CLAUDE PORTENIER

Caractérisation de certains espaces de Riesz

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, nº 1 (1970-1971), exp. nº 6, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_1_A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 6, 21 p.

3 et 10 décembre 1970

CARACTÉRISATION DE CERTAINS ESPACES DE RIESZ

par Claude PORTENIER

Dans ce travail, nous reprenons, améliorons et développons une partie des résultats de [12]. Nous y renvoyons le lecteur pour plus de détails, en particulier pour ceux que nous aurons oublié de rappeler dans le paragraphe 0.

Nous nous intéressons à la classe des espaces de Riesz E que l'on peut munir, ou qui sont munis, d'une topologie d'espace de Riesz localement convexe (séparée) telle que le cône C^0 des formes linéaires positives continues soit l'enveloppe fermée convexe de ses génératrices extrémales (i. e. de l'ensemble des formes linéaires réticulantes continues). Il est équivalent de dire qu'il existe sur E une topologie d'espace de Kakutani (séparée) moins fine que $\tau(E , E')$ (théorème 1.12 de [12], et remarque 1.6, ci-après). Ces espaces (dits fonctionnels) sont représentables comme des "espaces de sections" (continues) (cf. § 3 de [12], et § 0), ce qui permet pratiquement d'utiliser toutes les méthodes, concepts et intuitions que l'on a des espaces de fonctions continues.

La première classe intéressante d'espaces de Riesz localement convexes fonctionnels que l'on peut introduire est celle des espaces de Dini (c'est-à-dire que, par définition, le théorème de Dini y est vrai ; cf. § 2). Nous caractériserons ces espaces de plusieurs manières différentes, en particulier par le fait que chaque idéal fermé est égal à l'ensemble des sections de E qui sont nulles sur un certain fermé.

La deuxième classe, contenue dans la précédente, que nous considérerons, est celle des espaces quasi de Kakutani (c'est-à-dire dont le cône dual est presque bien coiffé ; cf. § 3). Nous verrons que toute forme linéaire continue sur un tel espace possède une propriété remarquable, faisant intervenir de la compacité, qui permet de développer une théorie de l'intégration (cf. définition 3.8).

La troisième classe, la plus riche en résultats, est celle des espaces de Kakutani; on a la caractérisation suivante (théorème 1.8 de [12]) : E peut être munie d'une topologie d'espace de Kakutani compatible avec la dualité, si, et seulement si, le cône dual est bien coiffé. Pour ces espaces, on a un théorème de Stone-Weierstrass, qui contient tous les théorèmes classiques faisant intervenir des conditions de séparation ponctuelle (cf. § 4 de [12]), et que nous utiliserons pour donner un théorème de représentation (en tant qu'espace de Riesz localement convexe ; théorème 4.6).

Lorsque le dual positif E^+ d'un espace de Riesz E sépare les points de E, la topologie de l'ordre sur E est de Riesz localement convexe. Ceci est en fait la situation générale d'un cône biréticulé, qui est ici le cône C^* des formes linéaires positives (cf. [7]). Les résultats que nous obtenons répondent à quelques-unes des questions de cet article.

Je tiens à remercier sincèrement Mr le Professeur G. CHOQUET, ainsi que ses collaborateurs, pour l'accueil qu'ils m'ont donné dans leur équipe.

0. Généralités.

0.1. - Nous utilisons sans renvoi les notations et les résultats de [11] et [13]. Voici les plus importants.

0.2. - Si E est un espace de Riesz, C désignera son cône positif, C^* le cône des formes linéaires positives sur E, et $E^+ = C^* - C^*$ le dual positif de E. Une partie A de E est dite pleine si, pour tout $f, g \in A$ et $h \in E$ tel que $f \leqslant h \leqslant g$, on a $h \in A$, solide si $|g| \leqslant |f|$ et $f \in A$ entraîne $g \in A$, et coréticulée si $f, g \in A$ entraîne $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g) \in A$. Un sous-espace vectoriel solide s'appelle un idéal. Une forme linéaire μ sur E est dite réticulante, si $\mu(|f|) = |\mu(f)|$ pour tout $f \in E$. Si $\mu \neq 0$, il est équivalent de dire que μ engendre une génératrice extrémale de C^*.

