Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Alain Connes

Un théorème de décomposition d'applications mesurables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, nº 1 (1970-1971), exp. nº 12, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_1_A8_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 12, 7 p.

28 janvier 1971

UN THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION D'APPLICATIONS MESURABLES

par Alain CONNES

Introduction. - L'origine de cet exposé est le théorème suivant, dû à KATETOV :

"Soient φ une application d'un ensemble E dans lui-même, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur E tel que $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$; il existe alors $F \subset E$, $F \in \mathcal{U}$, $\varphi(x) = x$, $\forall\ x \in F$ ".

Nous démontrons une généralisation de ce théorème dans laquelle X est mesurable, et $\mathcal{U}$ est un élément du spectre de l'algèbre $L^\infty(X)$ (cf. Terminologie). Signalons les points suivants :

La principale difficulté est dans la non-injectivité de l'application φ . Alors que, dans le cas discret (étudié par KATETOV), l'on peut se ramener à l'hypothèse φ injective, en construisant un diagramme commutatif où φ' est injective.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & E \arrow[d, "j"] \\ E' \arrow[r, "\varphi'"] & E' \end{tikzcd}$$

Par contre, dans le cas non discret, il existe un espace X et une application φ tels que tout diagramme ci-dessus, où φ' est injective, soit trivial.

Comme application du théorème généralisé, nous donnons une condition nécessaire pour qu'une application commute avec un relèvement de L^∞ (cf. corollaire 2). En particulier, signalons la conséquence suivante : Soit ρ un relèvement de $L^\infty(\underset{\sim}{R})$ qui commute avec les translations ; alors toute application continue de $\underset{\sim}{R}$ dans $\underset{\sim}{R}$ qui commute avec ρ est une translation. Ce résultat utilise, de manière essentielle, la connexité de $\underset{\sim}{R}$.

Nous avons également étendu le théorème de décomposition, écrit sous la forme

$$\exists\ X_i\ ,\quad i = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\qquad \varphi_{X_0} = \text{identité}\ ,\quad \varphi(X_i) \cap X_i = \emptyset\ ,\quad \bigcup X_i = X\ ,$$

au cas d'un espace topologique polonais et d'une application continue ouverte, les X_i sont ouverts, et $\overline{\bigcup X_i} = X$. Nous citons ce résultat sans démonstration, n'en ayant pas obtenu d'application.

Terminologie. - Dans la suite, X , $\mathfrak{M}$, μ désigne un espace mesurable, muni d'une mesure positive.

$L^\infty(X)$ désigne l'algèbre complexe des classes de fonctions mesurables essentiellement bornées.

Un élément $\mathcal{U}$ du spectre S de cette algèbre est caractérisé par la sous-famille filtrante de $\mathfrak{M}$, des ensembles E tels que

Image par $\mathcal{U}$ de la fonction caractéristique de E égale 1.

Toute famille filtrante d'ensembles mesurables, non négligeables, est contenue dans une telle famille maximale, qui est un élément de S. La propriété de maximalité, vérifiée par les familles $\mathcal{U} \in S$, s'écrit

$$A \in \mathfrak{M} \implies A \text{ ou } A^c \in \mathcal{U} .$$

Soit φ une application mesurable de X dans X, telle que

$$\mu(A) = 0 \implies \mu(\varphi^{-1}(A)) = 0 .$$

Alors, pour tout $\mathcal{U} \in S$, la famille des $A \in \mathfrak{M}$ tels que $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ est une famille du type $\mathcal{U}$, donc un élément $\varphi(\mathcal{U}) \in S$.

X est dit strictement localisable, quand il est somme d'espaces de mesure finie non nulle. L'algèbre des classes d'ensembles mesurables est alors une algèbre de Boole complète ; nous notons $\bigvee$ et $\bigwedge$ les lois qui correspondent à l'intersection et à la réunion.

Une application mesurable φ de X dans X est dite normale, quand, pour toute famille filtrante A_α, l'on a

$$\varphi^{-1}(\bigwedge A_\alpha) = \bigwedge \varphi^{-1}(A_\alpha)$$

Notre but est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> X, μ <u>un espace strictement localisable, et</u> φ <u>une application mesurable normale de</u> X <u>dans</u> X.

1° <u>Si</u> $\mathcal{U} \in S$ <u>et</u> $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, <u>il existe</u> $X_0 \in \mathcal{U}$ <u>tel que</u> $\varphi/X_0 =$ <u>identité</u> (<u>i. e.</u> $\forall B \subset X_0$, $\varphi^{-1}(B) \cap X_0 = B$ <u>p. s.</u>).

