Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-François Colombeau

Un survol des applications actuelles du calcul différentiel dans les espaces bornologiques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, nº 1 (1970-1971), exp. nº 10, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_1_A6_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 10, 13 p.

14 janvier 1971

UN SURVOL DES APPLICATIONS ACTUELLES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS LES ESPACES BORNOLOGIQUES

par Jean-François COLOMBEAU

Sommaire. - Nous rappelons d'abord (§ 0) les définitions et quelques propriétés élémentaires du calcul différentiel dans les espaces bornologiques (obtenues d'après [20], [21], [10], et [5]). Le paragraphe 1 sur les applications du théorème des fonctions implicites sera développé ultérieurement. Au paragraphe 2, on énonce les théorèmes d'existence et d'unicité pour les équations différentielles [7], et on montre sur un exemple comment s'en servir pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles. Au paragraphe 3, on munit certains ensembles d'applications de diverses structures de "variété différentiable". L'historique du problème du calcul différentiel dans les espaces non normés est donné dans [2]. La terminologie est conforme à [11].

0. Notations, définitions et quelques propriétés élémentaires.

Nous nous plaçons dans le cadre des espaces bornologiques convexes (e. b. c.) séparés et polaires (si B est un borné, $\overline{\Gamma}B$, l'enveloppe convexe de B, fermée pour τE, est encore un borné).

E_1 (resp. E_2) étant deux e. b. c. polaires, on désigne par B_1 (resp. B_2) des disques bornés, par P_1 (resp. P_2) des parties bornivores, par U_1 (resp. U_2) des ouverts pour la topologie de la M-fermeture (dite aussi topologie de la b-fermeture) (U_1 est un ouvert pour la topologie de la M-fermeture τE_1, si, pour tout point a de U_1, il existe une partie bornivore P_1 telle que $a + P_1 \subset U_1$).

$\| \|_B$ désigne la jauge du disque borné B, et E_B l'espace vectoriel engendré par B normé par la jauge de B.

$L_n(E_1^n, E_2)$ désigne l'e. b. c. des applications n-linéaires bornées de E_1^n dans E_2 muni de sa bornologie naturelle.

Sauf mention du contraire, les convergences considérées sont au sens de Mackey.

Une application $f : a + P_1 \to E_2$ est dite M-continue (on dit aussi b-continue) au point a, si l'image par f de tout filtre convergeant vers a converge vers $f(a)$.

$f : U_1 \to E_2$ est dite M-continue dans U_1, si elle l'est en tout point de U_1.

Si f est M-continue dans U_1, elle est continue de U_1 muni de τE_1 dans τE_2.

(0.1) DÉFINITIONS. - *Une application* $r : P_1 \to E_2$ *est dite tangente à* 0 *, si, pour tout disque borné* B_1 *, il existe un disque borné* B_2 *, tel que* $r(\varepsilon B_1)$ *soit contenu dans* E_{B_2} *pour* ε *assez petit, et tel que* $\|r(h)\|_{B_2}/\|h\|_{B_1} \to 0$ *si* $\|h\|_{B_1} \to 0$; *alors* $r(0) = 0$.

Une application $f : a + P_1 \to E_2$ est dite différentiable au point a , s'il existe une application linéaire bornée $f'(a)$ de E_1 dans E_2 , telle que l'application $r_a : P_1 \to E_2$, définie par $r_a(h) = f(a + h) - f(a) - f'(a).h$, est tangente à 0 . C'est-à-dire que f est différentiable au point a si, pour tout B_1 , il existe B_2 tel que :

1° $f(a + \varepsilon B_1) \subset f(a) + E_{B_2}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit ;

2° La restriction de f à $a + \varepsilon B_1$ à valeurs dans $f(a) + E_{B_2}$ est différentiable au point a de l'espace normé affine $a + E_{B_1}$ dans l'espace normé affine $f(a) + E_{B_2}$.

(0.2) PROPOSITION. - *Si* f *est différentiable au point* a , $f'(a)$ *et* r_a *sont uniques*.

(0.3) PROPOSITION. - *Si* $f : a + P_1 \to E_2$ *est différentiable au point* a , *elle est* M-*continue au point* a .

(0.4) DÉFINITION. - *Une application* $f : U_1 \to E_2$ *est dite différentiable dans* U_1 , *si elle est différentiable en tout point de* U_1 .

(0.5) PROPOSITION. - *Si* f *est différentiable dans* U_1 , *elle est continue de* U_1 , *muni de* τE_1 , *dans* τE_2 .