0.3. - Rappelons que E^+ est aussi l'ensemble des formes linéaires relativement bornées sur E, et que, pour tout $f \in C$ et tout $\mu \in E^+$, on a

$$|\mu|(f) = \sup_{|k| \leqslant f} \mu(k) \quad .$$

Si E' est un idéal de E^+, qui sépare les points de E, alors E s'identifie à un sous-espace coréticulé de E'^+. Cela signifie en particulier que, pour tout $\mu \in C^* \cap E'$ et tout $f, g \in E$, on a

$$\mu(\sup(f, g)) = \sup(\nu(f) + \lambda(g)) , \quad \text{pour les } \nu , \lambda \geqslant 0 \text{ tels que } \nu + \lambda = \mu \quad .$$

0.4. - E sera dit un espace de Riesz localement convexe, s'il est muni d'une topologie d'espace localement convexe (séparée) telle qu'il existe un système fondamental de voisinages de 0 qui soient fermés convexes et solides. On dira que c'est un espace de Kakutani, si ces voisinages sont en plus coréticulés.

Si E est un espace de Riesz localement convexe, son dual E' est un idéal dense de E^+_σ. On en déduit qu'une forme linéaire continue $\mu \neq 0$ est réticulante, si, et seulement si, elle engendre une génératrice extrémale du cône dual C^0.

Réciproquement, si l'on se donne un idéal dense E' dans E^+_σ , alors la topologie $o(E , E')$ de la convergence uniforme sur les intervalles de E' est la moins fine des topologies d'espace de Riesz localement convexe compatibles avec la dualité $\langle E , E' \rangle$.

Un espace de Riesz localement convexe sera dit <u>fonctionnel</u>, si son cône dual C^0 est l'enveloppe fermée convexe de la réunion de ses génératrices extrémales.

0.5. - Soit $\mathcal{S}$ un espace topologique (séparé) dans lequel le groupe $\underset{\sim}{R}^*_+$ des nombres réels > 0 opère continûment, proprement et librement. Nous désignerons par $\mathfrak{X}$ l'espace des orbites $\mathcal{S}/\underset{\sim}{R}^*_+$, muni de la topologie quotient (qui est séparée), et par π l'application canonique $\mathcal{S} \to \mathfrak{X}$. $\underset{\sim}{R}^*_+$ opère évidemment dans $\mathcal{S} \times \underset{\sim}{R}$. L'application $\pi \circ pr_1$ de $\mathcal{S} \times \underset{\sim}{R}$ sur $\mathfrak{X}$ passe au quotient (par $\underset{\sim}{R}^*_+$) en une application continue ouverte $\pi_{\underset{\sim}{R}} : \mathcal{S}_{\underset{\sim}{R}} \to \mathfrak{X}$. $\pi_{\underset{\sim}{R}}$ (ou $\mathcal{S}_{\underset{\sim}{R}}$) est appelé l'<u>espace fibré associé à</u> π de fibre de type $\underset{\sim}{R}$. Si l'on note $(\mu , a) \mapsto \mu \star a$ l'application de $\mathcal{S} \times \underset{\sim}{R}$ sur $\mathcal{S}_{\underset{\sim}{R}}$, on a $\alpha\mu \star \alpha a = \mu \star a$ et $\pi_{\underset{\sim}{R}}(\mu \star a) = \pi(\mu)$, pour tout $\mu \in \mathcal{S}$, $a \in \underset{\sim}{R}$, et $\alpha \in \underset{\sim}{R}^*_+$.

