Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Marie-Thérèse Akkar

Espaces vectoriels bornologiques ordonnés

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 1 (1970-1971), exp. n° 8, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_1_A4_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 8, 27 p.

6 et 7 janvier 1971

ESPACES VECTORIELS BORNOLOGIQUES ORDONNÉS

par Marie-Thérèse AKKAR

Introduction. - Dans l'ensemble de cet exposé, nous adopterons la terminologie utilisée dans [3], [4], [5] et [6] pour ce qui concerne la théorie des espaces vectoriels topologiques ou bornologiques, et nous nous conformerons à [12] et [14] pour ce qui concerne les espaces vectoriels ordonnés avec ou sans topologie.

Signalons que la notation $x_n \xrightarrow{b} x$ dans un e. v. b. (espace vectoriel bornologique) signifie que la suite x_n converge bornologiquement vers x (on dit aussi au sens de Mackey). Tous les espaces considérés ici ont pour corps de base $\mathbb{R}$. Dans tout ce qui suit, E désignera un espace vectoriel ordonné de cône K. Rappelons qu'une forme linéaire sur E est bornée pour l'ordre (ou modérée), si elle est bornée pour la bornologie de l'ordre (on dit aussi relativement bornée). L'ensemble $\overline{E}$ des formes linéaires bornées pour l'ordre s'appelle le dual modéré de E. On appelle dual pour l'ordre de E, le sous-espace vectoriel $E^+ = K^* - K^*$, où K^* est l'ensemble des formes linéaires positives sur E. On a toujours $E^+ \subset \overline{E}$. Dans le cas où E est filtrant et vérifie la propriété de décomposition (en particulier s'il est réticulé), alors $\overline{E} = E^+$.

Nous nous proposons d'étudier quelques aspects des liens très étroits qui existent entre les structures ordonnées et la bornologie, car, bien souvent, on constate que, dans la théorie des structures topologiques ordonnées, les topologies considérées dans de nombreux problèmes n'interviennent dans leur rapport avec l'ordre que par la famille de leurs parties bornées. La topologie canonique associée à un ordre sur un espace vectoriel est elle-même définie par la bornologie de l'ordre. En 1954, d'ailleurs, G. T. ROBERTS [13] a dégagé la notion d'espace bornologique (puisqu'il a été amené à étudier des topologies définies par une famille de parties "bornées") à partir d'une étude sur les espaces vectoriels topologiques ordonnés.

Dans une première partie, nous examinons le problème général du prolongement des applications linéaires positives sur un espace archimédien à son complété pour l'ordre.

Dans une deuxième partie, après avoir introduit les notions d'espace vectoriel bornologique plein et d'espace vectoriel bornologique solide, espaces qui possèdent d'ailleurs beaucoup de propriétés analogues à celles des e. l. c. à cône normal et des e. l. c. localement solides, nous apportons une réponse affirmative au problème suivant : Si E est un e. b. c. réticulé solide, comment définir une bornologie convenable sur le complété pour l'ordre de E prolongeant la bornologie de E d'une part, et d'autre part comment définir un ordre sur le complété bornologique $\hat{E}$ de E de telle sorte que E devienne un sous-espace ordonné réticulé de $\hat{E}$?

Enfin, dans une dernière partie, nous étudions l'espace vectoriel des applications linéaires bornées, muni de la bornologie naturelle (ou équibornologie), et nous cherchons dans quelles conditions cet espace est un e. b. c. réticulé solide. Nous donnons aussi des conditions suffisantes pour que toute forme linéaire positive soit bornée.

Première partie

Prolongement des applications linéaires au complété pour l'ordre

Soit E un espace vectoriel ordonné par un cône K . Dans le cas où E n'est pas complet pour l'ordre, on montre qu'on peut toujours le considérer, s'il est archimédien, comme un sous-espace ordonné d'un espace complet. D'une manière plus précise :

THÉORÈME 1. - Etant donné E , un espace vectoriel archimédien tel que $E = K - K$, il existe un espace vectoriel réticulé OE , unique à un isomorphisme d'ordre près, tel que :

1° OE est complet pour l'ordre ;

2° Il existe φ linéaire injective, $E \to OE$;

3° Si $x , y \in E$, $x \leqslant y$ équivaut à $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$;

4° Si A est une partie de E admettant une borne supérieure dans E , alors $\varphi(\sup A) = \sup \varphi(A)$;

5° $\forall\, \hat{x} \in OE$, $\hat{x} = \inf\{\varphi(x) \mid \varphi(x) \geqslant \hat{x} ,\ x \in E\} = \sup\{\varphi(x) \mid \varphi(x) \leqslant \hat{x} ,\ x \in E\}$.

On dit que OE est le complété pour l'ordre de E . La démonstration de ce théorème se trouve par exemple dans [12].

En topologie, comme en bornologie, quand on construit le complété topologique ou bornologique d'un espace E , les morphismes (applications linéaires continues ou bornées) se prolongent de façon unique au complété de E . Dans le cas d'un espace ordonné, jusqu'à maintenant on ne sait pas prolonger en général les morphismes pour l'ordre, c'est-à-dire les applications linéaires positives, au complété pour l'ordre.

On se propose dans la suite d'examiner ce problème qui se posera de façon naturelle dans plusieurs questions : par exemple quand il s'agira de construire une bornologie sur le complété pour l'ordre d'un e. b. c. ordonné. Pour cela, nous allons introduire un type particulier d'applications qui s'adapte bien au prolongement.

DÉFINITION 2. - Soient E et F deux espaces vectoriels ordonnés. Une application linéaire f de E dans F est dite complètement réticulante, si, pour toute partie A de E telle que $\sup A$ existe, on a $\sup f(A) = f(\sup A)$.

Concernant ces applications, nous avons les propriétés simples suivantes :

PROPOSITION 3. - Soient E et F deux espaces vectoriels ordonnés, f une application linéaire de E dans F ; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° f est complètement réticulante ;
2° Pour toute partie A de E telle que $\inf A$ existe, alors $\inf(f(A)) = f(\inf A)$;
3° Pour toute partie A telle que $\inf A = 0$, alors $\inf(f(A)) = 0$;
4° Pour toute partie A telle que $\sup A = 0$, alors $\sup(f(A)) = 0$.

Il est de même immédiat que le composé de deux applications complètement réticulantes est complètement réticulant. De plus, toute forme linéaire complètement réticulante est régulière, c'est-à-dire que, pour toute famille $(x_i)_i$ filtrante telle que $\inf x_i = 0$, on a $\lim f(x_i) = 0$.

Dans le cas où E et F sont réticulés, une application complètement réticulante est en particulier réticulante. Par conséquent, son noyau est un idéal pour l'ordre. Dans le cas où E est complet pour l'ordre, on a un résultat plus précis :

PROPOSITION 4. - Si E est un espace vectoriel réticulé, complet pour l'ordre, F un espace vectoriel réticulé, et f une application complètement réticulante de E dans F , alors le noyau de f est une bande de E .

Démonstration. - Si $N = \operatorname{Ker} f$, on sait déjà que N est un idéal pour l'ordre. Il suffit donc de démontrer que, si A est une partie de N majorée dans E , alors $\sup A$ appartient à N , ce qui est évident puisque $f(\sup A) = \sup f(A) = 0$.

Exemples d'applications complètement réticulantes.

1° $\varphi : E \to OE$ est complètement réticulante.

2° Si B est une bande d'un espace vectoriel réticulé complet E , le projecteur p_B sur B est complètement réticulant (cela provient du fait que $p_B(x) \leqslant x$, $\forall x \geqslant 0$).

3° Si B est un idéal d'un espace vectoriel réticulé complet E , l'injection canonique de B dans E est complètement réticulante.

4° Si f est une application linéaire positive, telle que $f \leqslant g$ avec g complètement réticulante, alors f l'est aussi.

Prolongement d'une application linéaire au complété pour l'ordre. - Soient E un espace vectoriel ordonné archimédien filtrant, F un espace vectoriel réticulé complet pour l'ordre, et f une application linéaire positive de E dans F. Existe-t-il une application $\tilde{f}$ positive de OE dans F, qui prolonge d'une manière unique f ?

D'après le théorème 1, on sait que, quel que soit $\hat{x}$ appartenant à OE, on a

$$\hat{x} = \sup\{\varphi(x) \mid x \in E , \varphi(x) \leqslant \hat{x}\} = \inf\{\varphi(x) \mid x \in E , \varphi(x) \geqslant \hat{x}\} .$$

Il est donc tout-à-fait naturel de définir l'application $\tilde{f}$, soit par

$$g(\hat{x}) = \sup\{f(x) \mid x \in E , \varphi(x) \leqslant \hat{x}\}$$

(cette borne supérieure existe, puisque F est complet pour l'ordre), soit par

$$h(\hat{x}) = \inf\{f(x) \mid x \in E , \varphi(x) \geqslant \hat{x}\} .$$

En général, il n'est pas vrai que $g(\hat{x}) = h(\hat{x})$, si f est uniquement positive ; ce qui va nous amener à introduire une condition supplémentaire sur f.

Pour l'instant, considérons l'application g. Il est clair que g prolonge f, et que g est positive.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; on a

$$g(\lambda\hat{x}) = \lambda g(\hat{x}) , \qquad \text{si } \lambda \geqslant 0 ,$$

$$g(\lambda\hat{x}) = \lambda h(\hat{x}) , \qquad \text{si } \lambda \leqslant 0 .$$

Soient $\hat{x}$ et $\hat{y}$ appartenant à OE,

$$g(\hat{x} + \hat{y}) = \sup\{f(z) \mid z \in E , \varphi(z) \leqslant \hat{x} + \hat{y}\} ,$$

$$g(\hat{x}) + g(\hat{y}) = \sup\{f(x) \mid x \in E , \varphi(x) \leqslant \hat{x}\} + \sup\{f(y) \mid y \in E , \varphi(y) \leqslant \hat{y}\}$$
$$= \sup\{f(x + y) \mid x , y \in E , \varphi(x) \leqslant \hat{x} \text{ et } \varphi(y) \leqslant \hat{y}\} ,$$

donc $g(\hat{x}) + g(\hat{y}) \leqslant g(\hat{x} + \hat{y})$, l'égalité n'étant pas vérifiée en général.

