Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gustave Choquet

Opérations sur les espaces vectoriels topologiques métrisables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° C2, p. C1-C5

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A10_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 2, 5 p.

OPÉRATIONS SUR LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES MÉTRISABLES

par Gustave CHOQUET

La question suivante a été récemment posée oralement par R. C. JAMES :

Si X , Y sont deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Banach séparable B , avec $X \cap Y = \{0\}$, est-ce que la dimension algébrique du quotient $B/(X + Y)$ peut être infinie et dénombrable ?

Nous montrerons (corollaire 4) que la réponse est négative, ainsi que le conjecturait R. C. JAMES. Notre démonstration s'applique en fait à un cadre plus général, et elle conduit à plusieurs problèmes intéressants concernant les e. v. t. métrisables (sur $\underline{R}$) assez réguliers, tels que, par exemple, les espaces analytiques.

Une première partie, basée sur un théorème trop peu connu de BANACH, concerne les espaces séparables ; une seconde, basée sur le théorème classique de BANACH, concerne les espaces métrisables plus généraux.

Rappelons d'abord quelques définitions. Soient E un espace topologique, et X une partie de E .

On dira que X est *analytique*, si X est l'image de l'ensemble I des irrationnels de $[0 , 1]$ par une application continue de I dans E .

On dira que X possède la *propriété faible de Baire dans* E , s'il existe deux parties Y_1 , Y_2 de E , de 1re catégorie (i. e. maigre) dans E , et un ouvert Ω de E , tels que $X = (\Omega \cup Y_1) \setminus Y_2$. Il est immédiat, par induction transfinie, que l'ensemble des parties de E possédant la propriété faible de Baire est une tribu (stabilité par réunion dénombrable et passage au complémentaire) ; par exemple, toute partie borélienne de E a cette propriété. On démontre que toute partie analytique d'un espace métrisable E a la propriété faible de Baire dans E .

Rappelons enfin que E est appelé *espace de Baire*, si toute partie de E de 1re catégorie a un intérieur vide.

Voici, dans un cadre général, le théorème de Banach utilisé dans notre première partie (voir [1], p. 21-23 ; voir aussi [2], § 5, exercice 27) :

THÉORÈME 1. - *Soit* G *un groupe topologique, et soit* H *un sous-groupe de* G *possédant la propriété faible de Baire dans* G *. Alors, ou bien* H *est de 1re catégorie dans* G *, ou bien* G *est de Baire, et* H *est à la fois ouvert et fermé dans* G *(d'où* $H = G$ *, si* G *est connexe).*

Rappelons sa démonstration : Supposons que H ne soit pas de 1re catégorie dans G ; alors G n'est pas non plus de 1re catégorie dans lui-même et, comme c'est un groupe, G est un espace de Baire. Comme H a la propriété faible de Baire dans G, et n'est pas de 1re catégorie, il existe un point $a \in H$, et un voisinage ouvert Ω de a dans G, tel que l'ensemble non vide $Y = \Omega \setminus (H \cap \Omega)$ soit de 1re catégorie. Comme toute translation est une homéomorphie de G, la même propriété a lieu pour tout $x \in H$, et en particulier pour $x = e$, élément neutre de G.

Supposons donc que l'ouvert Ω choisi contienne e, et supposons Ω symétrique, ce que l'on peut faire en remplaçant Ω par $\Omega \cap \Omega^{-1}$. Si l'on peut montrer que $\Omega \subset H$, on aura montré que H est voisinage de e, donc aussi de chacun de ses points ; donc H sera un sous-groupe ouvert de G (donc aussi fermé).

Soit donc $x \in \Omega$; posons $\Omega' = x\Omega \cap \Omega$; c'est un sous-groupe ouvert non vide de Ω ; or on a

$$(\Omega' \setminus H) \subset (\Omega \setminus H) \qquad \text{et} \qquad (\Omega' \setminus xH) \subset (x\Omega \setminus xH) = x(\Omega \setminus H) \quad .$$

Donc $(\Omega' \setminus H)$ et $(\Omega' \setminus xH)$ sont de 1re catégorie, d'où $H \cap xH$ non vide, ce qui entraîne $x \in H$.

COROLLAIRE 2. - <u>Tout e. v. t. métrisable analytique</u> E <u>est, ou bien complet, ou bien de 1re catégorie dans lui-même</u>.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit d'appliquer le théorème 1 avec $H = E$ et $G =$ (complété de E).

