Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Hicham Fakhoury

Projections contractantes dans $C(X)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° C5, p. C1-C7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A13_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 5, 7 p.

PROJECTIONS CONTRACTANTES DANS $\mathcal{C}(X)$

par Hicham FAKHOURY

Si X est un espace compact, et $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles, nous montrons que tout sous-espace séparable H de $\mathcal{C}(X)$, qui est image de $\mathcal{C}(X)$ par une projection de norme 1, est isomorphe à l'espace des fonctions continues sur un espace compact métrisable K. Ce résultat répond à une question posée par A. PEŁCZYŃSKI dans [10]. Dans [12], C. SAMUEL a démontré ce résultat ; nous en donnons ici une démonstration simplifiée.

0. Introduction.

Soit X un compact, on note $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles ; cet espace sera toujours muni de la norme de la convergence uniforme. Si σ est une homéomorphie involutive définie sur X, on note $\mathcal{C}_\sigma(X)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(X)$, formé des fonctions σ-impaires, c'est-à-dire

$$C_\sigma(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) \ ; \ f(x) = -f(\sigma(x)) \ , \ \forall\, x \in X\} \ .$$

Un espace de Banach V est un C_σ-espace s'il existe un compact X muni d'un automorphisme involutif σ tel que V soit isométrique à l'espace $C_\sigma(X)$. Par suite, tout espace $\mathcal{C}(X)$ est un C_σ-espace.

Un sous-espace H de $\mathcal{C}(X)$ est dit complémenté s'il existe une projection continue de $\mathcal{C}(X)$ sur H ; une projection P est dite contractante si elle est de norme 1.

Deux espaces de Banach E et F sont dits isomorphes s'ils sont linéairement homéomorphes.

Soit V un espace de Banach, l'espace dual V' sera muni (sauf mention du contraire) de la topologie $\sigma(V', V)$.

La boule unité d'un espace de Banach V est notée $B(V)$; si aucune confusion n'est à craindre, on désignera la boule unité de V' par K. L'ensemble des points extrémaux de K est noté $\mathcal{E}(K)$.

Un espace de Banach est dit un L-espace s'il est isométrique à l'espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure μ sur un espace localement compact. Un espace de Banach, dont le dual est un L-espace, est appelé un prédual de L-espace. Tout espace $\mathcal{C}(X)$ est un prédual de L-espace.

Dans la première partie, nous rappelons quelques résultats standards sur les espaces $\mathcal{C}(X)$ et sur les préduaux de L-espaces. Dans la deuxième partie, nous démontrons le résultat énoncé plus haut. Cette démonstration diffère selon que le dual H' de H est séparable ou non, lorsqu'il est muni de la topologie de la norme.

1. Quelques résultats standards.

Si A est une partie d'espace topologique E, on désigne par A' l'ensemble dérivé de A, c'est-à-dire l'ensemble des points d'accumulation de A. Rappelons que Ω désigne le premier ordinal non dénombrable.

Soit X un espace compact métrisable ; pour tout ordinal $\alpha < \Omega$, nous désignons par X^α l'ensemble dérivé d'ordre α de X. Ces ensembles sont définis par récurrence transfinie de la façon suivante :

$$X^0 = X \quad ; \qquad X^1 = X' ,$$
$$X^\alpha = (X^\beta)' \quad \text{si} \quad \alpha = \beta + 1 ,$$
$$X^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} X^\beta \quad \text{si} \quad \alpha \text{ est un ordinal limite.}$$

Il est facile de vérifier que, si X est dénombrable, il existe un plus petit ordinal $\beta < \Omega$ tel que $X^\beta = \emptyset$. L'ordinal β n'est pas un ordinal limite, par suite, il existe α, tel que $\alpha = \beta + 1$. L'ensemble X^α est fini puisque $(X^\alpha)' = \emptyset$; soit $\operatorname{Card} X^\alpha = n$. Dans [5], MAZURKIEWIC et SIERPINSKI ont établi le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - *Si X est un compact dénombrable, il existe un ordinal $\alpha < \Omega$ et un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ tels que X soit homéomorphe au segment $[0 , \omega^{\alpha}.n + 1]$ muni de la topologie de l'ordre.*

Dans la suite, nous aurons besoin des deux résultats suivants, dus respectivement à MILUTIN [9] et PEŁCZYNSKI [11].