Toutefois, on constate que les deux parties

$$A = \{z \in E \mid \varphi(z) \leqslant \hat{x} + \hat{y}\} \qquad \text{et} \qquad B = \{x + y \mid \varphi(x) \leqslant \hat{x} \text{ et } \varphi(y) \leqslant \hat{y}\}$$

admettent le même ensemble de majorants dans E : en effet, tout majorant de A ou de B est majorant de $\hat{x} + \hat{y}$ dans OE, et inversement. Ce qui nous amène à la définition suivante :

DÉFINITION 5. - On dira que l'application f vérifie la condition (P), si

$$(P) \qquad (\text{Maj } A = \text{Maj } B) \Longrightarrow (\text{Maj } f(A) = \text{Maj } f(B))$$

(Maj A désignant l'ensemble des majorants de A).

Remarquons que, si E et F sont complets pour l'ordre, l'application $f : E \to F$ vérifie (P), si, et seulement si, f est complètement réticulante, et que le composé de deux applications qui vérifient (P) vérifie encore (P).

Dans le cas où f vérifie la condition (P), nous allons montrer que g est linéaire, et que $g = h$. En effet,

$$g(\hat{x} + \hat{y}) = \sup\{f(A)\} = \inf\{\text{Maj } f(A)\} \quad ,$$

$$g(\hat{x}) + g(\hat{y}) = \sup\{f(B)\} = \inf\{\text{Maj } f(B)\} \quad ;$$

g étant additive et positivement homogène est donc linéaire, et

$$g(\hat{x}) = - g(- \hat{x}) = h(\hat{x}) \quad .$$

THÉORÈME 6. - Si f vérifie (P), elle admet un prolongement $\tilde{f}$ complètement réticulant unique. De plus, pour qu'une application linéaire positive f de E dans F (avec toujours les mêmes hypothèses sur E et F) admette un prolongement complètement réticulant f, à OE, il est nécessaire et suffisant que f vérifie (P).

Démonstration. - D'après ce qui précède, nous avons construit un prolongement $\tilde{f}$ de f à OE de la façon suivante :

$$\tilde{f}(\hat{x}) = \sup\{f(x) \mid \varphi(x) \leqslant \hat{x} , \quad x \in E\} \quad .$$

Montrons que $\tilde{f}$ est complètement réticulante : Soit $(\hat{a}_\alpha)_\alpha$ une famille majorée d'éléments de OE, soit $\hat{a} = \sup\limits_\alpha \hat{a}_\alpha$. Par définition, on a

$$\hat{a} = \sup\{\varphi(x) \mid \varphi(x) \leqslant \hat{a} , \quad x \in E\} \quad ,$$

et

$$\forall \alpha , \qquad \hat{a}_\alpha = \sup\{\varphi(x_\alpha) \mid \varphi(x_\alpha) \leqslant \hat{a}_\alpha , \quad x_\alpha \in E\} \quad ,$$

d'où

$$\tilde{f}(\hat{a}) = \sup\{f(x) \mid x \in B\} , \qquad \text{où} \quad B = \{x \in E \mid \varphi(x) \leqslant \hat{a}\} \quad ,$$

et

$$\tilde{f}(\hat{a}_\alpha) = \sup\{f(x) \mid x \in B_\alpha\} , \qquad \text{où} \quad B_\alpha = \{x \in E \mid \varphi(x) \leqslant \hat{a}_\alpha\} \quad ,$$

donc $\sup\limits_\alpha \tilde{f}(\hat{a}_\alpha) = \sup\{f(x) \mid x \in \bigcup\limits_\alpha B_\alpha\}$.

Les deux parties B et $\bigcup\limits_\alpha B_\alpha$ ont même ensemble de majorants ; en effet,

$$\operatorname{Maj}_E (\bigcup_\alpha B_\alpha) = \operatorname{Maj}_E (\sup_{OE} \bigcup_\alpha B_\alpha) = \operatorname{Maj}_E \hat{a} = \operatorname{Maj}_E B \ .$$

L'application f vérifiant (P), il s'ensuit que

$$\operatorname{Maj}[f(\bigcup_\alpha B_\alpha)] = \operatorname{Maj}[f(B)] \ .$$

F étant complet, on a donc

$$\sup[f(\bigcup_\alpha B_\alpha)] = \sup f(B) \ ,$$

c'est-à-dire $\tilde{f}(\sup \hat{a}_\alpha) = \sup \tilde{f}(\hat{a}_\alpha)$. Si f_1 est un prolongement positif de f , soit $\hat{x} \in OE$,

$$h(\hat{x}) = \inf\{f(x) \mid \varphi(x) \geqslant \hat{x}\} \geqslant f_1(\hat{x}) \geqslant \sup\{f(x) \mid \varphi(x) \leqslant \hat{x}\} = g(\hat{x}) \ .$$

f vérifiant (P), $g = h$, d'où $f_1 = \tilde{f}$.

Inversement, supposons qu'il existe un prolongement complètement réticulant f_1 . Soient A et B deux parties de E , telles que $\operatorname{Maj}_E A = \operatorname{Maj}_E B$; d'après la définition de OE , il est clair que $\sup_{OE} A = \sup_{OE} B$. f_1 étant un prolongement complètement réticulant de f , on a $\sup f_1(A) = \sup f_1(B)$, c'est-à-dire $\sup f(A) = \sup f(B)$, et donc $\operatorname{Maj} f(A) = \operatorname{Maj} f(B)$.

Exemples.

1° L'application canonique $\varphi : E \to OE$ vérifie, par construction, la condition (P).

2° Si F est un idéal pour l'ordre d'un espace vectoriel réticulé E , alors l'injection canonique $i : F \to E$ **vérifie** (P).

Démonstration. - Soient A et B deux parties de F telles que $\operatorname{Maj}_F A = \operatorname{Maj}_F B$. Il s'agit de démontrer que $\operatorname{Maj}_E A = \operatorname{Maj}_E B$.

Soient $a \in A$, $b \in B$, $c = \inf(a , b) \in F$. $A_1 = A - c$ et $B_1 = B - c$ sont telles que $\operatorname{Maj}_F A_1 = \operatorname{Maj}_F B_1$; on est ainsi ramené à deux parties A_1 et B_1 de F telles que tous les éléments de $\operatorname{Maj} A_1$ et $\operatorname{Maj} B_1$ soient positifs. Montrons que $\operatorname{Maj}_E A_1 = \operatorname{Maj}_E B_1$, ce qui entraînera $\operatorname{Maj}_E A = \operatorname{Maj}_E B$.

Soient $x \in \operatorname{Maj}_E A_1$, $y \in \operatorname{Maj}_F A_1$; on a $0 \leqslant \inf(x , y) \leqslant y \in F$, donc $\inf(x , y) \in F$, et c'est un élément de $\operatorname{Maj}_F A_1 = \operatorname{Maj}_F B_1$, d'où x appartient à $\operatorname{Maj}_E B$.

PROPOSITION 7. - Soient E et F deux espaces vectoriels archimédiens filtrants. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $\tilde{f}$ complètement réticulante,

<u>telle que le diagramme suivant soit commutatif, est que</u> f <u>vérifie la condition</u> (P).

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \varphi_E \downarrow & & \downarrow \varphi_F \\ OE & \xrightarrow{\tilde{f}} & OF \end{array} .$$

<u>De plus, si</u> E <u>est réticulé et</u> f <u>est une application linéaire injective vérifiant</u> (P), <u>alors</u> $\tilde{f}$ <u>est injective</u>.

<u>Démonstration</u>. - Le prolongement $\tilde{f}$ existe, si, et seulement si, l'application $\varphi_F \circ f$ de E dans OF admet un prolongement à OE. D'après la proposition précédente, une condition nécessaire et suffisante pour cela est que $\varphi_F \circ f$ vérifie (P), et il est clair que $\varphi_F \circ f$ vérifie (P) si, et seulement si, il en est de même de f.

De plus, si $\hat{x}$ appartient à OE, $\tilde{f}(\hat{x}) = \tilde{f}(\hat{x}^+) - \tilde{f}(\hat{x}^-)$. f étant complètement réticulante,

$$\tilde{f}(\hat{x}^+) = [\tilde{f}(\hat{x})]^+ \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}(\hat{x}^-) = [\tilde{f}(\hat{x})]^- \quad ,$$

donc $(\tilde{f}(\hat{x}) = 0) \iff (\tilde{f}(\hat{x}^+) = 0$ et $\tilde{f}(\hat{x}^-) = 0)$. Pour montrer que $\tilde{f}$ est injective, il suffit donc de montrer que, pour tout $\hat{x} > 0$, on a $\tilde{f}(\hat{x}) > 0$. Or, si $\hat{x} > 0$, il existe $x \in E$ tel que $0 < x < \hat{x}$; en effet, il existe $y \in E$, $y \leqslant \hat{x}$, et y non négatif, donc $0 < y^+ \leqslant \hat{x}$, car E est réticulé.

$$(0 < x < \hat{x}) \implies (f(x) \leqslant \tilde{f}(\hat{x})) \quad ,$$

et f étant injective, $f(x) > 0$, donc $\tilde{f}(\hat{x}) > 0$.

