SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

BRENDA TAYLOR-MACGIBBON

Un critère de métrisabilité d'un convexe compact X à partir de $E(X)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, nº 1 (1970-1971), exp. nº 13, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_1_A9_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 13, 4 p.

4 février 1971

UN CRITÈRE DE MÉTRISABILITÉ D'UN CONVEXE COMPACT X À PARTIR DE $\mathcal{E}(X)$

par Brenda TAYLOR-MacGIBBON

Soit E un espace localement convexe séparé, et soit X une partie convexe compacte de E. Désignons par $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des points extrémaux de X. Le but de cet exposé est d'annoncer le résultat suivant : $\mathcal{E}(X)$ n'est une partie de Baire (ou plus généralement une partie Z-souslinienne) de X que si X est métrisable.

Ensuite, nous allons donner une réponse à une question de FAKHOURY [4] concernant l'existence d'un simplexe X tel que $\mathcal{E}(X)$ soit un sous-ensemble $\mathcal{K}_{\sigma\delta}$ de X, sans que $\mathcal{E}(X)$ soit un $\mathcal{G}_\delta$ de $\overline{\mathcal{E}(X)}$ (la fermeture de $\mathcal{E}(X)$ dans X).

Nous publierons les démonstrations ultérieurement. Nous remercions J. JAYNE de nous avoir communiqué son manuscrit non encore publié [6].

Soit Y un espace topologique séparé.

Définition 1. - F est un sous-ensemble de zéros de Y s'il existe une fonction continue $f : Y \to \mathbb{R}$ telle que $F = \{y \in Y ; f(y) = 0\}$.

On notera $Z(Y)$ la famille de tous les sous-ensembles de zéros de Y.

Définition 2. - $\mathcal{B}(Z(Y))$ désigne la plus petite famille de sous-ensembles de Y telle que $\mathcal{B}(Z(Y)) \supset Z(Y)$ et telle que $\mathcal{B}(Z(Y))$ soit stable par intersection dénombrable et réunion dénombrable. On appelle les éléments de $\mathcal{B}(Z(Y))$ des parties de Baire de Y.

Définition 3. - A est une partie Z-souslinienne de Y, si A est un noyau d'un système déterminant sur $Z(Y)$ (voir [1]). $\mathcal{A}(Z(Y))$ désigne la famille de parties Z-sousliniennes de Y.

THÉORÈME 4. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° $\mathcal{E}(X)$ est une partie Z-souslinienne de X ;

2° X est métrisable ;

3° $\mathcal{E}(X)$ est une partie de Baire de X au plus de deuxième classe (c'est-à-dire un $Z_{\sigma\delta}$, une intersection dénombrable d'une réunion dénombrable d'ensembles de zéros de X).

La démonstration utilise un théorème de CORSON [3], et un théorème de métrisation de JAYNE (voir [6], et l'appendice).

COROLLAIRE 5. - Supposons que $\mathcal{E}(X)$ soit Lindelöf. Alors $\mathcal{E}(X)$ est un $\mathcal{G}_\delta$ dans X si, et seulement si, X est métrisable. En particulier, ce résultat s'applique au cas où $\mathcal{E}(X)$ est $\mathcal{K}$-analytiques.

COROLLAIRE 6. - Supposons que $\mathcal{E}(X)$ soit $\mathcal{K}$-analytique. Alors

$$(X \text{ est parfaitement normal}) \Longleftrightarrow (X \text{ est métrisable}).$$

COROLLAIRE 7. - Il existe un convexe compact X non parfaitement normal bien que $\mathcal{E}(X)$ le soit.

Pour chaque $i \in I$, soit X_i un simplexe (compact) contenu dans un espace localement convexe séparé E_i. Supposons que, pour chaque i, existe un hyperplan $\{f_i = 1\}$ tel que $X_i \subset \{f_i = 1\}$. Soit Y_i l'enveloppe convexe de $\{0 , X_i\}$, et soit $\tilde{X}_i$ le cône engendré par Y_i. Pour chaque $i \in I$, soit ρ_i la projection $\rho_i : Z = \prod_i \tilde{X}_i \to \tilde{X}_i$. Considérons la jauge suivante j sur Z : $j = \sum_i f_i \circ \rho_i$, $i \in I$. On appelle somme directe des simplexes $\{X_i\}_{i \in I}$, l'ensemble $\{j \leq 1\}$. On la note $\bigoplus_{i \in I} X_i$ (Cette somme est définie dans [5]).

PROPOSITION 8. - Soit I non dénombrable, et pour chaque $i \in I$, soit X_i un simplexe tel que $\mathcal{E}(X_i)$ soit homéomorphe à $[0 , 1[$, muni de la topologie usuelle. Alors $\bigoplus_i X_i$ $(i \in I)$ est un simplexe ; $\mathcal{E}(\bigoplus X_i)$ est un $\mathcal{K}_\sigma$ de $\bigoplus_i X_i$ $(i \in I)$, mais $\mathcal{E}(\bigoplus_i X_i)$ n'est pas un $\mathcal{G}_\delta$ de $\mathcal{E}(\overline{\bigoplus_i X_i})$.

APPENDICE

Nous allons donner ici une indication de la démonstration du théorème de métrisation de JAYNE. Cette démonstration est la sienne.

THÉORÈME (JAYNE [6]). - Soit Y un espace compètement régulier, et soit βY la compactification de Stone-Čech de Y. Soit Y une partie Z-souslinienne de βY. Alors Y est métrisable si, et seulement si, la diagonale Δ est une partie Z-souslinienne de $Y \times Y$.