0.6. - Si f est une section de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$, pour tout $\mu \in \mathcal{S}$, il existe un unique élément $\varphi(\mu) \in \underset{\sim}{R}$ tel que $f(\pi(\mu)) = \mu \star \varphi(\mu)$. La fonction réelle sur $\mathcal{S}$: $\mu \mapsto \varphi(\mu)$ est positivement homogène. Pour que f soit continue, il faut et il suffit que φ le soit. On obtient ainsi une bijection de l'ensemble $\mathcal{S}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ (resp. $\mathcal{C}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$) de toutes les sections (resp. continues) de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$ sur l'ensemble des fonctions réelles (resp. continues) positivement homogènes sur $\mathcal{S}$. Nous ne ferons pas de distinction entre f et φ .

La structure d'espace de Riesz de $\underset{\sim}{R}$ étant invariante par $\underset{\sim}{R}^*_+$, on peut la transporter dans les fibres de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$. Alors $\mathcal{S}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ est muni canoniquement d'une structure d'espace de Riesz. Si $f , g \in \mathcal{S}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$, on a $\sup(f , g)(x) = \sup(f(x) , g(x))$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$. Si f et g sont continues, il en est de même de $\sup(f , g)$, donc $\mathcal{C}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ est un sous-espace coréticulé de $\mathcal{S}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$.

0.7. - Soit $\mathcal{S}$ un espace topologique dans lequel $\underset{\sim}{R}^*_+$ opère continûment, proprement et librement. Nous dirons que $\pi : \mathcal{S} \to \mathfrak{X}$ est une <u>fibration principale complètement régulière</u>, si, pour tout $x \in \mathfrak{X}$ et tout voisinage V de x , il existe une section continue f de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$ telle que $f(x) \neq 0$ et $f = 0$ hors de V .

Un sous-espace vectoriel coréticulé E de $\mathcal{C}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ sera appelé un <u>espace de sections</u> (associé à π), si, pour tout $x \in \mathfrak{X}$ et tout voisinage V de x , il existe $f \in E$ telle que $f(x) \neq 0$ et $f = 0$ hors de V (axiome de richesse).

Pour tout $\mu \in \mathcal{S}$ (on pose $x = \pi(\mu)$) et tout $f \in \mathcal{S}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$, on peut écrire

$f(x) = \mu \star f(\mu)$, f étant la première fois considérée comme une section de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$, la seconde comme une fonction positivement homogène sur $\mathcal{S}$. L'application $\varepsilon_\mu : f \longmapsto f(\mu)$ est évidemment une forme linéaire réticulante sur E . On dit que c'est une forme linéaire <u>évaluante</u>.

0.8. - Nous supposons en général que E est munie d'une topologie d'espace de Riesz localement convexe plus fine que celle de la convergence simple dans $\mathfrak{X}$ (la moins fine rendant continues les ε_μ). On peut montrer que ε est un homéomorphisme de $\mathcal{S}$ dans E'_σ . On désigne par $\mathcal{S}_0$ le sous-espace $\mathcal{S} \cup \{0\}$ de E'_σ .

$\mathcal{S}$ est réunion de certaines génératrices extrémales de C^0 , mais en général pas de toutes. E est évidemment fonctionnel.

0.9. - Réciproquement, soit E un espace de Riesz localement convexe fonctionnel. Désignons par $\mathcal{S}$ la réunion des génératrices extrémales de C^0 . On montre que $\underset{\sim}{R}_+^*$ opère continûment, proprement et librement dans $\mathcal{S}$, puis que $\pi : \mathcal{S} \to \mathfrak{X}$ est une fibration principale complètement régulière, et que E est isomorphe à un espace de sections (associé à π). π s'appelle le <u>spectre</u> de E .

1. Dualité dans les espaces de Riesz localement convexes.

1.1. - E désignera un espace de Riesz localement convexe. Dans [12], nous avons obtenu une correspondance par polarité entre les chapeaux de C^0 et les voisinages de 0 , pour $\tau(E , E')$, qui sont fermés, solides et coréticulés (corollaire 1.6 de [12]). On peut, en fait, se passer de la compacité du chapeau, comme nous allons le voir. A^0 (resp. A^a) désigne le polaire (resp. le polaire absolu) de la partie A .