COROLLAIRE 8.

1° <u>Si</u> E <u>est un espace vectoriel réticulé archimédien</u>, E_1 <u>un sous-espace réticulé de</u> E <u>tel que l'injection canonique</u> $E_1 \to E$ <u>vérifie</u> (P), <u>alors</u> OE_1 <u>est contenu dans</u> OE.

2° <u>Si</u> E_1 <u>est un idéal pour l'ordre de</u> E, OE_1 <u>est un idéal pour l'ordre de</u> OE.

<u>Démonstration</u>. - Le 1° découle immédiatement de la proposition précédente.

Pour le 2°, on sait que l'application identique $i : E_1 \to E$ vérifie (P), puisque E_1 est un idéal pour l'ordre. Donc OE_1 est contenu dans OE. Montrons que c'est un idéal pour l'ordre. Soit $|\hat{y}| \leqslant |\hat{x}|$, avec $\hat{x} \in OE_1$. $\tilde{i} : OE_1 \to OE$ étant complètement réticulante, donc réticulante,

$$|\hat{x}|_{OE} = |\hat{x}|_{OE_1} \quad .$$

$|\hat{x}| \in OE_1$, donc $|\hat{x}| = \inf\{u \in E_1 \mid u \geqslant |\hat{x}|\}$.

$$\hat{y}^+ = \sup\{v \in E \mid v \leqslant \hat{y}^+\} = \sup\{v \in E \mid v \geqslant 0 , v \leqslant \hat{y}^+\} .$$

$0 \leqslant v \leqslant \hat{y}^+ \leqslant |\hat{x}| \leqslant u$, $v \in E$, $u \in E_1$, idéal pour l'ordre de E , donc $v \in E_1$.

$$\hat{y}^+ = \sup\{v \in E_1 \mid v \geqslant 0 , v \leqslant \hat{y}^+\}$$

(cette borne supérieure étant la même dans OE_1 et OE , étant donné que l'application $\tilde{i}$ est complètement réticulante). Ceci prouve que $\hat{y}^+$ appartient à OE_1 ; on montrerait de la même manière que $\hat{y}^- \in OE_1$, donc $\hat{y} = \hat{y}^+ - \hat{y}^-$ aussi.

<u>Application : Limite projective d'espaces vectoriels ordonnés</u>. - Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille arbitraire d'espaces vectoriels ordonnés, et K_i le cône des positifs de E_i . Alors l'espace vectoriel produit $\prod\limits_i E_i$ est un espace vectoriel ordonné par le cône $K = \prod\limits_i K_i$.

Si maintenant la famille $(E_i)_{i\in I}$ forme un système projectif à l'aide d'applications $\pi_{ij} : E_j \to E_i$ $(i \leqslant j)$ positives, l'espace vectoriel $E = \varprojlim E_i$, muni de l'ordre induit par celui de l'espace produit $\prod\limits_i E_i$, est appelé <u>la limite projective ordonnée</u> des E_i .

Une application linéaire f d'un espace vectoriel ordonné F dans E est positive, si, et seulement si, les applications $f_i = \pi_i \circ f$ de F dans E_i sont positives. Et, si $f_i : F \to E_i$ est un système projectif d'applications linéaires positives, il existe une application linéaire positive unique f , telle que $f_i = \pi_i \circ f$, $\forall\, i$.

La démonstration des deux propositions suivantes est immédiate :

PROPOSITION 9. - <u>Soit</u> E <u>un espace limite projective ordonnée d'un système projectif</u> (E_i , π_{ij}) <u>d'espaces vectoriels ordonnés</u>.

1° <u>Si chaque</u> E_i <u>est archimédien, il en est de même de</u> E ;

2° <u>Si</u> E_i <u>est réticulé</u>, $\forall\, i$, <u>alors</u> E <u>est réticulé si les applications</u> π_{ij} <u>sont réticulantes</u>.

<u>De plus, une application</u> f <u>de</u> F <u>dans</u> E , <u>où</u> F <u>est un espace réticulé, est réticulante, si, et seulement si, les applications</u> $f_i = \pi_i \circ f$ <u>le sont</u>.

PROPOSITION 10. - <u>Si</u> $E = \varprojlim E_i$, <u>où chaque</u> E_i <u>est un espace vectoriel ordonné complet pour l'ordre, et si les applications</u> π_{ij} <u>sont complètement réticulantes,</u> <u>alors</u> E <u>est complet pour l'ordre</u>.

<u>De plus, une application linéaire</u> f <u>de</u> F <u>dans</u> E , <u>où</u> F <u>est un espace vectoriel ordonné complet pour l'ordre, est complètement réticulante, si, et seulement</u>

si, les applications $f_i = \pi_i \circ f$ le sont.

Deuxième partie

Complétion pour l'ordre et complétion bornologique dans les espaces bornologiques réticulés

Nous définissons et étudions d'abord deux classes d'espaces vectoriels bornologiques ordonnés : les e. b. c. pleins et les e. b. c. solides. Pour ces espaces, nous obtenons des propriétés de permanence très satisfaisantes, ainsi que deux théorèmes caractérisant leur structure. Les e. b. c. solides possèdent des propriétés remarquables de dualité avec les e. l. c. localement solides.

DÉFINITION 11. - Soit E un ensemble bornologique muni d'un ordre. La bornologie de E sera dite pleine, si E admet un système fondamental de bornés pleins. On dira alors que E est un ensemble bornologique plein.

A partir de cette définition, il est immédiat de constater qu'un ensemble bornologique est plein si, et seulement si, l'enveloppe pleine de tout borné est bornée, et que, si E est un ensemble ordonné, muni d'une base de bornologie $\mathcal{B}$, alors les parties $[B]$, $B \in \mathcal{B}$ ($[B]$ désignant l'enveloppe pleine de B), définissent une bornologie $\mathcal{B}'$ qui est la plus fine des bornologies pleines moins fines que $\mathcal{B}$.

Il est important de remarquer que, dans un ensemble bornologique plein, toute partie bornée pour l'ordre est bornée, et que, par conséquent, sur un ensemble ordonné filtrant, la bornologie de l'ordre est la plus fine des bornologies pleines de E .

DÉFINITION 11 bis. - Soit $(E , \mathcal{B})$ un e. v. b. muni d'un ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel de E . On dira que la bornologie $\mathcal{B}$ est une bornologie pleine, si $\mathcal{B}$ admet un système fondamental de bornés pleins. Dans ce cas, on dira que E est un e. v. b. plein ou que le cône K est b-normal.

Il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $(E , \mathcal{B})$ soit un e. v. b. plein est que l'enveloppe pleine de tout borné soit bornée, et que, si $(E , \mathcal{B})$ est un e. b. c. muni d'un ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel, E est un e. b. c. plein, si, et seulement si, E admet un système fondamental de bornés formé de disques pleins. Ce dernier point résulte du fait que l'enveloppe pleine d'un disque est un disque.

Remarquons aussi que, si E est un espace vectoriel ordonné filtrant, la bornologie de l'ordre est la plus fine des bornologies d'e. b. c. plein de E .

PROPOSITION 12. - Soit $(E , \mathcal{B})$ un e. b. c. muni d'un ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° E est un e. b. c. plein ;

2° Il existe une base de bornés $\mathcal{B}_1$, telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}_1 , \qquad 0 \leqslant x \leqslant y \in B \implies x \in B \ ;$$

3° $\forall B \in \mathcal{B}$, il existe $B' \in \mathcal{B}$ tel que

$$0 \leqslant x \leqslant y \in B \implies x \in B' \ .$$

Démonstration. - Il est immédiat que 1° $\implies$ 2° .

2° entraîne 3° ; il suffit de prendre pour B' un borné de $\mathcal{B}_1$ contenant B .

Montrons que 3° entraîne 1° . Soit B un borné disqué de E ; il existe $B_1 \in \mathcal{B}$ tel que $B - B \subset B_1$. D'après le 3°, il existe $B_2 \in \mathcal{B}$ tel que

$$0 \leqslant x \leqslant y \in B_1 \implies x \in B_2$$

(on peut toujours choisir $B_2 \supset B_1$). Nous avons donc $B \subset B - B \subset B_1 \subset B_2$. Soit $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $B_2 + B_2 \subset B_3$. Nous allons montrer que l'enveloppe pleine de B est contenue dans B_3 . Soit $z \in [B]$; il existe donc $x , y \in B$ avec $x \leqslant z \leqslant y$.

$$z = (z - x) + x \ , \quad 0 \leqslant z - x \leqslant y - x \in B - B \subset B_1 \implies z - x \in B_2 \ ;$$

x et $(z - x) \in B_2$, donc $z \in B_2 + B_2 \subset B_3$, c'est-à-dire $[B] \subset B_3$.

PROPOSITION 13.

(a) Le dual bornologique E^* d'un e. b. c. plein est contenu dans le dual modéré $\overline{E}$. Si E est filtrant et possède la propriété de décomposition, alors $E^* \subset E^+$.

(b) Si E est un e. l. c. localement plein, alors BE est un e. b. c. plein.

Démonstration. - $E^* \subset \overline{E}$ résulte du fait que la bornologie $\mathcal{B}$ de E est moins fine que la bornologie de l'ordre. Quant à l'inclusion $E^* \subset E^+$, il suffit de remarquer que $\overline{E} = E^+$ quand E est filtrant et vérifie la propriété de décomposition.

Enfin (b) résulte du corollaire 2 de [14] (p. 216).

Remarque. - Si (b) est vrai, en revanche il n'est pas vrai, en général, que, si E est un e. b. c. plein, alors TE est un e. l. c. localement plein. Cela provient du fait que l'enveloppe convexe d'une union de parties pleines n'est pas nécessairement pleine.

