SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

JEAN SAINT-RAYMOND

Prolongement d'une distance

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, nº 2 (1970-1971), exp. nº C4, p. C1-C5
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A12_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 4, 5 p.

PROLONGEMENT D'UNE DISTANCE

par Jean SAINT-RAYMOND

Le but de cette note est de résoudre le problème suivant :

PROBLÈME. - Si F est un fermé d'un espace métrisable E, et d une distance sur F qui définit la topologie de sous-espace, existe-t-il une distance δ sur E, prolongeant d, et définissant la topologie de E ?

LEMME 1. - Soient E un espace métrisable, et F un fermé de E. Si d est une distance sur F, continue sur $F \times F$, il existe sur E un écart g, fini et continu sur $E \times E$, qui prolonge d.

Si F est vide, il suffit de prendre $g = 0$.

Si F n'est pas vide, soit ω un point de F. Posons

$$f_y(x) = d(x , y) - d(x , \omega) \quad .$$

La fonction f_y est continue sur F, pour tout $y \in F$, et bornée, car

$$|f_y(x)| \leqslant d(y , \omega) \quad .$$

Il existe donc un prolongement continu $\overline{f}_y$ au compactifié de Stone-Čech $\check{F}$ de F. Si l'on pose, pour $x \in \check{F}$ et $y \in F$,

$$\psi(x , y) = \overline{f}_y(x) \quad ,$$

ψ est une fonction numérique continue sur $\check{F} \times F$. En effet, pour tout x de F, et pour y et y' dans F, on a

$$|f_{y'}(x) - f_y(x)| \leqslant d(y , y') \quad .$$

Comme F est dense dans $\check{F}$, l'inégalité est valable pour tout x de $\check{F}$. Alors

$$\begin{aligned} |\psi(x' , y') - \psi(x , y)| &\leqslant |\psi(x' , y') - \psi(x' , y)| + |\psi(x' , y) - \psi(x , y)| \\ &\leqslant d(y , y') + |\overline{f}_y(x') - \overline{f}_y(x)| \quad , \end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de ψ au point (x , y). Comme E est paracompact et $\check{F}$ compact, $\check{F} \times E$ est paracompact, donc normal. De plus, $\check{F} \times F$ est fermé dans $\check{F} \times E$; il existe donc une fonction numérique continue φ sur $\check{F} \times E$, qui prolonge ψ.

Comme $\check{F}$ est compact, pour tout $\alpha \in E$,

$$M(\alpha) = \sup_{x \in F} |\varphi(x , \alpha)|$$

est fini. De plus, les fonctions $[\varphi(x , .)]_{x \in F}$ sont équicontinues en tout point de E. Par conséquent, si l'on pose, pour tout couple (α , β) de points de E,

$$g(\alpha , \beta) = \sup_{x \in F} |\varphi(x , \alpha) - \varphi(x , \beta)| \quad ,$$

$g(\alpha , \beta)$ est majoré par $M(\alpha) + M(\beta)$, donc fini, et continu. Chacun des $g_x(\alpha , \beta) = |\varphi(x , \alpha) - \varphi(x , \beta)|$ est un écart ; il en est donc de même de g.

Si α et β appartiennent à F, on a

$$\begin{cases} |\varphi(x , \alpha) - \varphi(x , \beta)| = |d(x , \alpha) - d(x , \omega) - d(x , \beta) + d(x , \omega)| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant d(\alpha , \beta) \quad , \\ |\varphi(\alpha , \alpha) - \varphi(\alpha , \beta)| = d(\alpha , \beta) \quad . \end{cases}$$

Ceci montre que l'écart fini et continu g prolonge d, et termine la démonstration du lemme.

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> E <u>un espace métrisable, et</u> F <u>un sous-espace fermé de</u> E. <u>Si les distances</u> d_1 <u>sur</u> E <u>et</u> d <u>sur</u> F <u>définissent les topologies de</u> E <u>et de</u> F, <u>et si, pour tout couple</u> (x , y) <u>de points de</u> F, <u>on a</u>

$$d(x , y) \leqslant d_1(x , y) \quad ,$$

<u>il existe sur</u> E <u>une distance</u> δ, <u>inférieure à</u> d_1, <u>compatible avec la topologie de</u> E, <u>et qui prolonge</u> d.