1.2. PROPOSITION. - <u>Si</u> A <u>est une partie de</u> E <u>stable par</u> inf , <u>alors</u> $A^0 \cap C^0$ <u>est un tube de</u> C^0 (<u>i. e. un convexe plein contenant</u> 0 <u>et de complémentaire convexe dans</u> C^0).

(Cf. proposition 1.2 de [12].)

1.3. PROPOSITION. - <u>Si</u> T <u>est un tube de</u> C^0 , <u>ou si</u> T <u>est une partie de la réunion des génératrices extrémales de</u> C^0 , <u>alors</u> T^a <u>est solide et coréticulé</u>.

Soient $f , g \in T^a$. Pour tout $\mu \in T$, on a

$\mu(\sup(f , g)) = \sup(\nu(f) + \lambda(g))$, pour les $\nu , \lambda \geqslant 0$ tels que $\nu + \lambda = \mu$.

Si p désigne la jauge de T , qui est additive sur C^0 , on a

$$p(\nu) + p(\lambda) = p(\mu) \leqslant 1 \quad .$$

Comme $\nu \in p(\nu)T$ (resp. $\lambda \in p(\lambda)T$), on a $|\nu(f)| \leqslant p(\nu)$ (resp. $|\lambda(g)| \leqslant p(\lambda)$), et, par suite, il vient

$$|\mu(\sup(f , g))| \leqslant \sup(|\nu(f)| + |\lambda(g)|) \leqslant p(\nu) + p(\lambda) \leqslant 1 .$$

T^a est donc coréticulé et symétrique. On en déduit immédiatement qu'il est solide.

Pour la deuxième assertion, il suffit de constater que chaque $\mu \in T$ est une forme linéaire réticulante, donc que

$$|\mu(\sup(f , g))| \leqslant \sup(|\mu(f)| , |\mu(g)|) \leqslant 1 .$$

1.4. LEMME. - _Si_ A _est une partie fermée, convexe, solide, de_ E , _et si_ $A^0 \cap C^0$ _est un tube de_ C^0 , _on a_ $(A^0 \cap C^0)^a = A$.

(Cf. lemme 1.5 de [12].)

1.5. LEMME. - _Si_ T _est une partie pleine, contenant_ 0 , _de_ C^0 , _alors_ $T^a + C = T^0$, _donc_ $T^{a0} \cap C^0 = T^{00}$.

On a évidemment $T^a + C \subset T^0$. Réciproquement, soit $f \in T^0$, et écrivons $f = f^+ - f^-$. On a $f^+ \in C$. D'autre part, $- f^- = \inf(f , 0) \in T^a$, car, pour tout $\mu \in T$, $\mu(\inf(f , 0)) = \inf\limits_{0 \leqslant \nu \leqslant \mu} \nu(f) \geqslant - 1$ puisque $\nu \in T$, et $\mu(\inf(f , 0)) \leqslant 0$. La seconde formule en découle par polarité, car $T^a + C = \overline{co}(T^a \cup C)$.

1.6. _Remarque_. - La dernière formule de ce lemme peut aussi s'écrire

$$\overline{co}(T) = \overline{co}(T \cup - T) \cap C^0 .$$

La réunion $\mathcal{S}$ des génératrices extrémales de C^0 étant évidemment une partie pleine, on en déduit que C^0 est l'enveloppe fermée convexe de $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $\mathcal{S}$ est total dans E'_σ , c'est-à-dire si, et seulement si, la topologie $\sigma(E , \langle\mathcal{S}\rangle)$ est séparée. Cette topologie, étant de Kakutani (proposition 1.3), cela montre que E est fonctionnel si, et seulement si, l'on peut le munir d'une topologie d'espace de Kakutani (séparée), moins fine que $\tau(E , E')$ (théorème 1.12 de [12]).

1.7. PROPOSITION. - _Soit_ A _une partie fermée, convexe et solide, de_ E . A _est coréticulé, si, et seulement si,_ $A^0 \cap C^0$ _est un tube de_ C^0 .