Contre-exemple. - Soit E un espace vectoriel ordonné filtrant tel que $E^+ \neq \overline{E}$ (pour un tel exemple d'espace, cf. 6.10 [10]). Muni de la bornologie de l'ordre,

E est un e. b. c. plein ; si TE était un e. l. c. localement plein, on aurait $\overline{E} = (TE)' \subset E^+$ (prop. 1.21, p. 72 de [12]). Comme on a toujours $E^+ \subset \overline{E}$, on en déduirait $\overline{E} = E^+$.

DÉFINITION 14. - Soit E un espace vectoriel réticulé muni d'une bornologie $\mathcal{B}$ d'e. v. b. On dira que la bornologie $\mathcal{B}$ est une bornologie solide, si $\mathcal{B}$ admet un système fondamental de bornés solides. Dans ce cas, on dira que E est un e. v. b. solide.

Il est immédiat que E est un e. v. b. solide si, et seulement si, l'enveloppe solide de tout borné est bornée.

Si E est un e. b. c. réticulé, E est solide si, et seulement si, E admet un système fondamental de bornés formé de disques solides. Ceci résulte immédiatement du fait que l'enveloppe convexe d'une partie solide est encore solide.

Un e. b. c. solide étant en particulier un e. b. c. plein, toute partie de E bornée pour l'ordre est bornée pour la bornologie. Ainsi donc, la bornologie de l'ordre est la plus fine des bornologies d'e. b. c. solides de E : en effet, les $[-x, +x]$, $x > 0$, forment une base de la bornologie de l'ordre.

Il est clair aussi que, dès qu'une des applications suivantes (qu'on appelle applications de réticulation) est bornée dans un e. b. c. réticulé, toutes les autres le sont : $x \to x^+$, $x \to x^-$, $x \to |x|$, $(x, y) \to \sup(x, y)$, $(x, y) \to \inf(x, y)$.

DÉFINITION 15. - Si $(E, \mathcal{B})$ est un e. b. c. ordonné par un cône K, on dira que K est un b-cône, si la famille $(B \cap K - B \cap K)_{B \in \mathcal{B}}$ constitue une base de bornologie de $\mathcal{B}$.

Cette notion n'est rien d'autre que la notion duale de celle de cône normal en théorie des e. l. c. ordonnés, comme le prouve le théorème suivant.

THÉORÈME 16.

1° Si E est un e. b. c. ordonné par un b-cône K, alors E^*, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E, est un e. l. c. ordonné par un cône normal.

2° Si E est un e. l. c. ordonné par un cône normal K, alors E', muni de la bornologie équicontinue, est un e. b. c. ordonné par un b-cône, et réciproquement.

Démonstration.

1° Sur E^*, dual de l'e. b. c. E, un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E est formé par les ensembles $(B \cap K)^0$ (puisque K est un b-cône), quand B parcourt une base de bornologie de E. Vérifions que les $(B \cap K)^0$ sont pleins : si $f \in E^*$ est telle que $g \leqslant f \leqslant h$ avec g et h dans $(B \cap K)^0$, alors on a $|g(x)| \leqslant 1$ et $|h(x)| \leqslant 1$, $\forall\, x \in B \cap K$, d'où $|f(x)| \leqslant 1$, c'est-à-dire $f \in (B \cap K)^0$.

[Pour la deuxième partie du théorème, voir corollaire 1, p. 219 de [14].]

Exemples.

1° Si E est un espace vectoriel ordonné filtrant, dans E muni de la bornologie de l'ordre, le cône K est un b-cône. En effet, E étant filtrant, les intervalles $[-x, x]$, $x > 0$, forment une base de la bornologie de l'ordre, et on a, $\forall\, x > 0$, $[-x, +x] \subset [0, x] - [0, x]$, puisque tout $y \in [-x, x]$ s'écrit $y = \frac{1}{2}(y + x) - \frac{1}{2}(x - y)$.

2° Si $(E, \mathcal{B})$ est un e. b. c. muni d'un ordre réticulé tel que l'application $x \to x^+$ soit bornée, alors K est un b-cône. En effet, $x \to x^+$ étant bornée, $x \to x^-$ aussi. Donc, si $B \in \mathcal{B}$, $B^+ = \{x^+ ; x \in B\}$ et $B^- = \{x^- ; x \in B\}$ sont bornés, donc il existe $B_1 \in \mathcal{B}$ tel que $B^+ \cup B^- \subset B_1 \cap K$, et par suite $B \subset B^+ - B^- \subset B_1 \cap K - B_1 \cap K$.

Nous allons donner maintenant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un e. b. c. soit solide.

THÉORÈME 17. - Si $(E, \mathcal{B})$ est un e. b. c. réticulé, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° E est un e. b. c. solide ;

2° E est un e. b. c. plein, et les applications de réticulation sont bornées ;

3° E est un e. b. c. plein, et le cône K est un b-cône ;

4° $x \to x^+$ est uniformément bornée (c'est-à-dire $\forall\, B \in \mathcal{B}$, $\exists\, B' \in \mathcal{B}$ tel que $x - y \in B \implies x^+ - y^+ \in B'$).

Démonstration.

2° $\implies$ 1°. Soit B un disque borné, soit $x \in B$ et $|y| \leqslant |x|$. L'application $x \to |x|$ étant bornée, il existe un borné B_1 que l'on peut supposer disqué plein (E étant un e. b. c. plein), tel que $x \in B \implies |x| \in B_1$,

$$(|y| \leqslant |x|) \iff (-|x| \leqslant y \leqslant |x|), \qquad \text{d'où } y \in B_1 .$$

B_1 contient donc l'enveloppe solide de B, ce qui prouve que E est un e. b. c. solide.

1° $\implies$ 4°. Soit $B \in \mathcal{B}$; si $x - y \in B$, $|x^+ - y^+| \leqslant |x - y|$, $|x - y| \in s(B)$ (enveloppe solide de B), donc $x^+ - y^+ \in s(B)$ qui est borné.

4° $\Longrightarrow$ 3° . $x \to x^+$ étant uniformément bornée est bornée, donc K est un b-cône. Montrons que E est un e. b. c. plein : Soit $B \in \mathcal{B}$, il existe $B' \in \mathcal{B}$ tel que $x - y \in B \Longrightarrow x^+ - y^+ \in B'$. Soient $0 \leqslant y \leqslant x \in B$,

$$(x = y - (y - x) \in B) \Longrightarrow (y = y^+ - (y - x)^+ \in B') \quad .$$

Ceci prouve bien que E est un e. b. c. plein, d'après la proposition 12.

3° $\Longrightarrow$ 2° . Soit $B \in \mathcal{B}$; il existe un disque plein $B' \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset B' \cap K - B' \cap K$, d'où, si $x \in B$, il existe x_1 et $x_2 \in B' \cap K$ tels que $x = x_1 - x_2$. On a donc $0 \leqslant x^+ \leqslant x_1$ et $0 \leqslant x^- \leqslant x_2$, d'où, B' étant plein, x^+ et $x^- \in B'$. Ceci prouve que les applications $x \to x^+$ et $x \to x^-$ sont bornées.

COROLLAIRE 18. - _Si_ E _est un e. b. c. solide séparé, alors le cône_ K _est b-fermé._

Démonstration. - Soit $(x_n)_n \in K$, $x_n \xrightarrow{b} x_0$. Il existe donc un disque borné solide B tel que $(\forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, N \mid n \geqslant N) \Longrightarrow (x_n - x_0 \in \varepsilon B)$, d'où $|x_n^- - x_0^-| \leqslant |x_n - x_0| \in \varepsilon B$. Ce qui prouve que $x_n^- \xrightarrow{b} x_0^-$. Or $x_n^- = 0$, donc, E étant séparé, $x_0^- = 0$.

Maintenant, nous allons démontrer deux théorèmes qui mettent en évidence la dualité qui existe entre les e. l. c. localement solides et les e. b. c. solides.

THÉORÈME 19.

(a) _Soit_ E _un e. b. c. solide ; alors le dual bornologique_ E^* _est un idéal pour l'ordre de_ E^+ ; _de plus, c'est un e. l. c. localement solide quand on le munit de la topologie de la convergence uniforme._

(b) _Si_ E _est un e. l. c. localement solide, son dual_ E' , _muni de la bornologie équicontinue, est un e. b. c. solide._

Démonstration. - Montrons d'abord que E^* est un idéal pour l'ordre de E^+ . Soit $f \in E^*$. La bornologie $\mathcal{B}$ de E étant moins fine que la bornologie de l'ordre, $E^* \subset E^+ = \overline{E}$, d'où $f = f^+ - f^-$. Nous allons montrer que, si $g \in E^+$ avec $|g| \leqslant |f|$, alors $g \in E^*$, ce qui prouvera en particulier que f^+ et f^- appartiennent à E^* . Soit B un disque borné solide ; il existe $A \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant A$, $\forall\, x \in B$. Si $x \in B$, $|g(x)| \leqslant |g|(|x|) \leqslant |f|(|x|) = \sup\limits_{|y| \leqslant |x|} f(y)$. B étant solide, $|y| \leqslant |x|$ entraîne $y \in B$. D'où $|g(x)| \leqslant A$.

Pour le reste, la démonstration résulte immédiatement du fait que E' (resp. E^*) est un idéal pour l'ordre de E^+ , et que, si A est une partie solide d'un espace vectoriel réticulé E , son polaire A^0 dans E^+ est encore solide (corollaire 1.5, p. 212 de [14]).

THÉORÈME 20.