2° <u>Il existe quatre sous-ensembles mesurables</u> X_i, $i = 0, 1, 2, 3$, <u>tels que</u> $\varphi_{X_0} =$ <u>identité</u>, <u>et</u> $\varphi(X_i) \cap X_i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3$, <u>et</u> $\bigcup_{i=0}^{3} X_i = X$ <u>p. s.</u>

3° <u>Il existe deux sous-ensembles mesurables</u> X_0 <u>et</u> E, <u>tels que</u> $\varphi_{X_0} =$ <u>identité</u>, $\varphi(E) \cap E = \emptyset$, $\forall x$, $\exists n$, $\varphi^n(x) \in X_0$ <u>ou</u> $\varphi^n(x) \in E$.

COROLLAIRE 2.

(a) <u>Soient</u> ρ <u>un relèvement de</u> $L^\infty(X, \mu)$, <u>et</u> φ <u>une application mesurable de</u> X <u>dans</u> X <u>qui commute avec</u> ρ ; <u>alors, si</u> $F = \{x ; \varphi(x) = x\}$, <u>l'on a</u> $\rho(F) = F$.

(b) Soient G un groupe compact connexe (ou localement compact, connexe et localement connexe), et ρ un relèvement de $L^{\infty}(dm)$, où dm est la mesure de Haar à gauche, et ρ commute avec les translations à gauche. Toute application continue de G dans G qui commute avec ρ est une translation à gauche.

Remarque pour la démonstration du théorème 1. - Nous allons nous limiter, pour la démonstration, au cas $X_0 = \emptyset$ p. s. Cela est possible, car, d'une part X_0 est déterminé (modulo les négligeables) comme étant le plus grand mesurable A tel que $\varphi/A =$ identité, d'autre part, si l'on enlève à X l'ensemble des x tels que $\varphi^n(x) \in X_0$ au bout de $n \geqslant n_0$, l'on obtient un ensemble invariant par φ avec $X_0 = \emptyset$. Le lemme ci-dessous précise les relations entre les propriétés 1°, 2°, 3° de l'énoncé.

LEMME 3. - Soit φ une application mesurable non singulière de X, μ dans lui-même ; les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) Pour tout $\mathcal{U} \in S$, $\varphi(\mathcal{U}) \neq \mathcal{U}$;

(B) Il existe un entier k, et k sous-ensembles mesurables X_i, tels que $\varphi(X_i) \cap X_i = \emptyset$ et $\cup X_i = X$ p. s. ;

(C) Il existe un sous-ensemble mesurable E, tel que $\varphi(E) \cap E = \emptyset$, et $\forall x$, $\exists n$, $\varphi^n(x) \in E$ p. s. ;

(B_3) Il existe trois sous-ensembles mesurables X_i vérifiant (B).

Démonstration.

(A) $\Longrightarrow$ (B). Supposons (B) fausse, alors la famille $\mathfrak{F}$ des ensembles mesurables de la forme $(\cup_1^k X_i)^c$, où X_i vérifie $\varphi(X_i) \cap X_i = \emptyset$, est une famille filtrante d'ensembles non négligeables.

Soit $\mathcal{U}$ une famille maximale la contenant, montrons que $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Si $\varphi(\mathcal{U}) \neq \mathcal{U}$, il existe $A \in \mathcal{U}$, $A \notin \varphi(\mathcal{U})$. Or cela signifie que $B = A \cap \varphi^{-1}(A^c)$ est dans $\mathcal{U}$, mais, comme $\varphi(B) \cap B = \emptyset$, c'est que $B^c \in \mathfrak{F}$, donc $B^c \in \mathcal{U}$; contradiction.

(B) $\Longrightarrow$ (C). Supposons que, pour $k \in N$, il existe X_i vérifiant (B), soit $Z = (\cup X_i)^c$, alors Z est négligeable, de même $Z' = \cup_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n}(Z)$.

A chaque $x \notin Z'$ est associée une suite de nombres $1, 2, \ldots, k$, définie par $\varphi^n(x) \in X_{a_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ (on suppose $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$). Soit $E = \{x \,;\, a_0 > a_1 < a_2\}$. Si $x \in E$, $\varphi(x)$ a une suite qui commence par $a_1 < a_2$, donc $\varphi(x) \notin E$. Pour tout $x \notin Z'$, la suite associée a_i vérifie $a_{i+1} \neq a_i$, $\forall i$, donc présente un minimum relatif $a_p > a_{p+1} < a_{p+2}$. Ainsi, $\forall x \notin Z'$, $\exists p$, $\varphi^p(x) \in E$.

