Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Claude Portenier

Formes linéaires positives et mesures

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, nº 2 (1970-1971), exp. nº C6, p. C1-C7

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A14_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 6, 7 p.

FORMES LINÉAIRES POSITIVES ET MESURES

par Claude PORTENIER

1. Introduction. - Nous nous proposons ici de généraliser aux espaces de sections la proposition 5 de [1] (§ 5, n° 2, p. 58), comme nous l'avons annoncé dans [3], n°3.8, c'est-à-dire de "représenter" certaines formes linéaires positives par des "mesures". Pour cela, il nous faudra généraliser la notion de mesure (au sens de [1]), bien que dans certains cas l'on puisse s'y ramener.

Dans ce qui suit, $\pi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{X}$ désignera une fibration principale complètement régulière (cf. [2] ou [3]). Si f est une section de π, $\pi_{\mathbb{R}}$ ou $\pi_{\overline{\mathbb{R}}}$, et A une partie de $\mathfrak{X}$, nous désignerons par f_A la section restriction de f à A ; la fonction caractéristique de A sera notée 1_A.

2. Définition. - Soient m une mesure (ou même une prémesure) positive sur $\mathfrak{X}$, et s une section m-mesurable de π. Pour toute section f de $\pi_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ ou $\pi_{\mathbb{R}}$, nous désignerons par f_s la fonction sur $\mathfrak{X}$ définie par $f(x) = s(x) * f_s(x)$. Remarquons que f est m-mesurable et si et seulement s'il en est de même de f_s. En posant $(m , s)^{\bullet}(f) = m^{\bullet}(f_s)$, on définit, sur l'ensemble $\mathcal{F}^+(\mathfrak{X})$ de toutes les sections de $\pi_{\overline{\mathbb{R}}_+}$, un encombrement (définition identique à celle de [1]).

3. Définition. - Plus généralement (cf. exemple 20), soit (m , s) un couple d'applications qui à chaque compact K de $\mathfrak{X}$ associe respectivement une mesure positive $m(K)$ sur K et une section $s(K)$ de π, définie au-dessus de K et m-mesurable, tel que l'on ait $(m(K) , s(K))^{\bullet}_L = (m(L) , s(L))^{\bullet}$ pour tous les compacts K, L tels que $K \supset L$. Nous dirons que (m , s) est une prémesure positive sur π, et nous poserons, pour toute $f \in \mathcal{F}^+(\mathfrak{X})$,

$$(m , s)^{\bullet}(f) = \sup (m(K) , s(K))^{\bullet}(f_K) ,$$

K parcourant les compacts de $\mathfrak{X}$. C'est un encombrement appelé l'intégrale supérieure essentielle associée à la prémesure (m , s).

4. Remarque. - La condition de compatibilité $(m(K) , s(K))^{\bullet}_L = (m(L) , s(L))^{\bullet}$ signifie en fait que $m(K)_L$ et $m(L)$ sont deux mesures équivalentes, et que $m(K)_L = (s(L)/s(K)) . m(L)$, la fonction strictement positive et $m(L)$-mesurable $s(L)/s(K)$ étant définie sur L par $s(L) = (s(L)/s(K)) . s(K)$.

5. Définition. - Nous dirons que deux prémesures positives (m , s) et (m' , s')

sont égales si leurs intégrales supérieures essentielles sont égales. Comme, pour toute $f \in \mathcal{F}^+(\mathcal{X})$, on a $(m , s)^\bullet(1_K.f) = (m(K) , s(K))^\bullet(f_K)$, il est équivalent de dire que $m(K) = (s'(K)/s(K)).m'(K)$ pour tout compact K de $\mathcal{X}$.

6. PROPOSITION. - Il y a correspondance biunivoque entre les prémesures et les encombrements p qui jouissent des deux propriétés suivantes :

(i) Si $f \in \mathcal{F}^+(\mathcal{X})$, $p(f) = \sup p(1_K.f)$, K parcourant les compacts de $\mathcal{X}$.

(ii) Pour tout compact K de $\mathcal{X}$, il existe une mesure $m(K)$ sur K et une section $m(K)$-mesurable de π au-dessus de K , tels que $p(1_K.f) = (m(K) , s(K))^\bullet(f_K)$ pour toute $f \in \mathcal{F}^+(\mathcal{X})$.

La démonstration est immédiate (cf. [3], prop. 2, § 1 , n° 2 , p. 10).

7. Définition. - Nous dirons qu'une prémesure positive (m , s) sur π est une mesure positive sur π si, pour tout $x \in \mathcal{X}$, il existe $f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{\pi_R})$ telle que $f(x) \neq 0$, et $(m , s)^\bullet(|f|) < \infty$.