(a) Si E est un e. l. c. localement solide, alors BE est un e. b. c. solide.
(b) Si E est un e. b. c. solide, alors TE est un e. l. c. localement solide.

Démonstration.

(a) Soit $\mathcal{V}$ un système fondamental de voisinages de 0 dans E formé de disques solides. On obtient une base de bornés de BE, en considérant les $\bigcap_V \lambda_V V$ qui sont des disques solides comme intersection de disques solides.

(b) Soit $\mathcal{B}$ une base de bornologie de E formée de disques solides. On obtient un système fondamental de voisinages de 0 dans TE, en considérant les parties $V = \Gamma(\bigcup_B \lambda_B B)$ qui sont solides en tant qu'enveloppe convexe d'une partie solide.

COROLLAIRE 21 (Théorème de Yau-Chuen WONG [15]). - Un e. l. c. bornologique E (resp. un e. b. c. topologique) ordonné est localement solide (resp. solide), si, et seulement si, BE (resp. TE) est solide (resp. localement solide).

Si E est un e. l. c. non bornologique, il n'est pas vrai en général que E est localement solide dès que sa bornologie est solide (c'est-à-dire si BE est un e. b. c. solide) ; pour avoir un contre-exemple, voir [15].

Avant de donner un théorème de structure, rappelons une définition sur les espaces normés ordonnés.

DÉFINITION 22. - Un espace semi-normé plein (resp. solide) est un espace vectoriel muni d'un ordre (resp. d'un ordre réticulé) compatible avec sa structure d'espace vectoriel et d'une semi-norme équivalente à une semi-norme p vérifiant $0 \leqslant x \leqslant y \implies p(x) \leqslant p(y)$ (resp. $|x| \leqslant |y| \implies p(x) \leqslant p(y)$). Une telle semi-norme sera dite pleine (resp. solide).

THÉORÈME 23. - Un e. b. c. plein (resp. solide) est limite inductive bornologique d'espaces semi-normés pleins (resp. solides).

Démonstration. - En effet, si E est un e. b. c. plein (resp. solide), il possède une base $\mathcal{B}$ de bornés disqués pleins (resp. solides). Par conséquent, $E = \varinjlim E_B$ $(B \in \mathcal{B})$. Il suffit donc de remarquer que, si B est un disque plein (resp. solide), la jauge p_B de B fait de E_B un espace semi-normé plein (resp. solide).

Enfin signalons les propriétés de permanence suivantes qui sont simples à démontrer.

PROPOSITION 24. - Soit E un e. b. c. solide (resp. plein).

1° Si F est un sous-espace vectoriel de E , F , muni de la bornologie et de l'ordre induits par E , est un e. b. c. solide (resp. plein).

2° Si F est un idéal pour l'ordre de E (resp. un sous-espace vectoriel plein), E/F , muni de la bornologie et de l'ordre quotient, est un e. b. c. solide (resp. plein).

3° Soit $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille d'e. b. c. munis d'ordres compatibles avec la structure d'espace vectoriel ; alors $\prod_\alpha E_\alpha$, muni de l'ordre et de la bornologie produit, est un e. b. c. solide (resp. plein), si, et seulement si, E_α est un e. b. c. solide (resp. plein), $\forall \alpha \in I$.

4° Soit $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille d'e. b. c. munis d'ordres compatibles avec la structure d'espace vectoriel ; alors $\bigoplus_\alpha E_\alpha$, muni de l'ordre et de la bornologie somme directe, est un e. b. c. solide (resp. plein), si, et seulement si, E_α est un e. b. c. solide (resp. plein), $\forall \alpha \in I$.

5° Une limite projective d'e. b. c. solides (resp. pleins) est un e. b. c. solide (resp. plein).

Complétion pour l'ordre d'un e. b. c. réticulé solide. - Dans [11], NISHIURA examine le problème de la complétion pour l'ordre en liaison avec la complétion topologique, dans le cas d'un espace normé réticulé solide E (le complété pour l'ordre OE de l'espace E existe, puisque tout espace normé solide est archimédien). NISHIURA montre qu'il est possible de munir OE d'une structure d'espace normé réticulé solide, en prolongeant la norme de E à OE de la façon suivante : $\forall \hat{x} \in OE$, comme on sait que $\hat{x} = \inf\{x \in E \; ; \; x \geqslant \hat{x}\}$, on pose

$$\tilde{p}(\hat{x}) = \inf\{p(x) \mid x \geqslant |\hat{x}|\} .$$

Il obtient le théorème principal suivant : Si E est un espace de Banach réticulé solide, il en est de même de OE .

D'une manière plus générale, si E est un e. l. c. localement solide, son complété pour l'ordre OE peut être muni d'une topologie d'e. l. c. localement solide par prolongement des semi-normes qui définissent la topologie de E .

Dans ce qui suit, on se propose d'examiner le problème général suivant : Comment construire, sur le complété pour l'ordre OE d'un e. b. c. réticulé solide, une bornologie naturelle prolongeant celle de E ? Ainsi on généralise le théorème précité de Nishiura.

THÉORÈME 25. - Soit E un e. b. c. séparé réticulé solide ; alors il existe sur OE , complété pour l'ordre de E , une bornologie réticulée solide, telle que E

soit un sous-espace bornologique de OE .

Démonstration. - Soit $\mathcal{B}$ une base de bornologie de E formée de disques solides. Donc $E = \varinjlim E_B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} E_B$, où chaque E_B est un espace normé réticulé solide. E , étant séparé pour $\mathcal{B}$, l'est a fortiori pour la bornologie de l'ordre, donc est archimédien. Désignons par OE le complété pour l'ordre de E , par OE_B celui de E_B . D'après NISHIURA, chaque espace OE_B peut être muni d'une structure d'espace normé réticulé solide prolongeant celle de E_B .

Pour construire une structure d'e. b. c. réticulé solide sur OE , nous allons montrer que le système d'espaces vectoriels $(OE_B)_{B \in \mathcal{B}}$ est un système inductif bornologique pour des applications convenables, et que OE est la limite inductive algébrique de ce système ; il suffira alors de munir OE de la bornologie limite inductive de celles des OE_B , pour conclure.

1° La famille $(OE_B)_{B \in \mathcal{B}}$ forme un système inductif algébrique. Soient B , $B' \in \mathcal{B}$ tels que $B \subset B'$, et $\pi_{BB'}$ l'application canonique $E_B \to E_{B'}$. Cette application vérifie la condition (P), parce que, B étant solide, E_B est un idéal pour l'ordre de E , donc a fortiori de $E_{B'}$. Donc $\pi_{BB'}$ admet un prolongement $\tilde{\pi}_{BB'}$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_B & \xrightarrow{\pi_{BB'}} & E_{B'} \\ {\scriptstyle \varphi_B}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{B'}} \\ OE_B & \xrightarrow[\tilde{\pi}_{BB'}]{} & OE_{B'} \end{array} .$$

$\tilde{\pi}_{BB'}$ est complètement réticulante et injective, d'après la proposition 7.

De plus, si $B \subset B' \subset B''$, comme $\pi_{BB'} \circ \pi_{B'B''} = \pi_{BB''}$, on en déduit que $\tilde{\pi}_{BB'} \circ \tilde{\pi}_{B'B''} = \tilde{\pi}_{BB''}$, enfin $\tilde{\pi}_{BB} = \mathrm{Id}$, $\forall B$.

2° Le système précédent est un système inductif bornologique. Il suffit de démontrer que les applications $\tilde{\pi}_{BB'}$ sont bornées. Ceci résulte du lemme général suivant :

LEMME 26. - Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés réticulés solides ; si $f : E_1 \to E_2$ est une application linéaire continue vérifiant la condition (P), alors $\tilde{f} : OE_1 \to OE_2$ est continue, et de plus $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Démonstration. - Soit $\hat{x} \in OE_1$, $\tilde{p}_2[\tilde{f}(\hat{x})] = \inf\{p_2(y) \mid y \in E_2 \text{ et } y \geq |\tilde{f}(\hat{x})|\}$. Si $z \in E_1$ avec $z \geq |\hat{x}|$, on a $f(z) \geq \tilde{f}(|\hat{x}|) = |\tilde{f}(\hat{x})|$, car $\tilde{f}$ est complètement réticulante. D'où

$$\widetilde{p}_2[\widetilde{f}(\hat{x})] \leqslant \inf\{p_2[f(z)] \mid z \in E_1 \text{ et } z \geqslant |\hat{x}|\}$$
$$\leqslant \|f\| \inf\{p_1(z) \mid z \in E_1 \text{ et } z \geqslant |\hat{x}|\} ,$$

c'est-à-dire $\widetilde{p}_2[\widetilde{f}(\hat{x})] \leqslant \|f\| \, p_1(\hat{x})$. Donc $\|\widetilde{f}\| \leqslant \|f\|$. Il est immédiat par construction que $\|\widetilde{f}\| \geqslant \|f\|$, d'où $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.

3° $OE = \varinjlim OE_B$ (algébriquement). B étant solide, E_B est un idéal pour l'ordre de E , donc l'application canonique $\pi_B : E_B \to E$ vérifie la condition (P), et par conséquent se prolonge en une application $\widetilde{\pi}_B : OE_B \to OE$, complètement réticulante et injective. D'où $\bigcup OE_B \subset OE$ algébriquement et ordinalement.

Soit $\hat{x} \in OE$, $\hat{x} \geqslant 0$; comme $\hat{x} = \inf\{x \in E \mid x \geqslant \hat{x}\}$, il existe $y \in E$, $y \geqslant \hat{x}$. Soit $B \in \mathcal{B}$ tel que $y \in E_B$. D'après le corollaire 8, OE_B est un idéal pour l'ordre de OE , donc $(0 \leqslant \hat{x} \leqslant y \in OE_B) \implies (\hat{x} \in OE_B)$. D'où $OE = \bigcup_B OE_B$.