(0.6) *Problème de la continuité d'une application différentiable entre e. l. c.* - Si E_1 et E_2 sont deux e. l. c. séparés, et si on considère les bornologies associées aux topologies (ce sont des bornologies polaires), la topologie de la M-fermeture est plus fine que la topologie d'e. l. c. (de départ), donc, si la topologie de E_1 coïncide avec la topologie τE_1 , une application différentiable de U_1 dans E_2 est continue de U_1 dans E_2 (c'est, en particulier, le cas si E_1 est un espace de Fréchet ou un dual fort d'espace de Schwartz métrisable) ; par contre, il existe des applications différentiables de $\mathcal{D}$ dans R qui ne sont pas continues ($\mathcal{D}$ est l'espace des fonctions numériques indéfiniment différentiables et à support compact muni de sa bornologie usuelle).

(0.7) DÉFINITIONS. - Soit $f : U_1 \to E_2$ une application différentiable dans U_1. On dit que f est continûment différentiable au point a de U_1 (resp. dans U_1), si l'application $f' : U_1 \to L(E_1 , E_2)$ est M-continue au point a (resp. dans U_1).

$f : U_1 \to E_2$ est dite deux fois différentiable au point a de U_1 (resp. dans U_1), si elle est différentiable dans U_1, et si l'application $f' : U_1 \to L(E_1 , E_2)$ est différentiable au point a (resp. dans U_1).

On définit ainsi de manière évidente les applications n fois différentiables au point a, dans U_1, n fois continûment différentiables au point a, dans U_1, indéfiniment différentiables dans U_1. On peut ainsi obtenir sans difficultés des analogues de tous les résultats élémentaires de la théorie classique (voir [20] et [5]). Nous ne les rappelons pas ici.

(0.8) THÉORÈME des accroissements finis. - Soient $f : U_1 \to E_2$ différentiable dans U_1, et a, h tels que le segment $[a , a + h]$ soit contenu dans U_1 ; on a alors

$$f(a + h) - f(a) \in \overline{\Gamma}_{0\leqslant t\leqslant 1}\{f'(a + th).h\} ,$$

et

$$f(a + h) - f(a) - f'(a).h \in \overline{\Gamma}_{0\leqslant t\leqslant 1}\{(f'(a + th) - f'(a)).h\} .$$

Nous ne citons pas les formules de Taylor.

Les résultats suivants seront utiles pour le paragraphe 3.

(0.9) DÉFINITIONS. - Une partie de U_1 (ouvert de τE_1) est dite bornée, si elle est contenue dans une union finie de $x_n + B_n$ tels qu'il existe une partie bornivore P_1 telle que $x_n + B_n + P_1 \subset U_1$ (si E_1 est de dimension finie, les bornés de U_1 sont les parties relativement compactes).

$\mathcal{C}_\infty(U_1 , E_2)$ désigne l'espace vectoriel des applications indéfiniment différentiables de U_1 dans E_2 telles que, pour tout n, $f^{(n)}$ de U_1 dans $L_n(E_1^n , E_2)$ soit bornée sur tout borné de U_1.

Une partie M de $\mathcal{C}_\infty(U_1 , E_2)$ est dite bornée, si, pour tout k, et pour tout borné B_1 de U_1,

$$M^{(k)}(B_1) = \bigcup_{\substack{f\in M \\ x\in B_1}} f^{(k)}(x)$$

est bornée dans $L_k(E_1^k , E_2)$.

(0.10) PROPOSITION. - $\mathcal{C}_\infty(U_1, E_2)$ <u>est ainsi un e. b. c. polaire. Si</u> E_2 <u>est complet,</u> $\mathcal{C}_\infty(U_1, E_2)$ <u>est complet.</u>

(0.11) THÉORÈME FONDAMENTAL. - <u>Soient</u> $\alpha \in \mathcal{C}_\infty(E_2, E_3)$, <u>et</u>

$$F_\alpha : \mathcal{C}_\infty(U_1, E_2) \to \mathcal{C}_\infty(U_1, E_3) ,$$

<u>définie par</u> $F_\alpha(\varphi) = \alpha \circ \varphi$; <u>alors</u> $F_\alpha \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{C}_\infty(U_1, E_2), \mathcal{C}_\infty(U_1, E_3))$, <u>et</u> $F'_\alpha(\varphi).h = (x \to \alpha'(\varphi(x)).h(x))$; <u>l'application</u> $F : (\alpha, \varphi) \to \alpha \circ \varphi$ <u>est</u> $\mathcal{C}_\infty$.

(0.12) THÉORÈME. - <u>L'application</u> $ev : \mathcal{C}_\infty(U_1, E_2) \times U_1 \to E_2$, <u>définie par</u> $ev(\varphi, x) = \varphi(x)$, <u>est</u> $\mathcal{C}_\infty$.