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> X <u>une partie analytique d'un e. v. t. métrisable complet</u> E ; <u>et soit</u> H <u>l'espace vectoriel engendré par</u> X ; <u>alors</u> :

- <u>Ou bien</u> H <u>est lui-même complet</u> ;
- <u>Ou bien</u> H <u>est de 1re catégorie dans lui-même, et alors l'espace quotient</u> E/H <u>a une dimension algébrique</u> > (<u>dénombrable</u>).

<u>Démonstration</u>. - Montrons d'abord que H est analytique : L'ensemble $Y = \{\lambda x \ ; \ \lambda \in \underset{\sim}{R} \ , \ x \in X\}$ est une image continue de $\underset{\sim}{R} \times X$, donc est analytique. Pour tout entier n, l'ensemble $Y_n = \underbrace{Y + \dots + Y}_{n \text{ fois}}$ est une image continue de $\underbrace{Y \times Y \times \dots \times Y}_{n \text{ fois}}$, donc est analytique. Enfin $H = \bigcup\limits_n Y_n$, donc H est analytique.

1° Si E/H est de dimension 1, on peut l'identifier à $\underset{\sim}{R}$; soit alors φ l'application canonique de E sur $E/H = \underset{\sim}{R}$. Pour tout ouvert ω de $\underset{\sim}{R}$, les ensembles $\varphi^{-1}(\omega)$ et $\varphi^{-1}(\complement\omega)$ sont analytiques (comme somme vectorielle de deux ensembles analytiques), et comme ils sont complémentaires dans E, ils sont boréliens ; donc φ est mesurable (B) ; il en résulte que φ est continue (voir le théorème 4, p. 23, dans [1]) ; donc H est fermé dans E, donc est complet.

2° Supposons E/H de dimension n finie, et soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ une base d'un espace supplémentaire à H dans E. L'espace vectoriel, engendré par H et les vecteurs a_i pour $i < n$, est analytique et de codimension 1, donc ce qui précède montre que cet espace est fermé dans E. Un raisonnement par récurrence montre alors que H est fermé dans E.

3° Supposons que E/H soit de dimension algébrique dénombrable, et soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base d'un sous-espace supplémentaire de H. Pour tout entier n, soit H_n l'espace engendré par H et les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$. C'est la somme de H et d'un ensemble analytique, donc H_n est analytique, et comme $H_n \neq E$, H_n est de 1re catégorie dans E, d'après le corollaire 2. Or $E = \bigcup_n H_n$, donc E est aussi de 1re catégorie, ce qui est incompatible avec le fait que E est complet.

D'où le théorème, grâce au corollaire 2.

COROLLAIRE 4. - *Soit* (X_n) *une suite finie ou infinie de sous-espaces séparables fermés d'un e. v. t. métrisable complet* E, *et soit* H *l'espace vectoriel engendré par* $\bigcup_n X_n$.

- *Si* E/H *est de dimension finie,* X *est fermé* ;
- *Si* E/H *est de dimension infinie, cette dimension est* $>$ (*dénombrable*).

Nous allons maintenant étendre une partie de ces énoncés à certains espaces métrisables non séparables.

Rappelons d'abord le théorème classique de Banach :

Soient E, F *deux e. v. t. métrisables sur* $\mathbb{R}$, *le premier* E *étant complet* ; *et soit* φ *une application linéaire continue de* E *dans* F. *Alors, ou bien* $\varphi(E)$ *est de 1re catégorie dans lui-même, ou bien* $\varphi(E)$ *est complet, et alors* φ *est ouverte de* E *sur* $\varphi(E)$ (*autrement dit, la bijection canonique de* $E/\varphi^{-1}(0)$ *sur* $\varphi(E)$ *est bicontinue*).

On va en déduire aisément l'extension cherchée :

THÉORÈME 5. - *Soit* (X_n) *une suite finie ou infinie de sous-espaces fermés d'un e. v. t. métrisable complet* E, *et soit* H *l'espace vectoriel engendré par les* X_n ; *alors* :

- *Ou bien* H *est lui-même complet* ;
- *Ou bien* H *est de 1re catégorie dans lui-même, et alors l'espace quotient* E/H *a une dimension algébrique* $>$ (*dénombrable*).