(C) $\Longrightarrow$ (B_3) . A E , tel que $E \cap \varphi(E) = \emptyset$, nous associons les ensembles mesurables suivants :

$$E_1 = \{x \ ; \ \exists\, q \text{ impair tel que } x \notin E ,\ \varphi(x) \notin E ,\ \ldots ,\ \varphi^{q-1}(x) \notin E ,\ \varphi^q(x) \in E\} ,$$

$$E_2 = \{x \ ; \ \exists\, q \text{ pair non nul tel que } x \notin E ,\ \varphi(x) \notin E ,\ \ldots ,\ \varphi^{q-1}(x) \notin E ,\ \varphi^q(x) \in E\} .$$

L'on vérifie que $\varphi(E_i) \cap E_i = \emptyset$, et que la réunion des E_i est l'ensemble des x tels qu'il existe p , $\varphi^p(x) \in E$.

(B_3) $\Longrightarrow$ (A) . Si φ vérifie (B_3), et si $\mathfrak{U}$ est donné, comme $\mathfrak{U}$ est maximal, l'un des X_i , $i = 1 , 2 , 3$, est dans $\mathfrak{U}$, mettons $X_1 \in \mathfrak{U}$. Montrons que $X_1 \notin \varphi(\mathfrak{U})$; en effet $X_1 \subset \varphi^{-1}(X_1^c)$, donc $X_1^c \in \varphi(\mathfrak{U})$.

<u>Le cas d'une mesure</u> <u>σ-finie</u>. - Soit X , $\mathfrak{M}$, μ un espace mesurable, muni d'une mesure σ-finie.

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> φ <u>une application mesurable de</u> X <u>dans</u> X , <u>telle que</u> :

$\mu(\varphi(A)) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$,

$\forall A$ <u>non négligeable,</u> $\exists\, B \subset A$, $\varphi^{-1}(B) \cap A \neq B$ <u>p. s.</u>

<u>Alors</u> φ <u>vérifie les propriétés équivalentes du lemme</u> 3.

<u>Démonstration</u>. - Nous démontrons que, dans les conditions de l'énoncé, φ vérifie la propriété (B_∞) suivante :

(B_∞) Il existe une suite A_i de non-négligeables tels que

$$\varphi(A_i) \cap A_i = \emptyset , \qquad \bigcup A_i = X \quad \text{p. s.} .$$

Puis un lemme achève la démonstration :

Soit $\{A_\alpha\}$ une famille maximale de mesurables deux à deux disjoints, non négligeables, tels que $\varphi(A_\alpha) \cap A_\alpha = \emptyset$. Comme μ est σ-finie, l'ensemble d'indices est N , $\alpha \in N$.

Soit A le complémentaire de $\bigcup A_i$, montrons que $\mu(A) = 0$. Si $\mu(A) \neq 0$, il existe, par hypothèse, $B \subset A$ tel que

$$\varphi^{-1}(B) \cap A \neq B \quad \text{p. s.} .$$

Dans les deux cas possibles, la maximalité de la famille $\{A_\alpha\}$ est mise en défaut :

(a) $\exists\, B' \neq \emptyset$ p. s., $B' \subset \varphi^{-1}(B) \cap A$, $B' \cap B = \emptyset$, alors $\varphi(B') \cap B' = \emptyset$ et $B' \subset A$;

(b) $\exists\, B'' \neq \emptyset$ p. s., $B'' \subset B$, $B'' \cap (\varphi^{-1}(B) \cap A) = \emptyset$, alors $\varphi(B'') \cap B'' = \emptyset$.

LEMME 5. - $(B_\infty) \implies (B_6)$.