On peut alors voir que toute la théorie développée dans [1] s'étend à notre cas, en particulier, l'existence d'un concassage et la théorie de l'intégration.

8. Définition. - Soient E un espace de sections associé à π , et (m , s) une mesure positive sur π telle que toute $f \in E$ soit (m , s)-intégrable. Posons $\mu(f) = \int f d(m , s)$ (si $f \in C$, on a $\mu(f) = (m , s)^\bullet(f)$). La forme linéaire positive μ ainsi définie satisfait évidemment à la propriété (M) (cf. [3], définition 3.8), et nous dirons qu'elle est représentée par les mesures (m , s) . Nous allons montrer réciproquement que toute forme linéaire positive, ayant la propriété (M), est représentable par une mesure positive (m , s) sur π (cf. théorème 16).

9. Définition. - Nous désignerons par $\mathcal{J}^+$ l'ensemble des sections de $\underset{\sim}{\pi_{\overline{R}}^+}$ qui sont semi-continues inférieurement (cf. [3], définition 3.1). Si μ est une forme linéaire positive, nous poserons, pour $f \in \mathcal{J}^+$, $\overline{\mu}(f) = \sup \mu(g)$, g parcourant les éléments de C tels que $g \leq f$.

10. PROPOSITION. - Si μ a la propriété de Daniell (cf. [3], définition 2.2), alors $\overline{\mu}$ est le seul prolongement de μ à $\mathcal{J}^+$ qui soit positivement homogène, croissant, additif, et possédant la propriété : Pour toute famille (f_i) filtrante croissante de $\mathcal{J}^+$, on a $\overline{\mu}(\sup f_i) = \sup \overline{\mu}(f_i)$.

La démonstration est classique.

11. Définition. - Posons, pour $f \in \mathcal{F}^+(\mathcal{X})$, $\mu^*(f) = \inf \overline{\mu}(g)$, g parcourant les éléments de $\mathcal{J}^+$ tels que $g \geq f$.

12. PROPOSITION. - Si μ a la propriété de Daniell, alors μ^* est un encombrement qui prolonge $\overline{\mu}$.

La démonstration est aussi classique.

13. Définition. - Pour toute $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$, nous poserons $\mu^\bullet(f) = \sup \mu^*(1_K.f)$, K parcourant les compacts de $\mathfrak{X}$.

14. PROPOSITION. - Si μ a la propriété (M), alors $\mu^\bullet$ est un encombrement qui prolonge $\overline{\mu}$.

On a évidemment $\mu^\bullet \leqslant \mu^*$. Si $f \in \mathcal{J}^+$, il vient d'une part $\mu^\bullet(f) \leqslant \mu^*(f) = \overline{\mu}(f)$, et d'autre part $\overline{\mu}(f) \leqslant \mu^\bullet(f)$, car, pour toute $g \in C$ telle que $g \leqslant f$, on a $\mu(g) = \mu^\bullet(g) \leqslant \mu^\bullet(f)$. En effet, pour tout $h \in \mathcal{J}^+$ tel que $h \geqslant 1_K.g$, il existe $h' \in C$ tel que $h \geqslant h' \geqslant 1_K.g$ par la compacité de K et la richesse de E , donc $\mu_K(g) = \inf_{h \in C, h \geqslant 1_K.g} \mu(h) = \inf_{h \in \mathcal{J}^+, h \geqslant 1_K.g} \overline{\mu}(h) = \mu^*(1_K.g)$, et par suite,

$$\mu^\bullet(g) = \sup \mu^*(1_K.g) = \sup \mu_K(g) = \mu(g)$$

par le lemme 3.20 de [3].

15. LEMME. - Soit K un compact de $\mathfrak{X}$. Pour toute $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$, on a

$$\mu_K^\bullet(f) = \mu^\bullet(1_K.f) .$$

Dans la proposition précédente, nous avons déjà démontré que $\mu_K(f) = \mu^\bullet(1_K.f)$ pour toute $f \in C$. On en déduit immédiatement que $\overline{\mu}_K(f) \leqslant \mu^\bullet(1_K.f)$ pour toute $f \in \mathcal{J}^+$. Pour l'autre inégalité, remarquons tout d'abord que $\overline{\mu}_K(f) = \overline{\mu}_K(f')$ si $f' \in \mathcal{J}^+$ et $f' = f$ sur K , le compact K portant μ_K . Soit maintenant $\sigma \in C$, une section continue de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$ strictement positive sur K . On a