(0.13) THÉORÈME. - <u>L'application</u>

$$B : \mathcal{C}_\infty(U_1, E_2) \to L(\mathcal{C}_\infty(E_2, E_3), \mathcal{C}_\infty(U_1, E_3)) ,$$

<u>définie par</u> $B(\varphi)(\psi) = \psi \circ \varphi$, <u>est</u> $\mathcal{C}_\infty$.

(0.14) <u>Remarque.</u> - Au cours de l'exposé, Andrée BASTIANI a posé le problème suivant : $\mathcal{C}_\infty(E_1 \times E_2, E_3)$ est-il bornologiquement isomorphe à $\mathcal{C}_\infty(E_1, \mathcal{C}_\infty(E_2, E_3))$? La réponse est positive :

THÉORÈME. - $\mathcal{C}_\infty(E_1 \times E_2, E_3)$ <u>est bornologiquement isomorphe à</u> $\mathcal{C}_\infty(E_1, \mathcal{C}_\infty(E_2, E_3))$.

<u>Démonstration sommaire.</u> - Soit

$$\begin{aligned} f : E_1 \times E_2 &\to E_3 \\ x , y &\to f(x, y) , \end{aligned}$$

et soit $f_x : E_2 \to E_3$, définie par $f_x(y) = f(x, y)$.

1° Si f est $\mathcal{C}_\infty$, alors $f_x \in \mathcal{C}_\infty(E_2, E_3)$ (immédiat).

2° Soit

$$\begin{aligned} \Phi : E_1 &\to \mathcal{C}_\infty(E_2, E_3) \\ x &\to f_x \quad ; \end{aligned}$$

alors Φ est $\mathcal{C}_\infty$. Comme dans [5] (I, (5.9)), Φ est indéfiniment différentiable, $\Phi^{(k)}(x).\xi^1 \ldots \xi^k = (y \to \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, y).\xi^1 \ldots \xi^k)$; de plus, $\Phi^{(k)}$ envoie tout borné B_1 de E_1 en un borné de $L_k(E_1^k, \mathcal{C}_\infty(E_2, E_3))$: si $\xi^1, \ldots, \xi^k \in B'_1$ (borné de E_1) et $\eta^1, \ldots, \eta^p \in B'_2$ (borné de E_2), $\frac{\partial^{k+p}}{\partial x^k \partial y^p} f(x, y).\xi^1 \ldots \xi^k.\eta^1 \ldots \eta^p$ est contenu dans un borné de E_3 , si y est dans un borné de E_2 et x dans B_1 .

3° On a donc une application

$$\mathcal{C}_\infty(E_1 \times E_2 , E_3) \rightarrow \mathcal{C}_\infty(E_1 , \mathcal{C}_\infty(E_2 , E_3))$$

$$((x , y) \rightarrow f(x , y)) \rightarrow (x \xrightarrow{\Phi} f_x) \ .$$

Cette application est linéaire et bornée.

4° Réciproquement, soit $\Phi \in \mathcal{C}_\infty(E_1 , \mathcal{C}_\infty(E_2 , E_3))$; on définit f par $f(x , y) = [\Phi(x)](y)$, et alors $f \in \mathcal{C}_\infty(E_1 \times E_2 , E_3)$.

1. Fonctions implicites et applications.

Les théorèmes d'inversion locale d'une application différentiable et des fonctions implicites, tels qu'ils s'énoncent dans les Banach, sont faux en général dans les e. b. c. polaires complets. On doit alors ajouter des hypothèses supplémentaires assez techniques (voir [7]), de façon à assurer la convergence de la méthode d'itération. On peut en déduire les résultats sur les équations différentielles du paragraphe 2, et on peut aussi étudier l'équation intégrale très simple considérée dans [17]. On peut, ce qui est beaucoup plus intéressant, utiliser la méthode d'OVCYANNIKOV pour étudier des équations intégrales dans lesquelles figurent des dérivations partielles : nous étudierons ceci dans "Quelques applications des fonctions implicites dans les e. b. c.",au Colloque sur l'analyse fonctionnelle de Bordeaux, en avril 1971.

2. Equations différentielles et applications.

E désigne un e. b. c. polaire tel que TE est quasi-complet ; et I est un intervalle ouvert de R .