THÉORÈME 2. - *Soit X un espace compact métrisable non dénombrable ; l'espace $\mathcal{C}(X)$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{C}([0 , 1])$.*

THÉORÈME 3. - *Soient X un espace compact métrisable, et H un sous-espace complémenté dans $\mathcal{C}(X)$; s'il existe un sous-espace $Z \subset H$ isomorphe à $\mathcal{C}(X)$, l'espace H est isomorphe à $\mathcal{C}(X)$.*

Le théorème suivant définit la nature isométrique des sous-espaces complémentés de $\mathcal{C}(X)$ qui sont image d'une projection de norme 1. Il a été obtenu indépendemment par LINDENSTRAUSS et WULBERT [6], et par JONAC et SAMUEL [4].

THÉORÈME 4. - Soient X un espace compact, et $H \subset \mathcal{C}(X)$ un sous-espace de X, image d'une projection de norme 1 ; alors H est un C_σ-espace. Inversement, soit H un C_σ-espace, il existe un espace compact X, un sous-espace $Z \subset \mathcal{C}(X)$ isométrique à H, et une projection de norme 1 de $\mathcal{C}(X)$ sur Z.

Le théorème suivant, de [2], donne la structure des C_σ-espaces.

THÉORÈME 5. - Soit V un prédual de L-espace ; les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) V est un C_σ-espace,

(b) $\overline{\mathcal{E}(B(V'))} \subset \mathcal{E}(B(V)) \cup \{0\}$,

(c) V est isométrique à l'espace des fonctions continues sur $\overline{\mathcal{E}(B(V'))}$ vérifiant $f(-x) = -f(x)$, pour tout x dans $\overline{\mathcal{E}(B(V'))}$.

2. Principaux résultats.

Le résultat suivant est sans doute connu, mais, faute de référence, nous en donnons une démonstration.

LEMME 6. - Soient X un espace compact muni d'une involution σ, et E un sous-espace séparable de $\mathcal{C}_\sigma(X)$; pour que E soit complémenté dans $\mathcal{C}(X)$, il faut et il suffit que E soit complémenté dans $\mathcal{C}_\sigma(Y)$, où Y désigne l'espace compact $\overline{\mathcal{E}(B(E'))}$ muni de l'involution $\sigma(x) = -x$, si P_x est une projection continue de $\mathcal{C}_\sigma(X)$ sur E, il existe une projection P_y de $\mathcal{C}_\sigma(Y)$ sur E qui vérifie $\|P_y\| \leq \|P_x\|$.

Démonstration. - On peut, sans diminuer la généralité, supposer que l'espace E sépare les points de X, et que l'espace X est métrisable. Sinon, on définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par

$$(x \,\mathcal{R}\, y) \Longleftrightarrow (f(x) = f(y) \ , \ \forall f \in E) .$$

L'espace $X_0 = X/\mathcal{R}$ est compact, l'involution σ passe au quotient puisque

$$(x \,\mathcal{R}\, y) \text{ est équivalent à } (\sigma(x) \,\mathcal{R}\, \sigma(y)) .$$

Notons δ l'involution quotient $\sigma/\mathcal{R}$. L'espace E s'identifie isométriquement à un sous-espace E_0 de $\mathcal{C}_\delta(X_0)$. Il existe une projection P_0 de $\mathcal{C}_\delta(X_0)$ sur E_0, avec $\|P_0\| \leq \|P\|$, puisque l'espace $\mathcal{C}_\delta(X_0)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{C}_\sigma(X)$. De plus, comme E est séparable, l'espace $X/\mathcal{R}$ est métrisable.