$$\overline{\mu}_K(f) = \overline{\mu}_K(\sup \inf (f , n\sigma)) = \sup \overline{\mu}_K(\inf(f , n\sigma))$$

et comme $\mu^\bullet(1_K.f) = \sup \mu^\bullet(1_K.\inf(f , n\sigma))$, on est ramené au cas $f \leqslant \sigma$. Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut encore supposer que $\mu(\sigma) - \mu_K(\sigma) \leqslant \varepsilon/2$. Choisissons $g \in C$ telle que $\overline{\mu}(\inf(f , \sigma)) - \mu(g) < \varepsilon/2$. Il vient alors

$$\mu^\bullet(1_K.f) - \overline{\mu}_K(f) \leqslant \overline{\mu}(\inf(f , \sigma)) - \mu_K(g) = \overline{\mu}(\inf(f , \sigma)) - \mu(g) + (\mu - \mu_K)(g) \leqslant \varepsilon ,$$

d'où le résultat. Si $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$, on a

$$\mu_K^*(f) = \inf_{g \in \mathcal{J}^+, g \geqslant f} \overline{\mu}_K(g) = \inf_{g \in \mathcal{J}^+, g \geqslant f} \mu^\bullet(1_K.g)$$

$$= \inf_{g \in \mathcal{J}^+, g \geqslant f} \inf_{h \in \mathcal{J}^+, h \geqslant 1_K.g} \overline{\mu}(h) = \inf_{h \in \mathcal{J}^+, h \geqslant 1_K.f} \overline{\mu}(h) = \mu^\bullet(1_K.f) .$$

Finalement, on a $\mu_K^*(f) = \mu_K^*(1_K.f)$, donc $\mu_K^\bullet(f) = \mu_K^*(f)$, ce qui finit de prouver le lemme.

16. THÉORÈME. - Soit E un espace de sections associé à π . Pour qu'une forme linéaire positive soit représentable par une mesure positive sur π (unique à "égalité" près), il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la propriété (M) .

Nous avons déjà vu que la condition est nécessaire (cf. n° 8). Réciproquement, nous allons montrer que μ° possède les propriétés (i) et (ii) de la proposition 6. Soit $f \in \mathfrak{F}^{+}(\mathfrak{X})$; on a $\sup \mu^{\circ}(1_K . f) = \sup_{K,L} \mu^{*}(1_L . 1_K . f) = \sup \mu^{*}(1_K . f) = \mu^{\bullet}(f)$, ce qui prouve (i). Etant donné un compact K de $\mathfrak{X}$, soit $s(K)$ une section continue de π au-dessus de K . Par le lemme 15, on voit que $\mu_K^{\bullet}(f)$ ne dépend que des valeurs de f sur K ; si l'on désigne par θ la forme linéaire positive induite par μ_K sur l'espace de sections E_K , restriction de E à K , alors $\theta^{\bullet}$ est induit par $\mu_K^{\bullet}$. Par l'intermédiaire de $s(K)$, θ induit une forme linéaire positive sur un sous-espace riche, en particulier dense, de $\mathcal{C}(K)$; elle se prolonge évidemment en une mesure $m(K)$ sur K , et l'on a $(m(K) , s(K))^{\bullet} = \theta^{\bullet}$. Par le lemme 15, on a alors $\mu^{\bullet}(1_K . f) = \mu_K^{\bullet}(f) = \theta^{\circ}(f_K) = (m(K) , s(K))^{\bullet}(f_K)$ pour toute $f \in \mathfrak{F}^{+}(\mathfrak{X})$, ce qui prouve (ii).

Pour démontrer l'unicité, il faut étendre la théorie de l'intégrale supérieure (cf. [1], § 1, n° 9), et introduire la notion de section modérée ; essentiellement, cela revient à montrer que si p est l'intégrale supérieure essentielle associée à une mesure sur π , alors $p(1_K . f) = \inf_{g \in \mathcal{J}^{+},\ g \geq 1_K . f} p(g)$ pour tout compact K de $\mathfrak{X}$, et toute $f \in \mathfrak{F}^{+}(\mathfrak{X})$. On en déduit facilement que si p prolonge μ , alors $p = \mu^{\bullet}$.

17. COROLLAIRE. - Toute forme linéaire positive ayant la propriété (M) est somme d'une famille de formes linéaires positives à supports compacts disjoints deux à deux.

Cela découle immédiatement de l'existence d'un concassage.