Nous nous donnons une suite A_i d'ensembles mesurables tels que $\bigcup A_i = X$ p. s., $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et $\varphi(A_i) \cap A_i = \emptyset$. Nous privons X de l'ensemble $Z = \bigcup_0^\infty \varphi^{-k}((\bigcup A_i)^c)$, qui est de mesure nulle, car φ est non singulière. A tout élément x de $X \setminus Z$ est associée une suite d'entiers (a_n) , $n = 0 , 1 , \ldots$, déterminée par la condition

$$\varphi^n(x) \in X_{a_n} , \qquad n = 0 , 1 , \ldots .$$

Nous écrivons $X \setminus Z = Y \cup Y^c$, où Y est l'ensemble des x dont la suite associée est constamment croissante, et nous construisons Y_i , $i = 1 , 2 , \ldots , 6$, avec $\bigcup_1^3 Y_i = Y$, $\bigcup_4^6 Y_i = Y^c$, et $\varphi(Y_i) \cap Y_i = \emptyset$.

(a) $i = 1 , 2 , 3$. Soit $Y_{n,k} = \{x ; \ x \in Y , \ a_k \geqslant n\}$, où a_k est le k-ième terme de la suite associée à x . Il est clair que $\bigcap_n Y_{n,k} = \emptyset$, $1 \leqslant n < \infty$, ceci $\forall\, k$; comme ces ensembles sont une suite décroissante d'ensembles mesurables, l'on peut trouver une suite d'entiers n_k , avec $n_0 = 1$, telle que

$$N = \bigcap_1^\infty Y_{n_k,k} \text{ négligeable} \qquad \text{et} \qquad n_{k+1} > n_k , \quad \forall\, k .$$

Soit alors $E = \{x ; \ \exists\, k , \ n_k \leqslant a_0 < a_1 < n_{k+1} \leqslant a_2\}$, où a_i est la suite associée à x , et où $x \in Y$. L'on vérifie que E est mesurable, et $\varphi(E) \cap E = \emptyset$; montrons que, pour tout $x \notin N$, $x \in Y$, il existe un entier p tel que $\varphi^p(x) \in E$. Comme $x \notin Z$, $\exists\, k$ tel que $a_k < n_k$; ainsi, comme les segments $[n_0 , n_1[, \ldots , [n_{k-1} , n_k[$ sont au nombre de k , et que leur réunion contient les $k + 1$ points $a_0\, a_1 \ldots a_k$, il existe un segment $[n_r , n_{r+1}[$ qui en contient au moins deux, soit alors a_p l'avant-dernier des a_i dans ce segment :

$$n_r \leqslant a_p < a_{p+1} < n_{r+1} \leqslant a_{p+2} .$$

Il est clair que $\varphi^p(x) \in E$. La construction $(C) \implies (B_3)$ du lemme 3 détermine Y_1 , Y_2 , Y_3 .

(b) $i = 4 , 5 , 6$. L'ensemble Y^c des x , dont la suite associée n'est pas constamment croissante, n'est pas stable par φ ; mais, si nous construisons E' tel que $\varphi(E') \cap E' = \emptyset$ et, $\forall\, x \in Y^c$, $\exists\, p'$, $\varphi^{p'}(x) \in E'$, en utilisant la construction $(C) \implies (B_3)$, nous obtiendrons les ensembles Y_i , $i = 3 , 4 , 5$. Posons $E' = \{x ; \ a_0 > a_1 < a_2\}$; comme $\varphi(E') \cap E' = \emptyset$, il reste à prouver que, si une suite a_n , telle que $a_{n+1} \neq a_n$, $\forall\, n$, n'est pas constamment croissante, elle admet un minimum relatif $a_{p'} > a_{p'+1} < a_{p'+2}$, ce qui est clair.

Le cas général. - Soit X , μ un espace strictement localisable, et soit $\mathcal{C}$ une partition de X en ensembles non négligeables de mesure finie, K , tels que $\bigvee_{\mathcal{C}} K = X$, où $\bigvee$ dénote le sup dans l'espace complètement réticulé $L^\infty(X)$, ou dans l'algèbre de Boole complète des mesurables modulo les négligeables.

Deux lemmes simples permettent de démontrer que, si φ est une application mesurable de X dans X , telle que :

1° $\varphi^{-1}(\bigwedge A_\alpha) = \bigwedge \varphi^{-1}(A_\alpha)$,

2° φ n'est l'identité sur aucun non-négligeable,

elle vérifie (B_3).

LEMME 6. - Soit K un ensemble de mesure finie ; φ vérifiant le 1°, il existe un ensemble de mesure σ-finie K' , invariant par φ , tel que $K \subset K'$ p. s.