LEMME 1. - Y est une partie Z-souslinienne de βY si, et seulement si, Y est l'image réciproque d'un espace séparable, métrisable et analytique (au sens classique) par une application propre.

Démonstration. - Soit Y une partie Z-souslinienne de βY. Alors

$$Y = \bigcup_\sigma \bigcap_s Z(f_s) \quad (\sigma \in \Sigma , \quad s < \sigma) ,$$

où chaque $Z(f_s)$ est l'ensemble de zéros de la fonction $f_s \in C(\beta Y)$.

Indexons à nouveau $\{f_s\}_{s<\sigma,\ \sigma\in\Sigma}$ comme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, et définissons

$$\Phi : \beta Y \to \prod_i \underset{\sim}{R}_i \quad (1 \leq i < \infty) \quad \text{par} \quad \Phi(x) = (f_1(x)\ ,\ f_2(x)\ ,\ \dots\ ) .$$

Puisque $\Phi^{-1}(\Phi(Y)) = Y$, la restriction de Φ à Y est propre. Evidemment, $\Phi(Y)$ est séparable, métrisable, et analytique (Voir [1]).

Soit $h : Y \to A$ une surjection propre, où A est un espace séparable, métrisable et analytique. Soit $\hat{A}$ une compactification métrisable de A , et soit $\hat{h}$ l'extension de Stone-Čech de h , c'est-à-dire que $\hat{h} : \beta Y \to \hat{A}$. Puisque $Y = \hat{h}^{-1}(A)$, Y est une partie Z-souslinienne de βY .

COROLLAIRE 2. - <u>Si</u> Y <u>est une partie</u> Z-<u>souslinienne de</u> βY , Y <u>est un espace de Morita.</u>

C'est une conséquence du fait que l'image réciproque d'un espace métrisable par une application propre est un espace de Morita [7] (Pour la définition d'un espace de Morita, voir [6] ou [7]).

COROLLAIRE 3. - <u>Si</u> Y <u>et</u> T <u>sont des parties</u> Z-<u>sousliniennes de</u> βY <u>et</u> βT <u>respectivement,</u> $Y \times T$ <u>est une partie</u> Z-<u>souslinienne de</u> $\beta(Y \times T)$.

LEMME 4. - <u>Si</u> Y <u>est une partie</u> Z-<u>souslinienne de</u> βY , <u>et si</u> F <u>est une partie</u> Z-<u>souslinienne fermée de</u> Y , <u>alors</u> F <u>est un</u> $\mathcal{G}_\delta$ <u>de</u> Y .

<u>Démonstration</u>. - On a $h : Y \to A$, où h est une surjection propre, et A est séparable, métrisable et analytique. Soit $\hat{A}$ une compactification métrisable de A , et soit $\hat{h} : \beta Y \to \hat{A}$ ($\hat{h}$ = l'extension Stone-Čech de h).

On a $F = \bigcup_\sigma \bigcap_{s} Z(f_s)$ $(\sigma \in \Sigma\ ,\ s < \sigma)$, où chaque $f_s \in C^*(Y)$. Soit $\hat{f}_s$ l'extension de Stone-Čech de f_s à βY . Indexons à nouveau $\{f_s\}_{s<\sigma,\sigma\in\Sigma}$ comme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Puis définissons

$$\Phi : \beta Y \to \hat{A} \times \prod_i \underset{\sim}{R}_i \quad (1 \leq i < \infty) \quad \text{par} \quad \Phi(x) = (\hat{h}(x)\ ,\ \hat{f}_1(x)\ ,\dots) .$$

Soit $\overline{F}$ l'adhérence de F dans βY . Evidemment, $\Phi^{-1}(\Phi(\overline{F}))$ est un $\mathcal{G}_\delta$ de βY . On peut vérifier que $\Phi^{-1}\ \Phi(\overline{F}) \cap Y = F$; alors F est un $\mathcal{G}_\delta$ de Y .

<u>Démonstration du théorème de Jayne</u>. - Supposons que $Y \in \mathcal{A}(Z(\beta Y))$, et que la diagonale $\Delta \in \mathcal{A}(Z(Y \times Y))$. D'après le lemme 4, Δ est un $\mathcal{G}_\delta$ de $Y \times Y$. Y est évidemment Lindelöf, donc paracompact.

D'après le corollaire 2, Y est un espace de Morita. Maintenant, Y satisfait à toutes les conditions du théorème de métrisation des espaces de Morita [8].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). - Ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et $\mathcal{K}$-sousliniens. Cas général et cas métrique , Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 75-81.

[2] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969,(Mathematics Lecture Note Series).

[3] CORSON (H.). - Metrizability of compact convex sets (à paraître).

[4] FAKHOURY (H.). - Stabilité des simplexes de Lion, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 110-112.

[5] GOULLET de RUGY (A.), SCHOL-CANCELIER (C.) et TAYLOR-MacGIBBON (B.). - Quelques résultats nouveaux sur les points extrémaux d'un simplexe compact, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 10e année, 1970/71, n° 18,

[6] JAYNE (J.). - Spaces of Baire functions, Baire classes and Suslin sets, Thèse Sc. math., Columbia University (à paraître).

[7] MORITA (K.). - Products of normal spaces with metric spaces, Math. Annalen, t. 154, 1964, p. 365-382.

[8] OKUYAMA (A.). - On metrization of M-spaces, Proc. Japan Acad., t. 40, 1964, p. 176-179.

(Texte reçu le 30 juin 1970)

Brenda TAYLOT-MacGIBBON
McGill University
Department of Mathematics
MONTREAL, Québec (Canada)