SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

JEAN SAINT-RAYMOND

Une caractérisation des $F_{\sigma\delta}$ d'un espace métrisable

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° C3, p. C1-C4

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A11_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 3, 4 p.

UNE CARACTÉRISATION DES $F_{\sigma\delta}$ D'UN ESPACE MÉTRISABLE

par Jean SAINT-RAYMOND

Il est immédiat que l'ensemble des points, où une suite de fonctions numériques continues sur un espace métrique converge vers 0, est un $F_{\sigma\delta}$. Nous montrerons que la réciproque est vraie, et nous en déduirons un corollaire, dont la démonstration directe ne semble pas facile.

DÉFINITION 1. - Une suite (f_n) de fonctions numériques continues sur un espace métrisable L sera dite adaptée à une partie X de L, si X est l'ensemble des points de L, où (f_n) converge vers 0.

DÉFINITION 2. - Une partie X d'un espace métrisable L sera dite de type (A), s'il existe une suite (f_n) de fonctions numériques continues sur L, adaptée à X.

LEMME 3. - Dans un espace métrisable, tout ensemble de type (A) est un $F_{\sigma\delta}$.

Soit (f_n) une suite adaptée à un ensemble X de type (A). Le lemme résulte de l'égalité

$$X = \bigcap_n \Big[\bigcup_p \Big(\bigcap_q \{x \mid |f_{p+q}(x)| \leqslant \tfrac{1}{n}\}\Big)\Big] ,$$

puisque $\{x \mid |f_{p+q}(x)| \leqslant \frac{1}{n}\}$ est fermé.

LEMME 4. - L'intersection d'une suite (X_p) de parties de type (A) d'un espace métrisable L est de type (A).

Choisissons, pour chaque p, une suite $(f_{n,p})_{n\in\underline{N}}$, adaptée à X_p. En remplaçant au besoin $f_{n,p}$ par $\inf(1 , |f_{n,p}|)$, on peut supposer que toutes les $f_{n,p}$ prennent leurs valeurs dans $[0 , 1]$. En posant alors

$$g_n(x) = \sum_{p\in\underline{N}} 2^{-p} f_{n,p}(x) ,$$

on définit une suite (g_n) de fonctions continues sur L. Les inégalités

$$2^{-p} f_{n,p}(x) \leqslant g_n(x) \leqslant 2^{-p} + \sum_{q\leqslant p} 2^{-q} f_{n,q}(x)$$

entraînent que $g_n(x)$ converge vers 0 si, et seulement si, $f_{n,p}(x)$ converge vers 0 pour tout p . (g_n) est donc adaptée à $X = \bigcap X_p$, qui est de type (A).

LEMME 5. - Si X est différence de deux fermés de l'espace métrisable L , il existe une suite décroissante (g_n) de fonctions positives continues, telle que :

(i) Pour tout x de X , il existe un entier n tel que $g_n(x) = 0$;
(ii) Si x n'appartient pas à X , $\inf\{g_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} > 0$.

Une telle suite est clairement adaptée à X . Soit d une distance compatible avec la topologie de L . Pour tout fermé F de L , la distance $d(x , F)$ du point x à F est une fonction continue de x . Si X est différence des fermés F et H ,

$$X = F \cap \complement H \quad .$$

On peut poser

$$g_n(x) = d(x , F) + \sup[0 ; 1 - nd(x , H)] \quad .$$

Il est aisé de vérifier que (g_n) satisfait aux conditions de l'énoncé.

LEMME 6. - Si (X_p) est une suite de parties deux à deux disjointes d'un espace métrisable L , différences de fermés, la réunion des X_p est de type (A).

Choisissons, pour chaque p , une suite décroissante $(g_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions positives continues, vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme 5 relativement à X_p . La fonction $g_{n,p}$ ne s'annule pas hors de X_p , puisque $\inf\limits_n g_{n,p}(x) > 0$ si $x \notin X_p$.