Soit F une application : $E \times I \rightarrow E$; on s'intéresse à l'équation différentielle

$$dX/dt = F(X , t) \ ; \qquad X(t_0) = X_0 \ , \quad \text{où} \quad t_0 \in I \ \text{ et } \ X_0 \in E \ .$$

(2.1) PROPOSITION. - Même si F est indéfiniment différentiable et indépendante de t , il se peut que l'équation

$$dX/dt = F(X , t) \ ; \qquad X(t_0) = X_0$$

n'admette pas de solution.

Il est facile d'en trouver des exemples ; on sait notamment que certaines équations aux dérivées partielles n'ont pas de solution même locale dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables.

On obtient néanmoins les deux énoncés suivants :

(2.2) THÉORÈME D'EXISTENCE. - On suppose que F est M-continue dans $E \times I$, que $\partial F/\partial X$ existe et est M-continue dans $E \times I$.

On suppose qu'il existe $\delta > 0$, et une suite B_n de disques bornés de E fermés pour $\mathcal{T}E$, telle que

$$(|t - t_0| \leqslant \delta) \Longrightarrow (F(X_0, t) \in B_1) ; \quad \ldots ; \ (|t - t_0| \leqslant \delta)$$

et

$$(X \in X_0 + \delta B_1 + \ldots + (\delta^n/n!)B_n) \Longrightarrow ((\partial F/\partial X)(X, t)B_n \subset B_{n+1}) ,$$

et telle que, si $F_n = \overline{\Gamma} \sum_{q \geqslant n} (\delta^q/q!)B_q$, $F_n \to 0$ (au sens de Mackey) dans E si $n \to +\infty$.

Alors il existe une application $t \to X(t)$ $]t_0 - \delta , t_0 + \delta[\to E$, à valeurs dans $X_0 + \overline{\Gamma} \sum_n (\delta^n/n!)B_n$, telle que $X(t_0) = X_0$ et $(dX/dt)(t) = F(X(t), t)$.

(2.3) THÉORÈME D'UNICITÉ. - On suppose que $t \to X(t)$ et $t \to Y(t)$ sont deux solutions de $dX/dt = F(X, t)$ telles que $X(t_0) = Y(t_0) = X_0$.

On suppose qu'il existe $\delta > 0$, et une suite B_n de disques fermés pour $\mathcal{T}E$, telle que, pour $|t - t_0| \leqslant \delta$,

$$X(t) \in X_0 + B_0 , \qquad Y(t) \in X_0 + B_0 ,$$

et

$$X \in X_0 + B_0 \Longrightarrow (\partial F/\partial X)(X, t)B_n \subset B_{n+1} ,$$

et telle que $\bigcap_n (\delta^n/n!)B_n = \{0\}$.

Alors on a $X(t) = Y(t)$ pour $|t - t_0| \leqslant \delta$.

(2.4) Remarques.

1° Ces résultats peuvent s'énoncer de façon un peu plus générale. On peut aussi abandonner l'hypothèse $\mathcal{T}E$ quasi-complet, en remplaçant la M-continuité par une notion de continuité un peu plus forte, et en supposant E e. b. c. complet (c'est en particulier le cas si F est continûment différentiable dans $E \times I$).

2° Nous pouvons aussi obtenir des résultats de continuité et de différentiabilité de la solution, par rapport à la condition initiale X_0, ou par rapport à un paramètre Λ pour une équation $dX/dt = F(\Lambda, X, t)$; $X(t_0) = X_0$ (voir [7]).

(2.5) Démonstrations. - Elles s'obtiennent par la méthode classique d'itération $X_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(X_{n-1}(u), u)\, du$, grâce à une théorie de l'intégration des fonctions M-continues de I dans un e. b. c. E.

(2.6) Nous avons montré [7] que le théorème d'Ovcyannikov est un aspect de ces résultats d'existence et d'unicité ; nous pouvons donc obtenir les applications du théorème d'Ovcyannikov ([19], [22], [23], [24]). Nous pouvons aussi obtenir certains théorèmes non linéaires [25].

(2.7) Si A est un opérateur aux dérivées partielles, linéaire et indépendant du temps, nos résultats d'existence reviennent à la méthode classique consistant à définir l'opérateur $\exp(tA)$.

(2.8) Nos résultats (2.2) et (2.3) sont très voisins de certains résultats de TRÈVES, obtenus indépendamment de nous [26].

