'_\alpha \in \psi(k_\alpha)$.

De plus, les égalités suivantes sont vérifiées :

(ii) $$\lim_\alpha \nu'_\alpha(f_i) = \lim_\alpha T^*(k_\alpha)(g_1 \ f_i) = (g_1 . T^*(k))f_i \ , \qquad i = 1 , \dots , n \ .$$

D'autre part, pour tout $i = 1 , \dots , n$, on a

(iii) $$|\mu'(f_i) - \nu'_\alpha(f_i)| \leqslant |(g.T^*(k))(f_i) - (g_1.T^*(k))(f_i)| + |(g_1.T^*(k))(f_i) - \nu'_\alpha(f_i)| \ .$$

D'après (i)-(iii), on déduit que, pour $\alpha \geqslant \alpha_0$, les mesures ν'_α sont dans le voisinage U de μ' ; ce qui contredit le fait que ψ n'est pas s. c. i.

Soient T un opérateur de $\mathcal{L}_+(\mathcal{C}_0(Y) \ , E)$, et φ la restriction de T^* à K ; supposons que, pour un point $k_0 \in \mathcal{E}(K_+)$, la mesure $\varphi(k_0)$ ne soit pas dans $Y \cup \{0\}$. En prolongeant d'une façon naturelle l'application ψ à la boule unité de E' , le théorème 1 peut être appliqué, puisque la boule unité de l'espace $M_b(Y)$ est métrisable, et peut être plongée dans un espace de Fréchet. Soient φ' une sélection linéaire continue pour ψ telle que $\varphi'(k_0) \neq \varphi(k)$, et T' l'application associée à φ' par la relation

$$T'(f)(k) = \varphi'(k)(f) \ , \qquad \forall \ f \in \mathcal{C}_0(Y) \ .$$

Il est clair que $T' \neq T$, $T' \in \mathcal{L}_+(\mathcal{C}_0(Y) \ , E)$, et de plus $\|T'\| \leqslant 1$; il en est de même pour l'opérateur $2T - T'$. Par suite, T peut s'écrire $T = \dfrac{T' + (2T - T')}{2}$, ce qui montre que T n'est pas extrémal.

(b) ==> (a) est trivial.

(b) ==> (c) . Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}_0(Y)$, et $f \vee g$ la borne supérieure de f et g dans $\mathcal{C}_0(Y)$; comme $T \in \mathcal{L}_+(\mathcal{C}_0(Y) \ , E)$, il est clair que $T(f \vee g) \geqslant (T(f) \ , T(g))$. Soit h un élément de E qui majore $T(f)$ et $T(g)$;

par suite, pour tout $k \in \mathcal{E}(K_+)$, on a

$$h(k) \geqslant T(f)(k) \vee T(g)(k) \quad .$$

Mais, d'après l'hypothèse, $T(f)(k) \vee T(g)(k) = T(f \vee g)(k)$; par conséquent, le théorème de Krejn-Mil'man implique que $h \geqslant T(f \vee g)$. La deuxième partie est facile à vérifier.

(c) $\Longrightarrow$ (b) . Soit k un point de $\mathcal{E}(K_+)$; la fonctionnelle ℓ de $M_b(Y)$, définie par $\ell = k \circ T$, est positive et vérifie

$$\ell(f \vee g) = \ell(f) \vee \ell(g) \ , \qquad \forall\ f \ , g \in C_0(Y) \quad .$$

Par suite, il existe un point $y \in Y$ et $\lambda \geqslant 0$ tels que $\ell = \lambda\varepsilon_y$. Comme on a supposé que la quantité $\sup\{T(f)(k) \ ; \ \|f\| = 1\}$ vaut 0 ou bien 1 , il en est de même pour λ ; ce qui achève la démonstration du théorème.

Le théorème suivant est une généralisation des résultats de [1] au cas des C_σ-espaces. Avant de l'énoncer, rappelons les résultats suivants, démontrés dans [3] :

(A) Si V est un C_σ-espace, pour tout triplet f , g , h , d'éléments de V , on peut définir de façon unique un produit f , g , $h \in V$. Si ℓ est un élément de V' qui vérifie $\ell(f.g.h) = \ell(f).\ell(g).\ell(h)$ pour tout f , g , $h \in V$, alors $\ell \in \mathcal{E}[B(V')] \cup \{0\}$.