4° Bornologie solide sur OE . Munissons OE de la bornologie limite inductive des espaces OE_B . Ainsi OE devient un e. b. c. réticulé. Montrons qu'il est solide : OE admet comme base de bornologie les parties $\widetilde{B}$ qui sont les boules unités des OE_B . On sait que $\widetilde{B}$ est une partie solide de OE_B , idéal pour l'ordre de OE , donc $\widetilde{B}$ est solide dans OE .

Montrons enfin que E est un sous-espace vectoriel bornologique de OE . Il suffit de montrer que, $\forall B \in \mathcal{B}$, $\widetilde{B} \cap E$ est un borné de E . Soit $\hat{x} \in \widetilde{B} \cap E$. Puisque $\hat{x} \in OE_B$, il existe $y \in E_B$ tel que $|\hat{x}| \leqslant y$. Etant donné que E_B est un idéal pour l'ordre de E , et que $\hat{x} \in E$, alors $\hat{x} \in E_B$. Donc $p_B(\hat{x}) = \widetilde{p}_B(\hat{x}) \leqslant 1$, ce qui montre que $\widetilde{B} \cap E$ est borné dans E_B , donc dans E .

Exemple : Etude de la bornologie de l'ordre.

THÉORÈME 27. - Soit E un espace vectoriel réticulé archimédien. Alors, sur OE , la bornologie de l'ordre et la bornologie prolongeant la bornologie de l'ordre de E (définie à l'aide de la proposition 26) coïncident.

La bornologie de l'ordre admet comme système fondamental de bornés les intervalles solides B_x , où $B_x = [-x , x]$ avec $x > 0$. E_{B_x} est muni de la norme p_x , jauge de B_x : si $y \in E_{B_x}$,

$$p_x(y) = \inf\{\lambda > 0 \mid |y| \leqslant \lambda x\} .$$

Soit OE_{B_x} muni de la norme $\widetilde{p}_x$. Si $\hat{z} \in OE_{B_x}$,

$$\widetilde{p}_x(\hat{z}) = \inf\{p_x(y) \mid y \in E_{B_x} , y \geqslant |\hat{z}|\} ,$$

$$\tilde{p}_x(\hat{z}) \leqslant 1 \iff (\forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, y \in E_{B_x}\ ,\ y \geqslant |\hat{z}| \text{ et } p_x(y) < (1+\varepsilon))\ ,$$

d'où $|\hat{z}| \leqslant y \leqslant (1+\varepsilon)x$, donc $|\hat{z}| \leqslant (1+\varepsilon)x$, $\forall\, \varepsilon > 0$. OE étant archimédien, on en déduit que $|\hat{z}| \leqslant x$. La boule unité de OE_{B_x} est donc l'intervalle $[-x\ ,\ x]$ dans OE . Ce qui démontre le théorème.

PROPOSITION 28. - <u>Si E est un e. b. c. réticulé possédant un système fondamental de bornés solides complétants, alors son complété pour l'ordre est un e. b. c. réticulé solide complet pour la bornologie.</u>

<u>Démonstration</u>. - Soit $\mathfrak{B}$ un système fondamental de bornés solides complétants. Alors $E = \varinjlim E_B$ est un e. b. c. réticulé solide, et $OE = \varinjlim OE_B$. De plus, chaque OE_B est un espace de Banach réticulé solide, d'après [11], donc OE possède un système fondamental de bornés solides complétants, et par suite est complet pour la bornologie.

<u>Ordre sur le complété bornologique d'un e. b. c. réticulé</u>. - Si E est un espace vectoriel normé réticulé solide, soit $\hat{E}$ son complété pour la norme. Il est possible de définir sur $\hat{E}$ un ordre prolongeant celui de E qui en fait un espace normé réticulé solide ([12] et [14]) : il suffit de prendre pour cône de $\hat{E}$ l'adhérence du cône de E .

Si E est maintenant un e. b. c. réticulé solide aux normes faiblement concordantes, soit $\hat{E}$ son complété bornologique. Nous nous proposons dans la suite de répondre au problème suivant : Peut-on définir sur $\hat{E}$ un ordre prolongeant celui de E qui lui confère une structure d'e. b. c. réticulé ?

PROPOSITION 29. - <u>Soient E et F deux espaces vectoriels normés réticulés solides,</u> $f : E \to F$ <u>une application continue réticulante. Alors l'application</u> $\hat{f} : \hat{E} \to \hat{F}$ <u>est encore réticulante.</u>

<u>Démonstration</u>. - On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ \hat{E} \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{F} \end{tikzcd} .$$

Soit $\hat{x} \in \hat{E}$; alors $\hat{x} = \lim\limits_n x_n$, où $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de E . Comme l'application $x \to |x|$ est continue dans $\hat{E}$ (espace normé solide), alors $|\hat{x}| = \lim\limits_n |x_n|$, d'où $\hat{f}(\hat{x}) = \lim\limits_n f(x_n)$, et

$$\hat{f}(|\hat{x}|) = \lim_n f(|x_n|) = \lim_n |f(x_n)| \quad ,$$

car f est réticulante. L'application $y \to |y|$ étant continue dans $\hat{F}$,

$$|\hat{f}(\hat{x})| = \lim_n |f(x_n)| \quad , \qquad \text{d'où} \quad |\hat{f}(\hat{x})| = \hat{f}(|\hat{x}|) \quad .$$

COROLLAIRE 30. - Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 29 sur E et F , si $f : E \to F$ est une application linéaire continue injective réticulante, et si E et F sont à normes faiblement concordantes, alors $\hat{f} : \hat{E} \to \hat{F}$ est injective réticulante. En particulier, si E est un sous-espace réticulé de F tel que l'injection canonique $i : E \to F$ est continue, alors $\hat{E}$ est un sous-espace réticulé de $\hat{F}$.

THÉORÈME 31. - Soit E un e. b. c. réticulé possédant un système fondamental $\mathcal{B}$ de bornés solides tels que, si $B \subset B'$, B et $B' \in \mathcal{B}$, E_B et $E_{B'}$ sont à normes faiblement concordantes ; alors le complété bornologique $\hat{E}$ de E peut être muni d'une structure d'ordre canonique prolongeant celle de E , telle que $\hat{E}$ devienne un e. b. c. réticulé limite inductive d'espaces de Banach réticulés solides, l'injection canonique $E \to \hat{E}$ étant réticulante.

Démonstration. - Si $B \in \mathcal{B}$, l'espace E_B est normé réticulé solide, donc son complété pour la norme $\hat{E}_B$ peut être muni d'un ordre réticulé prolongeant celui de E_B, le rendant solide. Si $B \subset B'$ sont deux bornés de $\mathcal{B}$, E_B est un sous-espace réticulé de $E_{B'}$, donc, d'après le corollaire 30, $\hat{E}_B$ est un sous-espace réticulé de $\hat{E}_{B'}$. Comme $\hat{E} = \bigcup \hat{E}_B$, on définit un ordre sur $\hat{E}$ de la façon suivante : $\hat{x} \geqslant \hat{y}$ dans $\hat{E}$ si, et seulement si, $\hat{x} \geqslant \hat{y}$ dans un $\hat{E}_B$. Il est clair que $\hat{E} = \varinjlim \hat{E}_B$, avec $\hat{E}_B$ espace de Banach réticulé solide, $\forall B \in \mathcal{B}$, et que l'injection canonique $E \to \hat{E}$ est réticulante, car les applications $E_B \to \hat{E}_B$ le sont.

Remarque. - Pour définir un ordre sur le complété bornologique $\hat{E}$ de l'e. b. c. réticulé E , on aurait pu considérer, par analogie avec ce qui se passe dans les e. l. c., la b-fermeture dans $\hat{E}$ du cône K de E , mais cette notion n'est pas aussi maniable qu'en topologie. Toutefois, nous sommes en mesure maintenant d'obtenir le résultat suivant.

PROPOSITION 32. - Dans les hypothèses du théorème 31, si $\hat{E}$ est muni de l'ordre canonique prolongeant celui de E , alors il admet pour cône des positifs la b-fermeture $\overline{K}$ de K dans $\hat{E}$.

Démonstration. - Par construction de l'ordre de $\hat{E}$, on a $\hat{K} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \overline{(K \cap E_B)_{\hat{E}_B}} \subset \overline{K}$, où $\hat{K}$ est le cône des positifs de $\hat{E}$. Mais $\hat{K}$ est b-fermé : si $\hat{x}_n \in \hat{K}$ et $\hat{x}_n \xrightarrow{b} \hat{x}$ dans $\hat{E}$, alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $\hat{x}_n \to \hat{x}$ dans $\hat{E}_B$. Etant donné que $\hat{x}_n$ est positif dans $\hat{E}_B$, $\forall\, n$, et que $\hat{E}_B$ est un espace normé solide, alors $\hat{x}$ est positif dans $\hat{E}_B$, donc dans $\hat{E}$.

Applications à la bornologie de l'ordre.

(A) Dans l'étude du complété pour l'ordre d'un e. b. c. réticulé solide, on a considéré le cas particulier de la bornologie de l'ordre : on a comparé sur OE la bornologie de l'ordre et la bornologie prolongeant la bornologie de l'ordre de E . Ici on peut examiner le problème analogue suivant : Soit E un espace vectoriel réticulé, munissons-le de la bornologie de l'ordre. On sait qu'il vérifie la concordance faible des normes, c'est même un e. b. c. saturé (i. e. avec un système fondamental de bornés b-fermés). Si $\hat{E}$ est son complété bornologique, on peut se demander quel est le lien entre la bornologie de l'ordre construit sur $\hat{E}$ et la bornologie de $\hat{E}$.