(2.9) <u>Interprétation de certaines équations aux dérivées partielles comme des équations différentielles dans les e. b. c.</u> - Soient Ω un ouvert de R^n, et

$$(\partial u/\partial t)(x, t) = \Phi(x, t, u(x, t), (\partial^K u/(\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}))(x, t)),$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

une équation aux dérivées partielles dans Ω. En posant $u(x, t) = X(t)(x)$ (si on cherche une fonction u solution ; sinon, si, pour tout t, $u(. , t)$ est une distribution portant sur la variable x, on pose $u(. , t) = X(t)$), nous interprétons cette équation comme l'équation $dX/dt = F(X, t)$; $X(0) = u_0$, où F est définie par

$$F(X, t)(x) = \Phi(x, t, X(t)(x), (\partial^K/(\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}))\, X(t)(x))$$

(si $X(t)$ est une fonction). "La dérivée $\partial/\partial t$ " est alors interprétée par : l'application $t \to X(t)$, d'un ouvert de R ou $\underset{\sim}{C}$ dans un certain e. b. c. E, est dérivable. Dans les cas usuels, cette interprétation se confond avec la dérivation $\partial/\partial t$ au sens classique.

(2.10) Supposons que E soit, par exemple, l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment différentiables de R dans R muni de la bornologie associée à sa topologie usuelle d'espace de Fréchet : une base de la bornologie nous est donnée par les

$$B\begin{pmatrix} K_1, \ldots, K_n, \ldots \\ \varepsilon_0^1, \ldots, \varepsilon_0^n, \ldots \\ \varepsilon_q^1, \ldots, \varepsilon_q^n, \ldots \end{pmatrix} = \{\varphi \in \mathcal{E} \mid \|\varphi^{(q)}\|_{K_n} \leqslant \varepsilon_q^n\},$$

où K_n est une suite exhaustive de compacts de R, et les ε_q^n des réels positifs. Soit $u(t, x) = X(t)(x)$; on a alors :

X <u>est dérivable au point</u> t_0, <u>si, et seulement si, pour tout</u> $q = 0, 1, 2, \ldots$,

$$1/h((\partial^q u(t_0 + h, x))/\partial x^q - (\partial^q u(t_0, x))/\partial x^q) \to (\partial^{q+1} u(t_0, x))/(\partial t\, \partial x^q),$$

<u>si</u> $h \to 0$,

<u>uniformément en</u> x <u>sur tout compact de</u> R, <u>et</u>

$$X'(t_0)(x) = (\partial u/\partial t)(t_0, x) .$$

<u>Démonstration</u>. - La condition nécessaire est évidente ; pour la condition suffisante, on se sert du fait classique que, dans $\underset{\sim}{R}^N$, une suite qui converge topologiquement converge bornologiquement, pour montrer que, pour tout compact K de R, il existe une suite $(\varepsilon_n > 0)$ telle que,

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(|h| < \eta) \Longrightarrow ((X(t_0 + h) - X(t_0))/h - X'(t_0) \in \varepsilon B(K, \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)) ,$$

où

$$B(K, \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n) = \{\varphi : K \to R \text{ indéfiniment différentiables telles que } \|\varphi^{(q)}\|_K \leqslant \varepsilon_q\} .$$

On se sert ensuite de même de la dénombrabilité de la suite K_n.

(2.11) <u>Indiquons plus particulièrement une application au théorème de Cauchy-Kovalevska dans le cas d'une équation linéaire.</u>

$$(\partial u/\partial t)(x, t) = a(x, t)(\partial u/\partial x)(x, t) + b(x, t)\, u(x, t) + c(x, t)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) .$$

Nous utiliserons la méthode d'Ovcyannikov pour la construction de la suite B_n.

On cherche à montrer l'existence et l'unicité de la solution pour $|t|$ assez petit et x dans un "petit" voisinage d'un point x_0 donné de $\underset{\sim}{C}$. K est un compact de $\underset{\sim}{C}$ d'intérieur contenant x_0, tel que les fonctions $x \to a(x, t)$ et $x \to b(x, t)$ soient définies dans un voisinage de $K + s_0$

$$(K + s_0 = \{x \in \underset{\sim}{C} \mid d(x, K) \leqslant s_0\}) \qquad (s_0 > 0) ,$$

et, pour tout t, dans un voisinage de 0 de $\underset{\sim}{C}$ $(|t| \leqslant \delta)$; soit $A > 0$ tel que

$$\|a(\cdot, t)\|_{K+s_0} \leqslant A/2 \qquad \text{et} \qquad \|b(\cdot, t)\|_{K+s_0} \leqslant A/2 , \qquad \text{si} \quad |t| \leqslant \delta .$$

On pose

$$\{\{M\ ,\ s\}\} = \{\varphi \text{ analytiques à l'intérieur de } K + s\ ,$$
$$\text{continues dans } K + s \text{ , et majorées par } M \text{ sur } K + s\}\ ,$$

ce qui définit la bornologie de l'espace $E = \mathcal{H}(K)$ des germes des fonctions analytiques autour du compact K , qui est ainsi un e. b. c. de Silva [11].