Définissons sur $E \times E$ la fonction numérique h par

$$h(\alpha , \beta) = \inf_{x,y \in F} [d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \beta)] \quad .$$

Il est clair que

$$h(\alpha , \beta) \geqslant d_1(\alpha , F) + d_1(\beta , F) \quad ,$$

et que

$$h(\alpha , \beta) = h(\beta , \alpha) \quad .$$

Si α et β appartiennent à F, on a

$$h(\alpha , \beta) \leqslant d_1(\alpha , \alpha) + d(\alpha , \beta) + d_1(\beta , \beta) = d(\alpha , \beta) \quad ,$$

$$d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \beta) \geqslant d(\alpha , x) + d(x , y) + d(y , \beta) \geqslant d(\alpha , \beta) \quad .$$

On en déduit que h prolonge d. De plus, comme

$$h(\alpha , \gamma) \leqslant d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \gamma)$$
$$\leqslant d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \beta) + d_1(\beta , \gamma) \quad ,$$

on a

$$h(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \beta) + d_1(\beta , \gamma) \quad .$$

Posons maintenant

$$\delta(\alpha , \beta) = \inf[h(\alpha , \beta) , d_1(\alpha , \beta)] \quad .$$

Il est clair que $\delta \leqslant d_1$, et que δ prolonge d , puisque h prolonge d et que d est inférieur à d_1 sur F .

Si $\delta(\alpha , \beta) = 0$, ou bien $\alpha = \beta$, ou bien $h(\alpha , \beta) = 0$. Dans ce dernier cas, α et β appartiennent à F , puisque $h(\alpha , \beta) \leqslant d_1(\alpha , F) + d_1(\beta , F)$. Mais alors $d(\alpha , \beta) = h(\alpha , \beta) = 0$, ce qui entraîne $\alpha = \beta$.

Pour vérifier que δ est une distance sur E , il reste à vérifier l'inégalité du triangle.

- Si $\delta(\alpha , \beta) = d_1(\alpha , \beta)$ et $\delta(\beta , \gamma) = d_1(\beta , \gamma)$, on a
$$\delta(\alpha , \gamma) \leqslant d_1(\alpha , \gamma) \leqslant d_1(\alpha , \beta) + d_1(\beta , \gamma) \leqslant \delta(\alpha , \beta) + \delta(\beta , \gamma) \quad ;$$
- Si $\delta(\alpha , \beta) = h(\alpha , \beta)$ et $\delta(\beta , \gamma) = d_1(\beta , \gamma)$, on a
$$\delta(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \beta) + d_1(\beta , \gamma) \leqslant \delta(\alpha , \beta) + \delta(\beta , \gamma) \quad ;$$
- Si $\delta(\alpha , \beta) = h(\alpha , \beta)$ et $\delta(\beta , \gamma) = h(\beta , \gamma)$, on a
$$\delta(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \gamma) = \inf_{x,y\in F} [d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \gamma)] \quad .$$

Comme on a, quels que soient x , y , z , t dans F ,

$$d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \gamma)$$
$$\leqslant d_1(\alpha , x) + d(x , z) + d_1(z , t) + d(t , y) + d_1(y , \gamma)$$
$$\leqslant [d_1(\alpha , x) + d(x , z) + d_1(z , \beta)] + [d_1(\beta , t) + d(t , y) + d_1(y , \gamma)]$$

on en déduit

$$h(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \beta) + h(\beta , \gamma) \quad ,$$

et donc

$$\delta(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \beta) + h(\beta , \gamma) = \delta(\alpha , \beta) + \delta(\beta , \gamma) \quad .$$

δ est donc une distance sur E qui prolonge d . Comme $\delta \leqslant d_1$, pour montrer que δ est compatible avec la topologie de E , il suffit de montrer que toute suite (α_n) , telle que $\delta(\alpha_n , \alpha_0) \longrightarrow 0$, converge vers α_0 .

- Si $\alpha_0 \notin F$,

$$h(\alpha_0 , \alpha_n) \geqslant d_1(\alpha_0 , F) > 0 .$$

Donc, puisque $\delta(\alpha_n , \alpha_0) \to 0$, $d_1(\alpha_n , \alpha_0) \to 0$, et (α_n) converge vers α_0 .

- Si $\alpha_0 \in F$,

$$d_1(\alpha_n , F) \leqslant d_1(\alpha_n , \alpha_0) \qquad \text{et} \qquad d_1(\alpha_n , F) \leqslant h(\alpha_n , \alpha_0) .$$

Donc $d_1(\alpha_n , F) \leqslant \delta(\alpha_n , \alpha_0)$.