18. Remarque. - Soient μ une forme linéaire positive ayant la propriété (M), (m , s) une mesure sur π qui représente μ , et (K_α) un concassage associé à (m , s) . Désignons par t une section de π égale à $s(K_\alpha)$ au-dessus de K_α pour tout α , et par n la mesure $\sum m(K_\alpha)$ définie sur l'espace localement compact associé au concassage (K_α) . On a $(m , t)^{\bullet} = (m , s)^{\bullet}$, ce qui fournit une représentation de μ au sens du n° 2 , mais malheureusement sur un autre espace que $\mathfrak{X}$.

19. Remarque. - Supposons qu'il existe une section τ strictement positive et m-mesurable de π_R qui soit localement (resp. sur chaque compact) (m , s)-intégrable. En désignant par t la section m-mesurable de π associée à τ , il existe une mesure (resp. prémesure) n sur $\mathfrak{X}$ telle que $(m , t)^{\bullet} = (m , s)^{\bullet}$. Dans ce

cas seulement, on a une représentation au sens du n° 2. Ceci a lieu en particulier si π est trivial. En effet, on peut prendre pour τ une section continue strictement positive de π_R et, étant donné $x \in \mathfrak{X}$ et $f \in E$ tel que $f(x) > \tau(x)$, il est clair que $\int_V \tilde{\tau} d(m , s) \leq \mu(f)$, V désignant le voisinage de x formé des y tels que $f(y) > \tau(y)$. On pourrait espérer qu'un choix convenable des sections $s(K_\alpha)$ soit possible. Il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant.

20. Exemple.

(a) Soit $\mathfrak{X}$ l'espace localement compact des ordinaux x dénombrables (i. e. $x < \omega_1$), et désignons par X le sous-espace des ordinaux ayant un prédécesseur. Montrons tout d'abord qu'il existe une famille $(\rho_y)_{y \in \mathfrak{X}-X}$ d'applications $\rho_y : X \to \underset{\sim}{R}$ telles que

(i) $\rho_y(x) > 0$ pour tout $x \in X$, $x < y$, et $\rho_y(x) = 0$ ailleurs.

(ii) $\sum \rho_y(x) < \infty$.

(iii) Pour tout $y' \in \mathfrak{X} - X$, $y' \leq y$, $\lim \rho_y(x)/\rho_{y'}(x)$ existe lorsque x tend vers y'.

Nous allons construire cette famille, par induction transfinie, sur l'ensemble bien ordonné $\mathfrak{X} - X$, dont le premier élément est ω_0. Il est clair que l'on peut choisir une application ρ_{ω_0} satisfaisant aux conditions ! Supposons maintenant que la construction ait été faite pour les $y' < y$. Si y a un prédécesseur y', posons $\rho_y(x) = \rho_{y'}(x)$ si $x < y'$, les autres valeurs pouvant être choisies telles que ρ_y satisfasse aux conditions. Si y n'a pas de prédécesseur, il existe une suite (y_n) de $\mathfrak{X} - X$ strictement croissante de supremum y. Posons

$$\rho_y(x) = \alpha_n . \rho_{y_n}(x)$$

lorsque $y_{n-1} < x < y_n$ en choisissant les $\alpha_n \in \underset{\sim}{R}_+^*$ tels que les conditions (ii) soient remplies. On vérifie immédiatement que les autres le sont aussi.

(b) Soit E l'espace de Riesz de toutes les fonctions réelles (continues) f sur X, telles que, pour tout $y \in \mathfrak{X} - X$, $\mu_y(f) = \lim f(x)/\rho_y(x)$ existe lorsque x tend vers y. E est un espace de sections, muni de la topologie de l'ordre, associé à la fibration principale complètement régulière triviale de base X. Nous allons montrer que la base de son spectre π est homéomorphe à $\mathfrak{X}$ (cf. (d)).

(c) Posons, pour toute $f \in E$, $f(y) = \mu_y(f)$ si $y \in \mathfrak{X} - X$. Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage V de x tel que $\sum_V |f(y)| < \infty$. En effet, si $x \in X$, on peut prendre $V = \{x\}$, et si $x \in \mathfrak{X} - X$, il existe un voisinage V de x et une constante M tels que $|f| \leq M . \rho_x$ sur V, d'où le résultat. On peut donc considérer l'application croissante $x \longmapsto \sum_{y \leq x} |f(x)|$ de $\mathfrak{X}$ dans $\underset{\sim}{R}_+$; cette application étant finalement constante, on en déduit que f est finalement nulle et, par suite, $\sum |f(x)| < \infty$.