Soit T _une partie fermée, convexe, pleine, et contenant_ 0 , _de_ C^0 . T _est un tube, si, et seulement si,_ T^a _est coréticulé_.

Cela découle immédiatement des résultats qui précèdent. Par suite, on obtient les résultats suivants :

1.8. THÉORÈME. - Il y a correspondance biunivoque entre les parties A fermées, solides, et coréticulées, de E, et les tubes T de C^0, par $A \mapsto A^0 \cap C^0$ et $T \mapsto T^a$.

Une face (i. e. un sous-cône convexe plein) fermée de C^0 étant un tube, on a :

1.9. COROLLAIRE. - Il y a correspondance biunivoque entre les idéaux fermés I de E et les faces fermées F de C^0 par $I \mapsto I^0 \cap C^0$ et $F \mapsto F^a$.

Dans [7] (théorème 2.19), A. GOULLET de RUGY a caractérisé les convexes compacts contenant 0 (dans un cône convexe saillant faiblement complet et réticulé) qui sont des chapeaux. Dans notre situation, plus particulière, la démonstration est évidente et n'utilise pas les techniques des mesures coniques.

1.10. THÉORÈME. - Soit K un ensemble convexe fermé contenant 0 de C^0, égal à l'enveloppe fermée convexe de ses points extrémaux. Pour que K soit un tube, il faut et il suffit que ses points extrémaux soient dans la réunion $\mathcal{S}$ des génératrices extrémales de C^0.

On sait que la condition est nécessaire. La réciproque découle du lemme suivant :

1.11. LEMME. - Soit T une partie de $\mathcal{S}$. L'enveloppe fermée convexe de $T \cup \{0\}$ est un tube de C^0.

On peut supposer que T est plein et contient 0. Par le lemme 1.5, on a $\overline{co}(T) = T^{a0} \cap C^0$, d'où le résultat par les propositions 1.3 et 1.2.

On pourrait généraliser ce théorème en faisant intervenir les points extrémaux et les demi-droites extrémales. Dans le même genre d'idées, on a le résultat suivant :

1.12. PROPOSITION. - Soit T un cône de $\mathcal{S}$. Pour que T soit fermé dans $\mathcal{S}$ (pour $\sigma(E', E)$), il faut et il suffit que T soit la réunion des génératrices extrémales d'une face fermée F de C^0.

La condition est suffisante, car $T = F \cap \mathcal{S}$. La condition est nécessaire, car, en posant $F = \overline{co}(T)$, F est une face, d'après le lemme précédent, et $T = F \cap \mathcal{S}$, d'après la proposition 2.9 de [12].

2. Espaces de Dini.

2.1. - Dans ce paragraphe, E désignera un espace de sections associé à une fibration principale complètement régulière $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{X}$. Précisons que cet espace est muni d'une topologie d'espace de Riesz localement convexe plus fine que celle de la convergence simple dans $\mathfrak{X}$, et que π n'est pas nécessairement son spectre !

2.2. <u>Définition</u>. - Nous dirons que E est un <u>espace de Dini</u>, si, pour toute famille (f_i) filtrante décroissante de E , d'enveloppe inférieure 0 (sur $\mathfrak{X}$), (f_i) converge vers 0 .

Par le théorème 4.3 (p. 223 de [13]), il est équivalent de dire que toute forme linéaire positive continue $\mu \in C^0$ a la <u>propriété de Daniell</u> (sur $\mathfrak{X}$), i. e. que $\inf \mu(f_i) = 0$ pour toute famille (f_i) filtrante décroissante d'enveloppe inférieure 0 .

2.3. LEMME. - <u>Soit</u> μ <u>une forme linéaire positive sur</u> E <u>ayant la propriété de Daniell. Si</u> (f_i) <u>est une famille filtrante décroissante de</u> E , <u>telle que l'enveloppe inférieure</u> $\inf f_i$ (<u>sur</u> $\mathfrak{X}$) <u>soit une section plus petite que</u> $f \in E$, <u>alors</u> $\inf \mu(f_i) \leqslant \mu(f)$.