Démonstration. - L'ensemble $\varphi(K)$ n'est, ni nécessairement mesurable, ni de mesure σ-finie ; soit cependant K_1 un ensemble mesurable minimal (modulo les négligeables) tel que $\varphi^{-1}(K_1) \supset K$ p. s. Montrons que K_1 est de mesure σ-finie ; soit $\mathcal{C}_1$ la sous-famille de $\mathcal{C}$ des K' tels que $K' \cap K_1 \neq \emptyset$ p. s., et supposons $\mathcal{C}_1$ non dénombrable ; comme $\varphi^{-1}(K') \cap K \neq \emptyset$ p. s., $\forall K' \in \mathcal{C}_1$, l'on met en contradiction $\mu(K) < \infty$. L'hypothèse φ vérifie le 1° est nécessaire pour l'existence de K_1 . Comme $\varphi^{-1}(K_1) \supset K$ p. s., l'on a

$$\forall x \in K , \qquad \varphi(x) \in K_1 \quad \text{p. s.}$$

En appliquant la même construction à φ^n , on obtient K_n avec

$$\forall x \in K , \qquad \varphi^n(x) \in K_n \quad \text{p. s.}$$

La réunion K'' des K_i , $i = 0 , 1 , \ldots$, est de mesure σ-finie, donc l'ensemble K' des $x \in K''$, tels que $\varphi^n(x) \in K''$, $\forall n \geq 0$, est un ensemble invariant par φ de mesure σ-finie, tel que, comme

$$\forall x \in K , \qquad \varphi^n(x) \in K'' \quad \text{p. s.} ,$$

l'on ait $K' \supset K$ p. s.

En appliquant la proposition 4 à l'application φ , restreinte à l'ensemble de mesure σ-finie K' , l'on construit une famille de sous-ensembles mesurables Q_α (où l'ensemble d'indice est le même que pour $K \in \mathcal{C}$), telle que :

(a) Q_α est invariant par φ et par φ^{-1} ,

(b) $\forall \alpha$, $\exists Q_{\alpha,i}$, $i = 1 , 2 , 3$, $\bigcup Q_{\alpha,i} = Q_\alpha$ p. s., $\varphi(Q_{\alpha,i}) \cap Q_{\alpha,i} = \emptyset$,

(c) $\bigvee Q_\alpha = X$.

La seule difficulté est de rendre les ensembles K' invariants par φ^{-1}, sans enlever la condition (b), c'est-à-dire le fait que φ/K' vérifie (B_3). Or on sait que φ/K' vérifie la propriété (C), et il est clair que φ, restreinte à l'ensemble $\bigcup_0^\infty \varphi^{-k}(K')$, la vérifie aussi, donc vérifie (B_3). Le lemme suivant achève la démonstration du théorème.

LEMME 7. - Soit Q_α une famille d'ensembles vérifiant les propriétés (a) et (b) ; alors $\bigvee Q_\alpha$ les vérifie aussi.

L'on vérifie facilement que $\bigvee Q_\alpha$ est invariant par φ et φ^{-1} p. s., car φ^{-1} commute avec $\bigvee$ et $\bigwedge$.

De plus, si Q vérifie (a), (b), et si Q' vérifie (a), $Q \setminus Q'$ vérifie (a) et (b) ; cela permet de se restreindre au cas où

$$\alpha \neq \beta \implies Q_\alpha \cap Q_\beta = \emptyset \quad \text{p. s.}$$

Posons alors $Q_1 = \bigvee Q_{\alpha,1}$, $Q_2 = \bigvee Q_{\alpha,2}$, $Q_3 = \bigvee Q_{\alpha,3}$. Il est clair que $\bigcup_{i=1}^3 Q_i = X$ p. s., où $X = \bigvee Q_\alpha$.

Il reste à prouver que $\varphi(Q_i) \cap Q_i = \emptyset$ p. s. Or $\varphi^{-1}(Q_1) = \bigvee \varphi^{-1}(Q_{\alpha,1})$, donc comme, pour α et β quelconques,

$$\varphi^{-1}(Q_{\alpha,1}) \cap Q_{\beta,1} = \emptyset \quad \text{p. s.} \quad ,$$

l'on a $\varphi^{-1}(Q_1) \cap Q_1 = \emptyset$ p. s. Ainsi, si $Q_1' = Q_1 \setminus \varphi^{-1}(Q_1)$, l'on voit que $Q_1' = Q_1$ p. s. et que $\varphi(Q_1') \cap Q_1' = \emptyset$.

(Texte reçu le 18 juin 1971)

Alain CONNES
1 avenue Mathilde
95 - SAINT-GRATIEN