Ceci étant, soit Φ le plongement canonique naturel de X dans l'espace E', défini par $\Phi(x)(f) = f(x)$, $\forall f \in E$. Il est clair que Φ est une homéomorphie de X sur son image, et de plus $\Phi(X) \subset B(E')$. Une application du théorème de

Krejn-Mil'man montre que $\Phi(X) \supset \overline{\mathcal{E}(B(E'))}$. Soit $Y \subset X$ l'image réciproque de $\overline{\mathcal{E}(B(E'))}$ par Φ , l'ensemble Y est un sous-compact de X stable par l'involution σ ; d'après le théorème 4, il existe un sous-espace Z de $\mathcal{C}_\sigma(X)$ isométrique à $\mathcal{C}_\sigma(Y)$ qui est l'image de $\mathcal{C}_\sigma(X)$ par une projection contractante π . Si E est complémenté dans l'espace $\mathcal{C}_\sigma(Y)$, on pose $P_x = P_y \circ \pi$ après avoir effectué les identifications nécessaires. Inversement, si E est complémenté dans $\mathcal{C}_\sigma(X)$, la trace de P_x sur Z est la projection P_y recherchée, et elle vérifie $\|P_y\| \leqslant \|P_x\|$.

THÉORÈME 7. - Soient X un espace compact, et $H \subset \mathcal{C}(X)$,un sous-espace séparable image d'une projection contractante. Si l'espace H' n'est pas séparable pour sa norme, l'espace H est isomorphe à $\mathcal{C}([0\ ,\ 1])$.

Démonstration. - D'après le lemme précédent, on peut remplacer X par l'espace $\overline{\mathcal{E}(B(H'))}$; par suite, on peut supposer que le compact X est métrisable. Comme l'espace H' n'est pas séparable, l'ensemble $\mathcal{E}(B(H'))$ n'est pas dénombrable, et a fortiori $\overline{\mathcal{E}(B(H'))}$. D'après le théorème 2, l'espace $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{E}(B(H'))})$ est isomorphe à $\mathcal{C}([0\ ,\ 1])$. D'autre part, comme $\overline{\mathcal{E}(B(H'))} = \mathcal{E}(B(H')) \cup \{0\}$ est un compact, métrisable, non dénombrable, il existe un sous-compact $Y \subset \mathcal{E}(B(H'))$, homéomorphe à l'ensemble de Cantor, et tel que $Y \cap \sigma(Y) = \emptyset$. D'après le théorème de Dugundji de [1], et le théorème 2, l'espace H contient un sous-espace complémenté isomorphe à l'espace $\mathcal{C}([0\ ,\ 1])$; par le théorème 3 , on conclut que H est isomorphe à l'espace $\mathcal{C}([0\ ,\ 1])$.

LEMME 8. - Soit V' un espace dual de dimension infinie, isométrique à un espace $L^1(\mu)$; les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) L'espace V' est séparable pour sa norme ;
(b) L'espace V' est isométrique à l'espace $\ell^1(\underset{\sim}{N})$;
(c) L'ensemble $\mathcal{E}(B(V'))$ est dénombrable infini.

Démonstration. - (b) implique trivialement (a).

(a) $\Longrightarrow$ (c) : Soient p et q deux points extrémaux de la boule $B(V')$, avec $p \neq q$; comme les points extrémaux de la boule unité de l'espace $L^1(\mu)$ correspondent aux atomes de la mesure μ , il est clair que $\|p - q\| = 2$. Par conséquent, l'ensemble des points extrémaux de $B(V')$ est fini ou dénombrable. Comme on a supposé que l'espace V' est de dimension infinie, l'ensemble $\mathcal{E}(B(V'))$ est donc infini.