THÉORÈME 33. - Tout borné de $\hat{E}$ est un borné pour l'ordre. De plus, pour que la bornologie de $\hat{E}$ et sa bornologie de l'ordre coïncident, il faut et il suffit que la bornologie de $\hat{E}$ soit solide.

Démonstration. - Pour montrer que tout borné de $\hat{E}$ est un borné pour l'ordre, il suffit de le faire pour les parties de la forme $B = \{\hat{y} \in \hat{E} \mid \hat{p}_x(\hat{y}) \leq 1\}$, où $\hat{p}_x$ est la norme de $\hat{E}_x$ complété de E_x . Si $\hat{y} \in B$, $\hat{y} = \lim_n y_n$ $(y_n \in E_x)$;
$\hat{p}_x(\hat{y}) = \lim_n p_x(y_n)$.

Donc, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N$ tel que $n \geq N$ entraîne $p_x(y_n) < 1 + \varepsilon$. D'où $y_n \in (1 + \varepsilon)[- x , x]$, c'est-à-dire $|y_n| \leq (1 + \varepsilon)|x|$, et donc $|\hat{y}| \leq (1 + \varepsilon)|x|$, $\forall\, \varepsilon > 0$, dans $\hat{E}$. D'où $\hat{y} \in [- x , + x]$ dans $\hat{E}$. Ainsi la bornologie de $\hat{E}$ est plus fine que la bornologie de l'ordre.

Enfin, il est immédiat que les deux bornologies coïncident si, et seulement si, $\hat{E}$ est solide.

Remarque. - D'après ce qu'on vient de voir dans les deux théorèmes précédents, il semble qu'en général le complété bornologique d'un e. b. c. solide, muni de l'ordre qu'on a construit, n'est pas toujours un e. b. c. solide (mais seulement une limite inductive bornologique d'espaces de Banach solides). Donc le problème se pose de caractériser les e. b. c. solides tels que $\hat{E}$ soit encore un e. b. c. solide. Il est peut-être plus simple de faire d'abord cette étude pour le cas de la bornologie de l'ordre.

(B) Si E est un espace vectoriel réticulé, muni de la bornologie de l'ordre, E est plongé injectivement dans son complété bornologique $\hat{E}$. Mais il se trouve aussi que E est contenu dans OE qui est un e. b. c. complet bornologiquement. Le problème se pose donc de comparer ces deux espaces complets qui contiennent E .

THÉORÈME 34. - <u>Il existe une application canonique</u> $\hat{\varphi} : \hat{E} \to OE$, <u>injective, bornée et réticulante. Par conséquent,</u> $\hat{E}$ <u>est un sous-espace réticulé de</u> OE . <u>De plus,</u> $\hat{E}$ <u>est un sous-espace bornologique de</u> OE , <u>si, et seulement si,</u> $\hat{E}$ <u>est un e. b. c. solide.</u>

<u>Démonstration.</u> - Si E est un espace vectoriel réticulé, muni de la bornologie de l'ordre, $E = \varinjlim E_x$ (bornologiquement). Considérons la famille des injections canoniques $\varphi_x : E_x \to OE_x$. Cette famille vérifie la condition de ROBERTSON [6] : en effet, soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E_x , telle que $(x_n)_n$ converge dans OE_x vers un point y de E_x , c'est-à-dire, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $n \geqslant N \implies |x_n - y| \leqslant \varepsilon x$, mais la réticulation étant la même dans E et OE , cette inégalité est valable dans E_x , donc x_n converge vers y dans E_x . Par suite, l'application $\hat{\varphi} : \hat{E} \to OE$, qui prolonge l'injection φ de E dans OE , est injective bornée. Montrons qu'elle est réticulante : il suffit de montrer que, $\forall x \in E$, $\hat{\varphi}_x : \hat{E}_x \to OE_x$ est réticulante (ce qui est vrai, d'après la proposition 29).

Enfin, si $\hat{E}$ est un e. b. c. solide, on va démontrer que c'est un sous-e. b. c. de OE : en effet, si $[- x , x]$ est un borné de OE avec $x \in E$ (on sait que ces ensembles forment un système fondamental de bornés de E), alors

$$[- x , x] \cap \hat{E} = [- x , x]$$

(intervalle dans $\hat{E}$) qui est borné dans $\hat{E}$.

Inversement, supposons que $\hat{E}$ est un sous-e. b. c. de OE ; étant donné que OE est solide, il en est de même de $\hat{E}$.

Troisième partie

<u>Espaces d'applications linéaires bornées</u>

L'objet de cette partie est l'étude, du point de vue ordre et bornologie de l'espace $L_b(E , F)$, des applications linéaires bornées d'un e. b. c. ordonné dans un autre. Nous définissons d'abord un ordre sur $L_b(E , F)$, et démontrons que, sous certaines conditions, cet ordre est réticulé et complet. Ensuite, nous démontrons que $L_b(E , F)$ est un e. b. c. réticulé solide pour l'équibornologie ou bornologie naturelle. A la fin de cette étude, nous donnons un théorème qui montre que le dual bornologique d'un e. b. c. ordonné coïncide, sous certaines conditions, avec son dual modéré (formes linéaires relativement bornées).

Propriétés ordinales de l'espace $L_b(E, F)$. - Si E et F sont deux e. b. c. ordonnés, nous désignerons par $L_b(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires bornées de E dans F, et par $\mathcal{K}$ l'ensemble des applications linéaires bornées positives.

PROPOSITION 35. - L'ensemble $\mathcal{K}$ est un cône dans $L_b(E, F)$ dans chacun des cas suivants :

(a) Si le cône K de E est tel que $K - K$ soit b-dense dans E, et si F est séparé ;

(b) Si E est filtrant.

La démonstration est immédiate.

Nous allons d'abord examiner le cas particulier suivant : E et F sont des espaces vectoriels ordonnés munis de la bornologie de l'ordre. Dans ce cas, l'espace $L_b(E, F)$ coïncide avec $L^b(E, F)$, espace vectoriel des applications linéaires bornées pour l'ordre.

Si E est un espace vectoriel ordonné filtrant vérifiant la propriété de décomposition, et F un espace vectoriel réticulé complet pour l'ordre, alors $L^b(E, F)$ est un espace vectoriel réticulé complet pour l'ordre (pour le voir, il suffit de reprendre la démonstration qu'on fait dans le cas où $F = R$).

Passons maintenant au cas général où les bornologies des espaces considérés ne sont pas forcément celles de l'ordre.

THÉORÈME 36. - Soient E un e. b. c. ordonné par un b-cône et possédant la propriété de décomposition, F un e. b. c. plein complètement réticulé ; alors l'espace $L_b(E, F)$ est complet pour l'ordre.

Démonstration. - Il est clair que E est filtrant, puisqu'il est ordonné par un b-cône, donc $L_b(E, F)$ est un espace vectoriel ordonné.

Soit $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille d'éléments de $L_b(E, F)$, telle que $T_\alpha \leqslant T \in L_b(E, F)$, $\forall \alpha \in I$. Soit $x \geqslant 0$; pour chaque décomposition, $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ $(x_k \geqslant 0)$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$; choisissons un indice $\alpha_k \in I$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k}(x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} T(x_k) = T(x) .$$

F étant complètement réticulé, la famille

$$\{\sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k}(x_k) \ ; \ x = \sum_{k=1}^{n} x_k \ , \ x_k \geqslant 0 \ , \ k \rightarrow \alpha_k\}$$

admet une borne supérieure $S(x)$. On démontre facilement, en suivant une méthode classique, que S est additive sur K et positivement homogène. E étant filtrant, S se prolonge d'une manière unique en une application linéaire S de E dans F . Il est clair que S est la borne supérieure de la famille $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ dans $\mathcal{L}(E , F)$. Montrons que $S \in L_b(E , F)$.

K étant un b-cône, il suffit de montrer que S est bornée sur les ensembles $(B \cap K)_B$. Soit $x \in B \cap K$, alors $0 \leqslant (T - S)(x) \leqslant (T - T_{\alpha_0})(x) \in B_1$ borné plein de F , puisque $T - T_{\alpha_0}$ est bornée, donc $(T - S)(B \cap K) \subset B_1$. Ce qui montre que $T - S$ est bornée, et par suite S aussi.

Remarque. - Pour voir que S est bornée, on a été amené à démontrer que toute application linéaire f , telle que $0 \leqslant f \leqslant g \in L_b(E , F)$, appartient à $L_b(E , F)$. D'une manière plus précise, $L_b(E , F)$ est un sous-espace vectoriel plein de $\mathcal{L}(E , F)$.

COROLLAIRE 37. - Si E et F sont deux e. b. c. réticulés solides, F étant complet pour l'ordre, alors $L_b(E , F)$ est un espace vectoriel ordonné complet pour l'ordre, et l'espace vectoriel $\mathcal{K} - \mathcal{K}$ est complètement réticulé.

PROPOSITION 38. - Soient E un e. b. c. ordonné par un b-cône et possédant la propriété de décomposition (en particulier, si E est un e. b. c. solide), F un e. b. c. plein complètement réticulé. Alors le cône $\mathcal{K}$ engendre $L_b(E , F)$, si, et seulement si, $L_b(E , F)$ est un idéal pour l'ordre de $L^b(E , F)$.