(d) Soit μ une forme linéaire réticulante. Par le théorème 3.22 de [2], il existe $\rho \in E$ et Φ un ultra-filtre non trivial sur X tels que

$$\mu(f) = \lim f(x)/\rho(x) \quad \text{pour toute} \quad f \in E .$$

Φ est une base d'ultra-filtre sur $\mathfrak{X}$ qui ne converge pas vers l'infini, puisque ρ est finalement nulle. Par suite, Φ converge vers $y \in \mathfrak{X} - X$. On peut écrire

$$\mu(f) = \lim f(x)/\rho(x) = \lim f(x)/\rho_y(x) \times \lim f_y(x)/\rho(y) = \mu(\rho_y) \times \mu_y(f)$$

pour toute $f \in E$, ce qui prouve que $\mu = \mu(\rho_y).\mu_y$. La suite est immédiate (cf. remarque 3.8 de [2]).

(e) Le graphe de la fonction $f : \mathfrak{X} \to \underset{\sim}{R}$ peut s'identifier à l'image de la section f de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$. Il suffit de munir l'ensemble $\mathfrak{X} \times \underset{\sim}{R}$ de la "bonne" topologie qui fournit une représentation de l'espace total de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$. Ce fibré n'est pas trivial, toute section continue appartenant à E , et étant par suite finalement nulle.

(f) Tous les éléments f de E étant à support compact, il est clair que chaque forme linéaire positive a la propiété (M) , en particulier, celle qui dans la représentation ci-dessus s'écrit sous la forme $f \longmapsto \sum f(x)$. Cette écriture revient à considérer la section t de π associée à la section semi-continue inférieurement de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$ égale à la constante 1 dans la représentation ci-dessus, le concassage formé des points de $\mathfrak{X}$ et la mesure $n = \sum_{\mathfrak{X}} \varepsilon_x$ sur $\mathfrak{X}$ murie de la topologie discrète (cf. n° 18). Il n'est pas difficile de voir, par un raisonnement identique à celui qui a été fait dans (c), qu'il n'existe pas de section τ strictement positive (m-mesurable) de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$ qui soit localement (ou même sur chaque compact) (m , s)-intégrable ; sinon il existerait une fonction strictement positive sur $\mathfrak{X}$ qui soit localement (sur chaque compact) sommable.

21. Remarque. - Soit E un espace de sections associé à π , dont toutes les formes linéaires continues satisfont à la propriété (M), par exemple un espace de Kakutani $\mathcal{O}_{\Phi}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ (on peut toujours se ramener à ce cas pour le théorème 4.6 de [3]). Il est clair que l'on peut choisir s , telle que $s(K)$ soit continue pour tout compact K de $\mathfrak{X}$, une fois pour toutes ; par suite, pour toute forme linaire continue μ , il existe une unique application m , associant à chaque compact K de $\mathfrak{X}$ une mesure $m(K)$ sur K , qui vérifie certaines relations de compatibilité (cf. remarque 4) et telle que la mesure (m , s) sur π représente μ .

Si π est trivial, alors (cf. remarque 19) le dual de E s'identifie à un sous-espace solide de l'espace des mesures sur $\mathfrak{X}$. En appliquant ces résultats à un espace de Kakutani, on généralise ceux de [4] (dans cet article, il est supposé que l'espace de base est localement compact).

22. THÉORÈME. - Le dual d'un espace de Kakutani nomé $\mathcal{Q}_{\varphi}(\pi_{\tilde{R}})$ (en particulier d'un M-espace) est isomorphe à l'espace des mesures bornées sur la base de son spectre.

En effet, on a $\varphi = \sup_{f \in U_\varphi} f$, donc, pour toute forme linéaire positive continue μ , il vient $\bar{\mu}(\varphi) = \sup \mu(f) \leqslant \|\mu\|$. Désignons par s la section de π associée à φ et par m l'unique mesure bornée sur $\mathfrak{X}$ telle que la mesure (m , s) sur π représente μ . On vérifie immédiatement que $\mu \longmapsto m$ est l'isomorphisme que nous cherchons.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration. Chap. 9. - Paris, Hermann, 1969 (Act. scient. et ind., 1343 ; Bourbaki, 35).

[2] PORTENIER (Claude). - Espaces de Riesz, espaces de fonctions et espaces de sections, Comment. Math. Helvet. (à paraître).

[3] PORTENIER (Claude). - Caractérisation de certains espaces de Riesz, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 10e année, 1970/71, n° 6, 21 p.

[4] SUMMERS (W. H.). - Dual spaces of weighted spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 151, 1970, p. 323-333.

(Texte reçu le 2 septembre 1971)

Claude PORTENIER
Department of Mathematics
University of British Columbia
VANCOUVER 8, B. C. (Canada)