Il suffit de constater que $f = \inf_i \sup(f , f_i)$, donc

$$\mu(f) = \inf \mu(\sup(f , f_i)) \geqslant \inf \mu(f_i) \quad .$$

2.4. <u>Définition</u>. - Dans [8], A. GOULLET de RUGY a introduit la notion de "cône profilé". Nous dirons que le cône C^0 est $\mathcal{S}$-<u>profilé</u>, si, pour tout couple de formes linéaires f , g sur E' , semi-continues supérieurement (pour $\sigma(E' , E)$) et $\geqslant 0$ sur C^0 , la relation " $f \geqslant g$ sur $\mathcal{S}$ " entraîne la relation " $f \geqslant g$ sur C^0 ".

2.5. PROPOSITION. - <u>Le cône</u> C^0 <u>est</u> $\mathcal{S}$-<u>profilé, si, et seulement si,</u> E <u>est un espace de Dini</u>.

La condition est <u>nécessaire</u>, car étant donnée une famille (f_i) filtrante décroissante de E et d'enveloppe inférieure 0 (sur $\mathfrak{X}$), l'enveloppe inférieure des f_i sur C^0 définit une forme linéaire sur E' , qui est évidemment semi-continue supérieurement et $\geqslant 0$ sur C^0 , et égale à 0 sur $\mathcal{S}$. Elle est donc nulle, ce qui prouve que $\inf \mu(f_i) = 0$ pour tout $\mu \in C^0$.

Réciproquement, soient f , g deux formes linéaires sur E' , semi-continues supérieurement et $\geqslant 0$ sur C^0 , telles que $f \geqslant g$ sur $\mathcal{S}$. Par la remarque 2 (chapitre II, § 5, n° 4, p. 87) de [1], on sait que f (resp. g) est l'enveloppe inférieure sur C^0 des f_i (resp. g_j) de E tels que $f_i \geqslant f$ (resp. $g_j \geqslant g$) sur C^0 . Les familles (f_i) et (g_j) sont filtrantes décroissantes, car par exemple $\inf(f_1 , f_2)(\mu) = \inf(f_1(\mu_1) + f_2(\mu_2))$, pour les $\mu_1 , \mu_2 \geqslant 0$ tels que $\mu_1 + \mu_2 = \mu$. Etant donné $\mu \in C^0$, qui a la propriété de Daniell, on a $\mu(f_i) \geqslant \inf_j \mu(g_j)$, par le lemme 2.3. Ainsi $f(\mu) = \inf \mu(f_i) \geqslant \inf \mu(g_j) = g(\mu)$, ce qui prouve que C^0 est $\mathcal{S}$-profilé.

2.6. - De [12], nous tirons les résultats suivants (cf. 3.11 à 3.14). Désignons par $C^0(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ l'ensemble des sections continues f de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$ telles qu'il existe $g \in E$ et que l'on ait $|f| \leqslant g$, qui s'identifie à l'ensemble des fonctions positivement homogènes et continues sur $\mathcal{S}_0$.

2.7. LEMME. - Tout $f \in C^0(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ est l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) des $g \in E$ tels que $g \leqslant f$ (resp. $g \geqslant f$).

2.8. THÉORÈME. - Toute forme linéaire positive μ sur E ayant la propriété de Daniell, se prolonge de manière unique en une forme linéaire positive $\widetilde{\mu}$ sur $C^0(\pi_{\underset{\sim}{R}})$. $\widetilde{\mu}$ a encore la propriété de Daniell, et, si μ est continue, il en est de même de $\widetilde{\mu}$ en munissant $C^0(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ de la plus fine des topologies d'espace de Riesz localement convexes qui induisent celle de E.

On en déduit immédiatement le corollaire suivant, qui précise le corollaire 3.16 de [12], et fournit une autre démonstration du théorème de prolongement de A. GOULLET de RUGY (cf. théorème 2.4 de [7]).