(B) Si V est un C_σ-espace, il peut se représenter comme l'espace des fonctions impaires sur l'espace compact $X = \mathcal{E}[B(V')] \cup \{0\}$. Si l'espace V est séparable, l'espace X est évidemment métrisable.

THÉORÈME 14. - <u>Soient</u> $V = C_\sigma(X)$ <u>et</u> $W = C_\sigma(Y)$ <u>deux</u> C_σ<u>-espaces, dont le premier est séparable, et</u> $T \in \mathcal{L}(V , W)$ <u>un opérateur de norme</u> 1 ; <u>les deux assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) T <u>est extrémal dans la boule unité de</u> $\mathcal{L}(V , W)$;

(b) <u>Il existe une application continue</u> φ <u>de</u> Y <u>dans</u> X , <u>telle que</u> $\varphi(-y) = -\varphi(y)$, <u>et, pour tout</u> f <u>dans</u> V ,

$$T(f)(y) = f(\varphi(y)) \quad .$$

<u>De plus,</u> $\varphi^{-1}(0)$ <u>est d'intérieur vide.</u>

<u>Démonstration.</u> - Il est clair que (b) implique (a).

(a) $\Longrightarrow$ (b) . L'espace V' dual de V s'identifie à l'espace des mesures impaires sur X . Soit ψ l'application multivoque de $B(V')$ dans lui-même, à valeurs dans les convexes fermés non vides de $B(V')$, définie par

$$\psi(\mu) = \{\mu' \in B(V') \ ; \ \mu' = g.\mu \ , \ \text{ où } \ 1 \leqslant g \leqslant 2 \ \text{ est une fonction } \mu\text{-intégrable}\} \quad .$$

Une méthode analogue à celle utilisée dans la démonstration du théorème 13 permet de montrer que l'application ψ ainsi définie est s. c. i.

Soit $T \in \mathcal{L}(V , W)$, et notons T^* l'opérateur transposé de T . L'application multivoque de Y dans $B(V')$, définie par $\psi' = \psi \circ T^*$, est s. c. i. et vérifie $\psi(- y) = - \psi'(y)$, pour tout $y \in Y$. Soit φ la trace de T^* à Y ; il est clair que nous avons $T(f)(y) = f(\varphi(y))$, $\forall f \in V$. Comme V est un espace séparable, on peut supposer que $B(V')$ est plongé dans un espace de Fréchet. S'il existe un point $y_0 \in Y$ tel que $\varphi(y_0) \notin X$, il existe, d'après une adaptation facile du théorème de Michael [7], une sélection φ' de ψ' telle que

$$\varphi'(y_0) \neq \varphi(y_0) , \qquad \varphi'(- y) = - \varphi'(y) , \qquad \forall y \in Y .$$

Soit T' l'opérateur de $\mathcal{L}(V , W)$, défini par

$$T(f)(y) = f(\varphi'(y)) , \qquad \forall f \in V .$$

Il est aisé de vérifier que les deux opérateurs T' et $2T - T'$ sont de norme 1 ; par conséquent, $T = \dfrac{T' + (2T - T')}{2}$ n'est pas extrémal dans la boule unité de $\mathcal{L}(V , W)$.

Il reste à montrer que $\varphi^{-1}(0)$ est d'intérieur vide. Sinon, l'ensemble $\varphi^{-1}(0)$ étant un fermé symétrique de Y , il existe $h \in \mathcal{C}_\sigma(Y)$ de norme 1 telle que

$$h(y_0) = 1 , \qquad \text{où } y_0 \text{ est dans l'intérieur de } \varphi^{-1}(0) ,$$

$$h(y) = 0 , \qquad \forall y \in Y \setminus \varphi^{-1}(0) .$$

Notons T' (resp. T'') l'opérateur de $\mathcal{L}(V , W)$, défini par

$$T'(f)(y) = T(f)(y) + h(y) , \qquad \forall f \in V ,$$

$$[\text{resp.} \qquad T''(f)(y) = T(f)(y) - h(y) , \qquad \forall f \in V] .$$

Il est clair que T' (resp. T'') est un opérateur de norme 1 , et de plus $T = \dfrac{T' + T''}{2}$, ce qui montre que T ne peut être extrémal. Ceci achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 15 (BLUMENTHAL, LINDENSTRAUSS, PHELPS). - Soient $V = \mathcal{C}(X)$ et $W = \mathcal{C}(Y)$ deux espaces de fonctions continues sur les compacts X et Y , et supposons que V est séparable. Soit $T \in \mathcal{L}(V , W)$ un opérateur de norme 1 ; les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) T est extrémal dans la boule unité de $\mathcal{L}(V , W)$;