Puisque $X_p \cap X_q = \emptyset$ si $p \neq q$, la fonction $g_{n,p} + g_{n,q}$ est strictement positive, quel que soit n . Posons alors

$$c_n(x) = \inf\{g_{n,p}(x) + g_{n,q}(x) \mid p < q \leqslant n\} \quad .$$

La fonction c_n est continue et strictement positive. De plus, comme la suite $(g_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,

$$c_{n+1}(x) \leqslant \inf\{g_{n,p}(x) + g_{n,q}(x) \mid p < q \leqslant n + 1\} \leqslant c_n(x) \quad .$$

On définit alors

$$f_n(x) = \left(n + \frac{1}{c_{n+1}(x)}\right) \inf\{g_{n,p}(x) \mid p \leqslant n\} \quad .$$

La fonction f_n est continue. On va démontrer que la suite (f_n) est adaptée à $X = \bigcup X_p$. Soit x un point de X ; il existe q tel que $x \in X_q$; en vertu de l'hypothèse (i) sur la suite $(g_{n,q})_{n\in\mathbb{N}}$ et de la décroissance, il existe un entier s tel que, pour tout $n \geqslant s$, $g_{n,q}(x) = 0$. Pour tout n supérieur à s et à q , on a donc $f_n(x) = 0$. La suite $f_n(x)$ converge donc vers 0 , si x appartient à X . Inversement, si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, il existe un entier s tel que, pour tout $n \geqslant s$, $f_n(x) \leqslant \frac{1}{3}$. Il existe donc, pour tout $n \geqslant s$, un entier p tel que

$$\text{(I)} \qquad \left(n + \frac{1}{c_{n+1}(x)}\right) g_{n,p}(x) \leqslant \frac{1}{3} \ .$$

On a alors

$$g_{n,p}(x) \leqslant \frac{c_{n+1}(x)}{3} \ .$$

Soit alors, pour tout $n \geqslant s$, $p(n)$ un entier vérifiant l'inégalité (I). Si $p(n) \neq p(n+1)$, on a

$$c_{n+1}(x) \leqslant g_{n+1,p(n)}(x) + g_{n+1,p(n+1)}(x) \leqslant g_{n,p(n)}(x) + g_{n+1,p(n+1)}(x)$$

$$\leqslant \frac{c_{n+1}(x)}{3} + \frac{c_{n+2}(x)}{3} \leqslant \frac{2}{3} c_{n+1}(x) \quad ,$$

ce qui est incompatible avec $c_{n+1}(x) > 0$. Donc $p(n)$ est déterminé de façon unique, et l'on a

$$q = p(s) = p(s+1) = \ldots = p(n) = \ldots \ .$$

On déduit alors de (I) que, si $n \geqslant s$,

$$g_{n,q}(x) \leqslant \frac{1}{3n} \ .$$

La suite $(g_{n,q}(x))_{n\in\underset{\sim}{N}}$ converge donc vers 0 . Comme $(g_{n,q})_{n\in\underset{\sim}{N}}$ est adaptée à X_q , x appartient à X_q , donc à X . La suite (f_n) est donc adaptée à X , et X est de type (A).

THÉORÈME 7. - Dire qu'une partie X d'un espace métrisable L est un $F_{\sigma\delta}$, équivaut à dire qu'il est de type (A).

D'après le lemme 3, si X est de type (A), c'est un $F_{\sigma\delta}$. Inversement, en vertu du lemme 4, il suffit de démontrer que tout F_σ dans L est de type (A). Si Y est un F_σ , il est réunion d'une suite croissante $(H_n)_{n\geqslant 1}$ de fermés de L . On a alors, en posant $H_0 = \emptyset$,

$$Y = \bigcup_{n\geqslant 0} (H_{n+1} \cap \complement H_n) \ .$$

Les $H_{n+1} \cap \complement H_n$ sont des différences de fermés deux à deux disjointes. Le résultat découle alors du lemme 6.

COROLLAIRE 8. - La réunion de deux parties de type (A) d'un espace métrisable L est de type (A) dans L .

En effet, la réunion de deux $F_{\sigma\delta}$ est un $F_{\sigma\delta}$.

(Texte reçu le 18 novembre 1970)

Jean SAINT-RAYMOND
Ass. Fac. Sc. Paris
18 rue de Moscou
75 - PARIS 08