2.9. COROLLAIRE. - Si E est un espace de Dini, alors E est dense dans $C^0(\pi_{\underset{\sim}{R}})$. Ce dernier espace s'identifie à l'ensemble des formes linéaires sur E' qui sont continues sur C^0 (pour $\sigma(E', E)$).

La première partie est évidente. Tout $f \in C^0(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ peut donc être considéré comme une forme linéaire sur E'. Chaque $\mu \in C^0$ ayant la propriété de Daniell, on en déduit, par le lemme 2.8, que f est l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) sur C^0 des formes linéaires $g \in E$ (qui sont continues pour $\sigma(E', E)$) telles que $g \leqslant f$ (resp. $g \geqslant f$), d'où notre assertion.

2.10. Définition. - Nous dirons que l'on peut caractériser les idéaux fermés de E (sur $\mathfrak{X}$), si, pour tout idéal fermé I de E, il existe un fermé $T \subset \mathfrak{X}$ tel que I soit égal à l'ensemble I_T des $f \in E$ qui s'annulent sur T.

2.11. Remarque. - Il est équivalent de dire que toute face (i. e. un sous-cône convexe plein) fermée F de C^0 est l'enveloppe fermée convexe de ses génératrices extrémales qui sont dans $\mathcal{S}$. Il suffit de constater qu'il y a correspondance biunivoque entre les idéaux fermés I de E et les faces fermées F de C^0 par $I \longmapsto I^0 \cap C^0$ et $F \longrightarrow F^a$ (corollaire 1.9).

D'autre part, si tel est le cas, le fermé T est unique, et égal à l'ensemble des $x \in \mathfrak{X}$ tels que $f(x) = 0$ pour tout $f \in I$, par la richesse de E. Il est alors clair que l'application $I \longmapsto T$ établit une correspondance biunivoque entre les idéaux fermés I de E et les fermés T de $\mathfrak{X}$.

2.12. PROPOSITION. - Si E est un espace de Dini, alors on peut caractériser les idéaux fermés de E .

Soit I un idéal fermé de E , et désignons par T l'ensemble fermé des $x \in \mathfrak{X}$ tels que $f(x) = 0$ pour tout $f \in I$. Soit maintenant $f \in E$ tel que $f = 0$ sur T . Il nous suffit de montrer que $|f| \in I$, ce qui nous permet de supposer que $f \in C$. Pour tout $x \notin T$, il existe $f_x \in I \cap C$ tel que $f_x(x) = f(x)$. On peut supposer que $f_x \leqslant f$, en remplaçant au besoin f_x par $\inf(f_x , f)$, car I est solide. I étant aussi coréticulé, il existe donc une famille filtrante croissante de I d'enveloppe supérieure f ; cette famille converge vers f , puisque E est un espace de Dini, ce qui finit de prouver que $f \in I$.

2.13. Définition. - Nous dirons que E est supportable (sur $\mathfrak{X}$), si toute forme linéaire continue $\mu \in E'$ possède un support dans $\mathfrak{X}$, i. e. s'il existe un plus petit fermé T de $\mathfrak{X}$ (noté $S(\mu)$) tel que $f = 0$ sur T implique $\mu(f) = 0$ (on dit que T porte μ).

2.14. Remarques.

1° μ possède un support, si, et seulement si, il en est de même de $|\mu|$ (pour $f \in C$, on a la formule $|\mu|(f) = \sup \mu(g)$, pour les g tels que $|g| \leqslant f$).

2° T porte μ , si, et seulement si, $\mu \in \overline{\langle \pi^{-1}(T) \rangle}$; si $\mu \in C^0$, alors T porte μ , si, et seulement si, $\mu \in \overline{co}(\pi^{-1}(T))$, car nous avons montré que $\langle \pi^{-1}(T) \rangle \cap C^0 = \overline{co}(\pi^{-1}(T))$ (remarque 1.6).

3° Cette définition généralise celle des espaces de fonctions supportables (cf. [12], définition 2.16). Cette dernière notion correspond au cas où le spectre π de E est trivial.