(c) $\Longrightarrow$ (b) : Comme l'ensemble des points extrémaux de $B(V')$ est dénombrable, l'expace V' est séparable d'après le théorème 3.1 de [5] ; de plus, l'ensemble $\mathcal{E}(B(V'))$ est dense dans l'espace V' muni de la topologie de la norme. La conclusion recherchée est alors une conséquence du théorème 3 de [3].

Si ω est un espace localement compact, on notera $C_0(\omega)$ l'espace des fonctions réelles continues sur ω, et nulles à l'infini. Un espace de Banach V est dit un *C_0-espace* s'il existe un espace localement compact ω, tel que V soit isométrique à l'espace $C_0(\omega)$.

LEMME 9. - *Soit V un C_σ-espace ; pour que V soit un C_0-espace, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert $\omega \subset \mathcal{E}(B(V'))$ tel que*

$$\omega \cap \sigma(\omega) = \emptyset \quad \text{et} \quad \omega \cup \sigma(\omega) = \mathcal{E}[\mathcal{B}(V')] .$$

Démonstration. - La condition étant évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Soient V un C_σ-espace, et ω un ouvert de $\mathcal{E}(B(V'))$ vérifiant les conditions du lemme. L'ouvert ω est localement compact, et l'opérateur T, défini par $T(f) = f_{|\omega}$, pour tout f dans V, est une isométrie de V sur un sous-espace de $\mathcal{C}_0(\omega)$. En effet, le théorème 5 (b) montre que, pour toute $f \in V$, la fonction $f_{|\omega} \in \mathcal{C}_0(\omega)$; d'autre part, comme $\omega \cup \sigma\omega = \mathcal{E}[\mathcal{B}(V')]$, le principe du maximum de Bauer montre que l'on a $\|f\| = \|f_{|\omega}\|$.

Soit maintenant une fonction f dans $\mathcal{C}_0(\omega)$; on note $\tilde{f}$ la fonction définie sur $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(V')]}$ par

$$\tilde{f}_{|\omega} = f \quad ; \quad \tilde{f}_{|\sigma\omega} = - f \quad ; \quad \tilde{f}(0) = 0 .$$

Cette fonction est continue sur $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(V')]}$ et elle est σ-impaires ; d'après le théorème 5 (c), $\tilde{f}$ peut être considérée comme un élément de V, et il est clair que $T(\tilde{f}) = f$. par suite, T est une isométrie linéaire de V sur $\mathcal{C}_0(\omega)$.

THÉORÈME 10. - *Si X est un espace compact, et $H \subset \mathcal{C}(X)$ un sous-espace séparable, image d'une projection contractante. Si l'espace H' est séparable pour sa norme, l'espace H est isomorphe à un espace $\mathcal{C}(K)$, où K est un compact dénombrable.*

Démonstration. - D'après le lemme 8, l'ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{B}(H')]$ est dénombrable ; comme $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(H')]} \subset \mathcal{E}[\mathcal{B}(H')] \cup \{0\}$, le compact $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(H')]}$ est aussi dénombrable. D'après le théorème 1, il existe un ordinal $\alpha < \Omega$ et un nombre entier $n \in \underline{N}$, tel que l'espace $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(H')]} \cup \{0\}$ soit homomorphe au segment d'ordre $[0, \omega^{\alpha.n}+1)$. L'involution $x \to -x$, définie sur $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(H')]} \cup \{0\}$, se transporte en une involution σ, définie sur $[0, \omega^{\alpha.n} + 1)$, et qui admet un seul point fixe. Soit β_0 ce point là. On note ω l'ensemble défini par

$$\omega = \{\beta \in [0, \omega^{\alpha.n} + 1) \; ; \; \sigma(\beta) > \beta\} .$$

Comme l'involution σ n'est pas réduite à l'identité, l'ensemble ω est un ouvert non vide de $[0, \omega^{\alpha.n} + 1)$ qui vérifie les conditions du lemme 9.