Démonstration. - La condition étant évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Si $\mathcal{K}$ engendre $L_b(E , F)$, d'après le corollaire 37, $L_b(E , F)$ est réticulé, donc $L_b(E , F) \subset L^b(E , F)$, puisque toute application linéaire positive est bornée pour l'ordre. Soient $|S| \leqslant |T|$ avec $S \in L^b(E , F)$ et $T \in L_b(E , F)$, alors $-|T| \leqslant S \leqslant |T|$. $L_b(E , F)$ étant réticulé, $|T|$ et $-|T| \in L_b(E , F)$ qui est un sous-espace plein de $\mathcal{L}(E , F)$, d'après la remarque précédente, donc $S \in L_b(E , F)$.

Donnons maintenant quelques exemples où $\mathcal{K}$ engendre $L_b(E , F)$.

PROPOSITION 39. - Si E est un e. b. c. plein ordonné par un b-cône et possédant la propriété de décomposition, F un espace complètement réticulé muni de la bornologie de l'ordre, alors $\mathcal{K}$ engendre $L_b(E , F)$. Ceci est vrai, en particulier, si E est un e. b. c. solide, et si F vérifie les hypothèses précédentes.

Démonstration. - Puisque E est plein, tout borné pour l'ordre est un borné de E , d'où $L_b(E , F) \subset L^b(E , F)$. Soit $f \in L_b(E , F)$, alors $f = f^+ - f^-$ dans $L^b(E , F)$; montrons que $f^+ \in L_b(E , F)$. E étant muni d'un b-cône, il suffit de montrer que, pour tout borné plein B de E , $f^+(B \cap K)$ est un borné de F . f étant bornée, $f(B \cap K)$ est contenu dans un intervalle $[a , b]$. Soit $x \in B \cap K$, alors $f^+(x) = \sup\limits_{0\leqslant y\leqslant x} f(y) \in [a , b]$, car, B étant plein, $\forall\, y$, tel que $0 \leqslant y \leqslant x$, on a $f(y) \in [a , b]$.

On retrouve ainsi le fait que toute forme linéaire bornée sur un e. b. c. solide E est différence de deux formes linéaires bornées positives.

Propriétés bornologiques de l'espace $L_b(E , F)$.

THÉORÈME 40. - Soient E un e. b. c. plein ordonné par un b-cône et possédant la propriété de décomposition, F un espace vectoriel complètement réticulé muni de la bornologie de l'ordre. Alors l'espace $L_b(E , F)$, muni de l'équibornologie, est un e. b. c. solide complet pour l'ordre et la bornologie.

Démonstration. - D'après le corollaire 37, l'espace $L_b(E , F)$ est un espace vectoriel réticulé complet pour l'ordre. F étant muni de la bornologie de l'ordre, est complet bornologiquement, donc $L_b(E , F)$, muni de l'équibornologie, est complet bornologiquement. On va montrer dans ce qui suit que c'est un e. b. c. solide.

Soit H un borné de $L_b(E , F)$; montrons que son enveloppe solide $s(H)$ est encore bornée. Pour cela, E possédant un b-cône, il suffit de voir que, pour tout borné plein B de E , $s(H)[B \cap K]$ est borné dans F . Par hypothèse, il existe $a > 0$ dans F tel que $T(B \cap K) \subset [- a , a]$, $\forall\, T \in H$, d'où $|T|(B \cap K) \subset [- 2a , 2a]$; en effet, si $x \in B \cap K$,

$$|T|(x) = \sup_{\substack{x=y+z\\ y,z\geqslant 0}} T(y - z) \quad .$$

B étant plein, et $0 \leqslant y \leqslant x$, $0 \leqslant z \leqslant x$, alors $y , z \in B \cap K$, donc

$$T(y) - T(z) \in T(B \cap K - B \cap K) \subset [- 2a , 2a] \quad .$$

D'où $|T|(x) \in [- 2a , 2a]$. Si $|S| \leqslant |T|$ avec $T \in H$, on a, $\forall\, x \in B \cap K$,

$$- |T|(x) \leqslant S(x) \leqslant |T|(x) \quad ,$$

donc $S(x) \in [-2a, 2a]$, et, par suite, $s(H)[B \cap K] \subset [-2a, 2a]$.

COROLLAIRE 41. - Si E est un e. b. c. solide, F un e. v. r. complet pour l'ordre muni de sa bornologie de l'ordre, alors $L_b(E, F)$ est un e. b. c. réticulé solide complet pour l'ordre et la bornologie.

On en déduit que E^*, dual bornologique d'un e. b. c. solide, est un e. b. c. réticulé solide, quand on le munit de l'équibornologie. Ce résultat se retrouve aussi de la façon suivante : $E^* = (TE)'$, dual topologique de l'e. l. c. localement solide TE, est un e. b. c. réticulé solide, quand on le munit de la bornologie équicontinue (théorème 19) ; or celle-ci coïncide avec l'équibornologie de E^* [6].

Dual bornologique et dual modéré. - On se propose, dans la suite, de trouver des conditions suffisantes pour que toute application linéaire positive de E dans F soit bornée. Ce qui nous permettra d'obtenir une condition suffisante pour que le dual bornologique d'un e. b. c. ordonné coïncide avec le dual modéré.

THÉORÈME 42. - Soient E un e. b. c. complet ordonné par un b-cône K, b-fermé, F un e. b. c. dénombrable et plein. Alors toute application linéaire positive de E dans F est bornée.

Démonstration. - Soit $u : E \to F$ une application linéaire positive. Si u n'est pas bornée, comme K est un b-cône, il existe un borné B de E tel que $u(B \cap K) \not\subset nB_n$, $\forall n$, où $(B_n)_n$ est une base de bornologie de F formée d'ensembles disqués pleins tels que $B_n \subset B_{n+1}$. D'où il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $B \cap K$ tels que $u(a_n) \notin nB_n$, $\forall n$. Donc la suite $x_n = \frac{a_n}{n} \in \frac{B}{n}$ converge bornologiquement vers 0 dans E, et $u(x_n) \notin B_n$, $\forall n$. La suite $y_n = \sqrt{n}\, x_n \xrightarrow{b} 0$ dans un espace de Banach $E_{B'}$.

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une série convergente de scalaires positifs. Alors, $\forall p$, il existe $y_{n_p} \in \varepsilon_p B'$ avec $n_p > n_{p-1}$, puisque $y_n \to 0$ dans $E_{B'}$. La série de terme général $(y_{n_p})_p$ converge dans $E_{B'}$ vers y, puisqu'elle vérifie le critère de Cauchy.

Puisque le cône K est b-fermé, on a $y \geqslant y_{n_p}$, $\forall p$, d'où

$$0 \leqslant \sqrt{n_p}\, x_{n_p} = y_{n_p} \leqslant y \quad ,$$

et donc

$$0 \leqslant x_{n_p} \leqslant \frac{y}{\sqrt{n_p}} \quad .$$

Ainsi,

$$0 \leqslant u(x_{n_p}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n_p}} u(y) \quad .$$

Quand $p \to \infty$, la suite $\frac{1}{\sqrt{n_p}} u(y)$ converge vers 0 dans un espace $F_{B_{n_0}}$; B_{n_0} étant plein, la suite $u(x_{n_p}) \to 0$ dans $F_{B_{n_0}}$, c'est-à-dire qu'il existe une suite λ_n de scalaires positifs convergeant vers 0 tels que $u(x_{n_p}) \in \lambda_p B_{n_0}$, $\forall p$. Donc il existe un indice n_i assez grand tel que $u(x_{n_i}) \in B_{n_i}$, d'où la contradiction.

COROLLAIRE 43 (Théorème fondamental). - Si E est un e. b. c. réticulé solide complet, alors le dual modéré et le dual bornologique coïncident : $\overline{E} = E^*$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Théorie des ensembles, Chapitre 3. 2e édition. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1243 ; Bourbaki, 20).

[2] BOURBAKI (N.). - Intégration, Chapitre 2. 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[3] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 et 2. Nouvelle édition. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[4] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 3 et 4. Nouvelle édition. - Paris, Hermann, 1964 (Act. scient. et ind., 1229 ; Bourbaki, 18).

[5] BUCHWALTER (H.). - Espaces vectoriels bornologiques, Publications du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon, t. 2, 1965, fasc. 1, p. 2-53.

[6] HOGBE-NLEND (H.). - Complétion, tenseurs et nucléarité en bornologie, Thèse Sc. math. Bordeaux, 1969.

[7] HOGBE-NLEND (H.). - Théorie des bornologies et applications. - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) [à paraître].

[8] NACHBIN (Leopoldo). - Topology and order. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 4).

[9] NAKANO (Hidegorô). - Linear topologies on semi-ordered linear spaces, J. of Fac. of Sc., Hokkaido Univ., Series 1, t. 12, 1953, p. 87-104.

[10] NAMIOKA (Isaac). - Partially ordered linear topological spaces. - Providence, American mathematical Society, 1957 (Memoirs of the American mathematical Society, 24).

[11] NISHIURA (Togo). - Completions of normed linear lattices, Colloq. Math., Wroclaw, t. 19, 1968, p. 271-275.

[12] PERESSINI (Anthony). - Ordered topological vector spaces. - New York, Harper and Row, 1967 (Harper's Series in modern Mathematics).

[13] ROBERTS (G. T.). - Topologies defined by bounded sets, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 51, 1955, p. 379-381.

[14] SCHAEFER (Helmut H.). - Topological vector spaces. - New York, The Macmillan Company ; London, Collier-Macmillan, 1966 (Macmillan Series in advanced Mathematics and theoretical Physics).

[15] WONG (Yau-Chuen). - The order bound topology on Riesz spaces, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 67, 1970, p. 587-593.

(Texte reçu le 11 juin 1971)

Marie-Thérèse AKKAR
Faculté des Sciences de Bordeaux-I
Mathématiques
351 cours de la Libération
33 - TALENCE