Démonstration. - Notons $H_n = (X_1 + \ldots + X_n)$; c'est l'image continue de $X_1 \times \ldots \times X_n$ par une application linéaire continue, donc, d'après le théorème de Banach, H_n est complet ou est de 1re catégorie dans lui-même.

La suite des H_n est croissante, et $H = \bigcup_n H_n$; donc, ou bien à partir d'un certain rang tous les H_n sont identiques et complets, et alors H est complet ; ou bien H est de 1re catégorie dans lui-même.

Plaçons-nous dans ce second cas, et supposons que E/H ait une base algébrique finie ou dénombrable ; soit alors $e_1 , e_2 , \ldots$ une telle base. Soit K_p l'espace vectoriel engendré par $\{e_1 , e_2 , \ldots , e_p\}$; l'espace vectoriel $(H_p + K_q)$ est image continue de $(X_1 \times \ldots \times X_p) \times K_q$ par une application linéaire continue, donc, ou bien est complet, ou bien est de 1re catégorie dans lui-même.

Si $\dim(E/H) = n < \infty$, $E = \bigcup_p (H_p + K_n)$, donc, comme E est complet, il existe un p_0 tel que $H_{p_0} + K_n = E$. Or il existe un quotient complet Y_{p_0} de $X_1 \times \ldots \times X_{p_0}$ tel que H_{p_0} soit image continue injective de Y_{p_0} par une application linéaire continue φ ; soit alors ψ l'application linéaire de $(Y_{p_0} \times K_n)$ sur $(H_{p_0} + K_n)$, dont les traces sur Y_{p_0} et K_n respectivement sont φ et l'identité. C'est une bijection continue de $(Y_{p_0} \times K_n)$ sur E ; donc, d'après le théorème de Banach, c'est un isomorphisme ; en particulier, φ est aussi bicontinue, donc H_{p_0} est complet ; et comme $H_p = H_{p_0}$ pour tout $p > p_0$, l'espace $H = H_{p_0}$ est complet, contrairement à l'hypothèse.

Si $\dim(E/H)$ est infinie dénombrable, $E = \bigcup_p (H_p + K_p)$ et la suite des $(H_p + K_p)$ est strictement croissante ; comme chacun des $(H_p + K_p)$ est complet ou de 1re catégorie dans lui-même, ceci est en contradiction avec le fait que E est complet.

Voici maintenant plusieurs problèmes que suggèrent les énoncés qui précèdent.

Problème 6. - Peut-on préciser les énoncés 3 (ou 4) et 5 en démontrant que, lorsque $\dim E/H = \infty$, cette dimension a au moins la puissance du continu ?

Problème 7. - Si A est un e. v. t. métrisable séparable complet, B un e. v. t. métrisable, et $f \in L(A , B)$, l'espace $f(A)$ est borélien dans B , car c'est l'image d'un espace polonais (à savoir $A/f^{-1}(0)$) par une injection continue. Cette remarque conduit au problème suivant :

Si X est un sous-espace vectoriel borélien d'un e. v. t. métrisable séparable complet B , trouver un critère pour qu'il existe un e. v. t. métrisable séparable complet A et une $f \in L(A , B)$ telle que $X = f(A)$.

Même question dans le cadre des espaces de Banach séparables. Notons que tout borélien X de B ne convient pas, puisque, par exemple, X ne peut pas avoir une base algébrique infinie dénombrable.

Problème 8. - Que dire du caractère borélien de l'image $f(A)$ d'un e. v. t. métrisable complet non séparable A dans un e. v. t. métrisable B par une $f \in L(A , B)$?

Problème 9. - Désignons par $\mathfrak{B}$ la plus petite classe d'e. v. t. métrisables qui contient tous les espaces complets et est stable par les opérations suivantes : image linéaire continue, intersection dénombrable, réunion dénombrable de suites croissantes.

Est-ce que tout $X \in \mathfrak{B}$ a la propriété faible de Baire dans son complété $\hat{X}$? Si X n'est pas complet, que dire de la dimension algébrique de $\hat{X}/X$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BANACH (Stefan). - Théorie des opérations linéaires. - Warszawa, 1932 (Monografje matematyczne, 1).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, chapitre 9. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

(Texte reçu le 18 novembre 1970)

Gustave CHOQUET
16 avenue d'Alembert
92 - ANTONY