En effet, l'involution ne peut avoir qu'un seul point fixe ; comme $\omega = \emptyset$ implique $\sigma(0) = 0$, ceci prouve que 0 est l'unique point fixe de σ . D'autre part, $\sigma(1) \leq 1$; comme σ est injective, $\sigma(1) \neq 0$; par conséquent, $\sigma(1) = 1$, ce qui montre que σ admet au moins deux points fixes distincts. Maintenant, il est facile de vérifier que l'on a

$$\omega \cap \sigma(\omega) = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \omega \cup \sigma(\omega) = [0 , \omega^{\alpha.n} + 1] \setminus \{\mu_0\} .$$

L'espace H est donc isométrique à l'espace $\mathcal{C}_0(\omega)$ d'après le lemme 9 . Comme ω est un espace localement compact, métrisable et dénombrable, il est facile de démontrer que l'espace $\mathcal{C}_0(\omega)$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{C}_0(\omega^*)$, où ω^* est le compactifié d'Aleksandrov de ω . Ce qui achève la démonstration du théorème.

Les théorèmes 7 et 10 démontrent le résultat annoncé au début de ce travail, à savoir :

Un sous-espace séparable de $\mathcal{C}(X)$, image d'une projection contractante, est isomorphe à l'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues sur un espace compact métrisable.

Remarques.

(a) Le théorème 10 montre aussi le fait suivant : Tout $\mathcal{C}_\sigma$-espace, dont le dual est séparable pour sa norme, est isométrique à l'espace des fonctions continues sur un espace localement compact, nulles à l'infini.

(b) Depuis la rédaction de cet article, nous avons appris que R. V. McPHERSON et H. E. LACEY, dans un article récent [7], ont démontré la remarque (a).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUGUNDJI (J.). - An extension of Tietze's theorem, Pacific J. of Math., t. 1, 1951, p. 353-367.

[2] FAKHOURY (H.). - Préduaux de L-espaces ; notion de "centre", J. of funct. Anal. (à paraître).

[3] FULLERTON (R.). - A characterization of L-spaces, Fund. Math., Warszawa, t. 38, 1951, p. 127-136.

[4] JONAC (M.-L.) et SAMUEL (C.). - Sur les sous-espaces complémentés de C(S) , Bull. Sc. math., 2e série, t. 94, 1970, p. 159-163.

[5] LINDENSTRAUSS (J.) and PHELPS (R. P.). - Extreme point properties of convex bodies in reflexive Banach spaces, Israel J. Math., t. 6, 1968, p. 39-48.

[6] LINDENSTRAUSS (J.) and WULBERT (D. E.). - On the classification of Banach spaces whose duals are L_1-spaces, J. of funct. Anal., t. 4, 1969, p. 332-349.

[7] McPHERSON (R. V.) and LACEY (H. E.). - On certain classes of Banach spaces whose duals on abstract L-spaces, J. of funct. Anal. (à paraître).

[8] MAZURKIEWIC (S.) et SIERPINSKI (W.). - Contribution à la topologie des ensembles dénombrables, Fund. Math., Warszawa, t. 1, 1920, p. 17-27.

[9] MILUTIN (A. A.). - Isomorphisms of spaces of continuous functions on compact of power continum [en russe], Teor. Funkcii Funkcional. Anal. i Priložen., t. 2, 1966, p. 150-156.

[10] PEŁCZYNSKI (A.). - Projections in certain Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 19, 1960, p. 209-228.

[11] PEŁCZYNSKI (A.). - On $C(S)$-subspaces of separable Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 31, 1968, p. 513-522.

[12] SAMUEL (C.). - Sur certains espaces $C_\sigma(S)$ et sur les sous-espaces complémentés de $C(S)$, Bull. Sc. math., 2e série, t. 95, 1971, p. 65-82.

(Texte reçu le 2 septembre 1971)

Hicham FAKHOURY
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75 - PARIS 05