$$\Phi(\varphi\ ,\ t)(x) = a(x\ ,\ t)(\partial\varphi/\partial x)(x) + b(x\ ,\ t)\ \varphi(x) + c(x\ ,\ t)\ ,$$
$$[(\partial\Phi/\partial\varphi)(\varphi\ ,\ t).\psi](x) = a(x\ ,\ t)(\partial\psi/\partial x)(x) + b(x\ ,\ t)\ \psi(x)\ .$$

$B_1 = \{\{M\ ,\ s_0\}\}$ (pour un certain $M > 0$) ; soient d $(0 < d < s_0)$, et $s = s_0 - d$.

$(\varphi \in B_1) \implies (\|\varphi'\|_{K+s} \leqslant M/d)$, d'après la formule de Cauchy ;

$B_2 = \Gamma\{a\varphi' + b\varphi$, où $\varphi \in B_1\}$; choisissons $d < 1$; on a

$$\|\varphi\|_{K+s} \leqslant M \leqslant M/d\ ,$$

donc

$$B_2 \subset \{\{AM/d\ ,\ s\}\}\ , \qquad \text{pour tout } s \quad (0 < s < s_0)\ ;$$

donc, en changeant d en $d(1 - 1/2)$ (c'est là l'astuce de la méthode d'OVCYANNIKOV),

$$B_2 \subset \{\{AM/(d(1 - 1/2))\ ,\ s + d/2\}\} \qquad (\text{pour tout } s \text{ tel que } 0 < s < s_0\ )\ ,$$

d'où

$$B_3 \subset \{\{((A^2\,M)/d^2)(2/(1 - 1/2))\ ,\ s\}\}\ ,$$

donc

$$B_3 \subset \{\{((A^2\,M)/d^2)(2/(1 - 1/2)(1 - 1/3)^2)\ ,\ s + d/3\}\}\ ,$$

en changeant d en $d(1 - 1/3)$.

$$B_n \subset \{\{((A^{n-1}\,M)/d^{n-1})((2.3\ldots(n - 1))/((1 - 1/2)(1 - 1/3)^2\ldots(1 - 1/n)^{n-1}))\ ,\ s + d/n\}\}\ ,$$

donc

$$B_n \subset \{\{((A^{n-1}\,M)/d^{n-1})\ e^{n-1}(n - 1)!\ ,\ s\}\}\ ,$$

donc $\sum(\delta^n/n!)B_n$ "converge" si $\delta > 0$ est assez petit, d'où le résultat d'existence ; l'unicité se montre de même ; la fonction u , définie par

$$u(x\ ,\ t) = X(t)(x)\ ,$$

est analytique.

3. Variétés de dimension infinie.

Nous donnons les définitions d'une structure de variété, construite à partir d'applications indéfiniment différentiables, et nous indiquons très rapidement qu'on peut munir de cette structure divers ensembles déjà considérés dans [12], [13], [15], etc.

(3.1) DÉFINITION. - On dit qu'un ensemble M a une structure de variété indéfiniment différentiable, si, pour tout point x de M, il existe une partie V_x de M contenant x et une application ψ_{V_x} bijective de V_x sur un ouvert Ω_{V_x} pour τE_{V_x} d'un e. b. c. polaire E_{V_x}, si, lorsque $V_x \cap V_y \neq \emptyset$, $\psi_{V_x}(V_x \cap V_y)$ est ouvert dans τE_{V_x} et l'application $\psi_{V_x} \circ \psi_{V_y}^{-1} : \psi_{V_y}(V_x \cap V_y) \rightarrow E_{V_x}$ est indéfiniment différentiable.

(3.2) On peut alors définir une topologie sur M : Une partie $\mathcal{O}$ de M est ouverte, si, pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe un ouvert admissible $V_x \subset \mathcal{O}$; tout ouvert de M est ainsi canoniquement muni d'une structure de variété indéfiniment différentiable.

(3.3) DÉFINITION. - Soient M et M' deux variétés indéfiniment différentiables ; une application $f : M \rightarrow M'$ est dite indéfiniment différentiable, si :

1° f est continue de M dans M' pour les topologies considérées dans (3.2) ;

2° Si V_x et $V'_{f(x)}$ sont deux ouverts admissibles de M et M' aux points x et $f(x)$ tels que $f(V_x) \subset V'_{f(x)}$, l'application $\psi'_{V'_{f(x)}} \circ f \circ \psi_{V_x}^{-1} : \Omega_{V_x} \rightarrow E_{V'_{f(x)}}$ est indéfiniment différentiable.