Il existe donc $x_n \in F$ tel que

$$d_1(\alpha_n , x_n) \leqslant 2d_1(\alpha_n , F) \leqslant 2\delta(\alpha_n , \alpha_0) .$$

On a alors

$$\begin{aligned} d(\alpha_0 , x_n) = \delta(\alpha_0 , x_n) &\leqslant \delta(\alpha_0 , \alpha_n) + \delta(\alpha_n , x_n) \\ &\leqslant \delta(\alpha_0 , \alpha_n) + d_1(\alpha_n , x_n) \leqslant 3\delta(\alpha_0 , \alpha_n) . \end{aligned}$$

On en déduit que (x_n) converge vers α_0 , donc que $d_1(\alpha_0 , x_n) \to 0$. Comme $d_1(x_n , \alpha_n) \to 0$, et que $d_1(\alpha_0 , \alpha_n) \leqslant d_1(\alpha_0 , x_n) + d_1(x_n , \alpha_n)$, (α_n) converge vers α_0 . Ceci achève la démonstration du théorème 2.

THÉORÈME 3. - Soient E un espace métrisable, et F un sous-espace fermé de E . Si d est une distance sur F compatible avec la topologie de F , il existe sur E une distance δ compatible avec la topologie et prolongeant d .

Soit d_0 une distance sur E , compatible avec la topologie. Il existe, en vertu du lemme 1, un écart g fini et continu sur E , qui prolonge d . Si l'on pose

$$d_1 = d_0 + g ,$$

d_1 est une distance continue sur E , majorant g , donc d , sur F . La topologie définie par d_1 est plus fine que la topologie initiale, puisque $d_1 \geqslant d_0$, et moins fine, puisque d_1 est continue. d_1 est donc compatible avec la topologie. Il suffit donc d'appliquer le théorème 3 pour obtenir le résultat.

Si on suppose de plus que E est complet pour d_0 , et F complet pour d , E est complet pour d_1 : en effet, toute suite de Cauchy pour d_1 est une suite de Cauchy pour d_0 , donc une suite convergente. Si (α_n) est alors une suite de Cauchy pour la distance δ définie à partir de d_1 et d dans la démonstration du théorème 3, la suite $(d_1(\alpha_n , F))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres réels. En effet,

$$|d_1(\alpha_n , F) - d_1(\alpha_p , F)| \leqslant d_1(\alpha_n , \alpha_p) ,$$

et

$$|d_1(\alpha_n , F) - d_1(\alpha_p , F)| \leqslant d_1(\alpha_n , F) + d_1(\alpha_p , F) \leqslant h(\alpha_n , \alpha_p) ,$$

ce qui entraîne

$$|d_1(\alpha_n , F) - d_1(\alpha_p , F)| \leqslant \delta(\alpha_n , \alpha_p) .$$

Il existe donc un nombre réel $\lambda \geqslant 0$, limite de la suite $(d_1(\alpha_n , F))$.

Si $\lambda = 0$, il existe, pour tout n , un point x_n de F tel que

$$d_1(x_n , \alpha_n) \leqslant 2d_1(\alpha_n , F) .$$

Comme $\delta(x_n , \alpha_n) \leqslant d_1(x_n , \alpha_n)$, (x_n) est une suite de Cauchy pour δ . Comme δ prolonge d , et que F est complet pour d , la suite (x_n) converge, et la suite (α_n) converge vers la même limite.

Si $\lambda > 0$, il existe un nombre N tel que, pour tout $n \geqslant N$ et tout $p \geqslant 0$, on ait

$$\begin{cases} d_1(\alpha_n , F) > \frac{\lambda}{2} , \\ \delta(\alpha_n , \alpha_{n+p}) < \lambda . \end{cases}$$

On a alors

$$\delta(\alpha_n , \alpha_{n+p}) < \lambda < d_1(\alpha_n , F) + d_1(\alpha_{n+p} , F) \leqslant h(\alpha_n , \alpha_{n+p}) .$$

Ceci entraîne $\delta(\alpha_n , \alpha_{n+p}) = d_1(\alpha_n , \alpha_{n+p})$, et la suite (α_n) est une suite de Cauchy pour d_1 , donc une suite convergente. E est donc complet pour δ .

Ceci achève de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - Soient E un espace métrisable, complet pour une distance compatible avec sa topologie, et F un sous-espace fermé. Si d est une distance compatible avec la topologie de F , pour laquelle F est complet, il existe sur E une distance δ , compatible avec la topologie, prolongeant d , et pour laquelle E est complet.

(Texte reçu le 18 novembre 1970)

Jean SAINT-RAYMOND
Ass. Fac. Sc. Paris
18 rue de Moscou
75 - PARIS 08