(b) Il existe une application continue φ de Y dans X , et une fonction continue λ de Y dans $\mathbb{R}$, telle que $|\lambda(y)| = 1$, vérifiant

$$T(f)(y) = \lambda_y \, f(\varphi(y)) , \qquad \forall f \in \mathcal{C}(X) .$$

Pour démontrer ce corollaire, on utilise le théorème 14, en remarquant que l'ensemble $\mathcal{E}[B(V')]$ est fermé ; par suite, $\varphi^{-1}(0)$ ne peut être d'intérieur vide sans être lui-même vide.

THÉORÈME 16. - Soient $V = \mathcal{C}_\sigma(X)$ et $W = \mathcal{C}_\sigma(Y)$ deux C_σ-espaces dont le premier est séparable, et $T \in \mathcal{L}(V , W)$ un opérateur de norme 1 ; les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) T est extrémal dans la boule unité de $\mathcal{L}(V , W)$;

(b) Pour tout triplet $f , g , h \in V$, l'opérateur T vérifie

$$T(f.g.h) = T(f).T(g).T(h) \quad .$$

De plus, il existe un ensemble $N \subset Y$ d'intérieur vide tel que, pour tout point $y \in Y \setminus N$, il existe $f \in V$ vérifiant $T(f)(y) \neq 0$.

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b) . On utilise la caractérisation des opérateurs extrémaux donnée dans le théorème 14.

(b) $\Longrightarrow$ (a) . Soit y un point de $Y \setminus N$; la fonctionnelle $\ell = \varepsilon_y \circ T$ est non nulle, et elle vérifie

$$\ell(f.g.h) = \ell(f).\ell(g).\ell(h) \ , \qquad \forall\ f , g , h \in V \quad .$$

D'après [8], on conclut que ℓ est un point extrémal de $B(V')$. Par conséquent, $T^*(y) \in \mathcal{E}[B(V')]$. Comme, d'autre part, on a $T^{*-1}(0) \subset N$, le théorème 14 permet de conclure que l'opérateur T est extrémal dans la boule unité de $\mathcal{L}(V , W)$.

Remarque. - Dans les théorèmes 14 et 16, nous avons supposé que l'espace V est séparable. Le seul endroit où cette hypothèse est nécessaire est dans l'application des théorèmes de sélection (théorème 1, et théorème de Michael [7]) ; nous ignorons s'il existe une démonstration de ces théorèmes qui permet d'éviter cette hypothèse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLUMENTHAL (R. M.), LINDENSTRAUSS (J.) and PHELPS (R. R.). - Extreme operators into $C(K)$, Pacific J. of Math., t. 15, 1965, p. 747-756.

[2] ELLIS (A. J.). - Extreme positive operators, Quart. J. of Math., Oxford Series, t. 15, 1964, p. 342-344.

[3] FAKHOURY (Hicham). - Préduaux de L-espaces, notion de centre, J. of functional Analysis (à paraître).

[4] LAZAR (A. J.). - Affine functions on simplexes and extreme operators, Israel J. of Math., t. 5, 1967, p. 31-43.

[5] LAZAR (A. J.) and LINDENSTRAUSS (J.). - Banach spaces whose duals are L_1-spaces and their representing matrices, Acta Math., Uppsala, 1971 (à paraître).

[6] LINDENSTRAUSS (Joram). - Extension of compact operators. - Providence, American mathematical Society, 1964 (Memoirs of the American mathematical Society, 48).

[7] MICHAEL (Ernest). - Continuous selections, I, Annals of Math., Series 2, t. 63, 1956, p. 361-382.

[8] PHELPS (R. R.). - Extreme positive operators and homomorphisms, Trans. Amer. math. Soc., t. 108, 1963, p. 265-274.

(Texte reçu le 11 juin 1971)

Hicham FAKHOURY
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75 - PARIS 05