(3.4) Ces structures généralisent évidemment les structures de variétés banachiques indéfiniment différentiables. Tout ouvert U (pour la topologie τE) d'un e. b. c. polaire E est une variété indéfiniment différentiable, et alors la topologie (3.2) est la topologie induite sur U par τE.

(3.5) On peut évidemment à la place d'applications indéfiniment différentiables prendre des applications p fois continûment différentiables ou des applications $\mathcal{C}_\infty$ (au sens de (0.9)).

(Toute application indéfiniment différentiable est $\mathcal{C}_\infty$, lorsque l'e. b. c. de départ est un e. b. c. de Schwartz.)

(3.6) On peut utiliser ces variétés pour munir d'une structure différentiable divers ensembles : ensemble des applications indéfiniment différentiables d'une variété de dimension finie et compacte M, indéfiniment différentiable, dans une variété indéfiniment différentiable M' munie d'une structure riemanienne ; l'ensemble des difféomorphismes d'une variété compacte de dimension finie et indéfiniment différentiable, etc. Nous allons en voir un exemple.

(3.7) Un exemple d'utilisation de variétés indéfiniment différentiables construites sur des espaces de Fréchet.

Cet exemple nécessite la connaissance de l'article de KIJOWSKI-KOMOROWSKI [13]. Nous obtenons des résultats analogues aux leurs en utilisant la théorie du calcul différentiel dans les e. b. c. à la place de celle de KIJOWSKI-SZCZYRBA [14].

Nous adoptons les notations de [13], et nous nous bornons à indiquer comment nous modifions [13].

$\mathcal{E}(\Omega)$ est munie de la bornologie suivante : une partie P de $\mathcal{E}(\Omega)$ est bornée, si, pour toute carte Ω' de Ω, P est borné dans $\mathcal{C}_\infty(\Omega', R)$ (il s'agit de la bornologie associée à la topologie d'espace de Fréchet considérée dans [13]). Pour la topologie de $\mathcal{P}$ et la construction de la variété topologique $\mathcal{P}$, nous pouvons suivre [13] (p. 192-196). Pour la structure différentiable, il nous suffit de montrer le théorème 2 (p. 197) de [13]. $\Omega \in \mathcal{P}$; H, $G \in \mathfrak{H}(\Omega)$. Le théorème 2 (p. 197) de [13] indique que l'application $S : \mathcal{V} \to \mathcal{E}(\Omega)$, définie par

$$S(\varphi) = L(\varphi)^{-1}(\overline{\gamma}(\varphi)) \quad ,$$

est indéfiniment différentiable au sens de [14] ; nous allons montrer qu'elle est $\mathcal{C}_\infty$ (au sens de (0.9)). Pour cela, il suffit de montrer que les deux applications $\varphi \to L(\varphi)^{-1}$ et $\varphi \to \overline{\gamma}(\varphi)$ sont $\mathcal{C}_\infty$.

LEMME 1. - $\varphi \to \overline{\gamma}(\varphi)$ <u>de</u> $\mathcal{V}$ <u>dans</u> $\mathcal{E}(\Omega)$ <u>est</u> $\mathcal{C}_\infty$.

$\overline{\gamma}(\varphi)(p) = \gamma(p, \varphi(p))$, donc $\overline{\gamma}$ est obtenue par composition d'applications $\mathcal{C}_\infty$, donc est $\mathcal{C}_\infty$.

LEMME 2. - $\varphi \to L(\varphi)^{-1}$ <u>de</u> $\mathcal{V}$ <u>dans</u> $\mathcal{L}(\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{E}(\Omega))$ <u>est</u> $\mathcal{C}_\infty$.

$\tau_\varphi(p) = \tau(p, \varphi(p))$, donc $\varphi \to \tau_\varphi$ est $\mathcal{C}_\infty$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{C}_\infty(\Omega, \Omega)$, comme étant obtenue par composition d'applications $\mathcal{C}_\infty$. $\varphi \to L(\varphi)$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{E}(\Omega))$ est définie par $L(\varphi).\psi = \psi \circ \tau_\varphi$, et donc est $\mathcal{C}_\infty$, d'après (0.11). De plus, $\varphi \to L(\varphi)^{-1}$: $(\psi \to \psi \circ \tau_\varphi^{-1})$ est localement bornée (terminologie de [6]) de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{E}(\Omega))$, donc, d'après la démonstration utilisée dans [5] (p. 42-43) pour la proposition (B1) de [6], on a le lemme 2.

L'ensemble $\mathcal{P}$ peut donc être muni ainsi d'une structure de variété indéfiniment différentiable.

(3.8) On peut obtenir aussi des résultats analogues à ceux de LESLIE [15] ou de KIJOWSKI-KOMOROWSKI [13].

Pour ces variétés générales, on définit le fibré tangent comme dans le cas classique ; on peut ainsi définir les champs de tenseurs et les formes différentielles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANTOINE (Philippe). - Sur la structure de certains espaces fonctionnels, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 1722-1724.

[2] AVERBUKH (V. I.) and SMOLJANOV (O. G.). - The various definitions of the derivative in linear topological spaces, Russian math. Surveys, t. 23, 1968, n° 4, p. 67-113.

[3] BASTIANI (Andrée). - Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, J. Anal. math., Jérusalem, t. 13, 1964, p. 1-114.

[4] BUCHER (Willi). - Différentiabilité de la composition et complétitude de certains espaces fonctionnels, Comment. math. Helvet., t. 43, 1968, p. 256-288.

[5] COLOMBEAU (Jean-François). - Calcul différentiel dans les espaces bornologiques, Thèse 3e cycle, Math., Bordeaux, 1970.

[6] COLOMBEAU (Jean-François). - L'inversion d'une application différentiable entre espaces bornologiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 1692-1694.

[7] COLOMBEAU (Jean-François). - Fonctions implicites et équations différentielles dans les espaces bornologiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 240-243.

[8] EELLS (James, Jr). - On the geometry of function spaces, Symposium internacional de topologia algebraica [1956. Mexico], p. 303-308. - Mexico, UNESCO, 1958.

[9] EELLS (James, Jr). - A setting for global analysis, Bull. Amer. math. Soc., t. 72, 1966, p. 751-807.

[10] FRÖLICHER (A.) and BUCHER (W.). - Calculus in vector spaces without norm. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 20).

[11] HOGBE-NLEND (Henri). - Les fondements de la bornologie moderne, I (à paraître dans les Lecture Notes in Mathematics).

[12] KIJOWSKI (Jerzy). - Existence of differentiable structure in the set of submanifolds, Studia Math., Warszawa, t. 33, 1969, p. 93-108.

[13] KIJOWSKI (J.) and KOMOROWSKI (J.). - A differentiable structure in the set of the bundle sections over compact subsets, Studia Math., Warszawa, t. 32, 1969, p. 191-207.

[14] KIJOWSKI (J.) and SZCZYRBA (W.). - On differentiability in an important class of locally convex spaces, Studia Math., Warszawa, t. 30, 1968, p. 247-257.

[15] LESLIE (J. A.). - On a differential structure for the group of diffeomorphisms, Topology, t. 6, 1967, p. 263-271.

[16] McDERMOTT (T.). - Nonlinear mappings in locally convex spaces, Loyola University of Los Angeles (Preprint).

[17] McDERMOTT (T.). - Implicity defined mappings in locally convex spaces, Loyola University of Los Angeles (Preprint).

[18] MEEUS (D.). - Thèse Sciences mathématiques, Louvain 1970.

[19] OVCYANNIKOV (L. V.). - A singular operator in a scale of Banach spaces, Soviet Math. Doklady, t. 6, 1965, p. 1025-1028.

[20] SEBASTIÃN E SILVA (J.). - Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes, Atti Acad. naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sc. fis., mat. e nat., Série 8, t. 20, 1956, p. 743-750, et t. 21, 1956, p. 40-46.

[21] SEBASTIÃN E SILVA (J.). - Les espaces à bornés et la notion de fonction différentiable, Colloque sur l'analyse fonctionnelle [1960. Louvain], p. 57-61. - Paris, Gauthier-Villars, 1961 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[22] STEINBERG (S.) and TRÈVES (F.). - Pseudo-Fokker-Planck equations and hyperdifferential operators, J. diff. Equations, t. 8, 1970, p. 333-366.

[23] TRÈVES (François). - Ovcyannikov theorem and hyperdifferential operators. - Rio de Janeiro, Instituto de Matemática pura e aplicada, 1968 (Notas de Matemática, 46).

[24] TRÈVES (François). - On the theory of linear partial differential operators with analytic coefficients, Trans. Amer. math. Soc., t. 137, 1969, p. 1-20.

[25] TRÈVES (François). - An abstract nonlinear Cauchy-Kovalevska theorem, Trans. Amer. math. Soc., t. 150, 1970, p. 77-92.

[26] TRÈVES (François). - Differential equations in Banach filtrations (Preprint).

(Texte reçu le 3 mai 1971)

Jean-François COLOMBEAU
UER de Mathématiques et Informatique
Université de Bordeaux 1
351 cours de la Libération
33 - TALENCE