2.15. PROPOSITION. - Si l'on peut caractériser les idéaux fermés de E , alors E est supportable.

Soit $\mu \in C^0$. Il est clair qu'il existe une plus petite face fermée de C^0 contenant μ . Puisque l'on peut caractériser les idéaux fermés de E , toute face fermée est de la forme $\overline{co}(\pi^{-1}(T))$ pour un certain fermé T de $\mathfrak{X}$. On conclut immédiatement à l'aide des deux premières remarques qui précèdent.

2.16. PROPOSITION. - Si E est supportable, alors π est le spectre de E .

La démonstration est identique à celle du théorème 2.20 de [12].

2.17. THÉORÈME. - Si E est supportable, alors E est un espace de Dini.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

2.18. LEMME. - Si (T_i) est une famille filtrante décroissante de fermés de $\mathfrak{X}$ d'intersection T, alors $\bigcap_i \overline{\langle \pi^{-1}(T_i)\rangle} = \overline{\langle \pi^{-1}(T)\rangle}$, ou encore, $\overline{\bigcup I_{T_i}} = I_T$.

Si μ appartient au premier membre de l'égalité à démontrer, on a $\mu \in \overline{\langle \pi^{-1}(T_i)\rangle}$ pour tout i, donc $S(\mu) \subset T_i$ pour tout i, et par suite $S(\mu) \subset T$, ce qui prouve que $\mu \in \overline{\langle \pi^{-1}(T)\rangle}$ (cf. 2.14, remarque 2). L'autre inclusion est triviale. La seconde formule s'obtient par polarité.

Démontrons maintenant le théorème 2.17. Soient $\mu \in C^0$, et (f_i) une famille de E filtrante décroissante et d'enveloppe inférieure 0. Etant donné $\varepsilon > 0$, posons $\delta = \varepsilon/2.\mu(f_0)$, et considérons le fermé T_i de $\mathfrak{X}$ formé des x tels que $f_i(x) \geqslant \delta f_0(x)$. La famille (T_i) est évidemment filtrante décroissante, et son intersection T est l'ensemble des x tels que $f_0(x) = 0$. D'après le lemme, il existe i et $g \in E$ nulle sur T_i tels que $\mu(f_0 - g) \leqslant \varepsilon/2$. On peut supposer que $0 \leqslant g \leqslant f_0$, car il existe un système fondamental de voisinages de 0 qui sont solides. Comme $f_i - \inf(f_i, \delta f_0)$ s'annule sur $\complement T_i$ et est majoré par f_0, il est majoré par $f_0 - g$. On a donc

$$\mu(f_i) = \mu(f_i - \inf(f_i, \delta f_0)) + \mu(\inf(f_i, \delta f_0)) \leqslant \mu(f_0 - g) + \delta\mu(f_0) \leqslant \varepsilon ,$$

ce qui finit de prouver que μ a la propriété de Daniell.

2.19. Scholie. - Nous avons donc prouvé que, pour un espace de sections E associé à π, il est équivalent de dire que E est un espace de Dini, que toute forme linéaire positive continue sur E a la propriété de Daniell, que son cône dual est $\mathcal{S}$-profilé, que l'on peut caractériser ses idéaux fermés, que toute face fermée de son cône dual est l'enveloppe fermée convexe de ses génératrices extrémales qui sont dans $\mathcal{S}$, ou qu'il est supportable. Si tel est le cas, π est son spectre, i. e. $\mathcal{S}$ est la réunion des génératrices extrémales de son cône dual.

2.20. Remarque. - Nous avons ainsi répondu à une question de A. GOULLET de RUGY (cf. théorème 2.2 de [7]).

3. Espaces quasi de Kakutani.

Nous conservons les mêmes notations que dans le paragraphe 2 (cf. 2.1). Nous sommes obligés de commencer par de la technique que nous développons pour des emplois ultérieurs.

3.1. <u>Définition</u>. - Nous dirons qu'une section φ de $\pi_{\overline{\mathbf{R}}}$ (*) est <u>semi-continue inférieurement</u>, si son sur-graphe (i. e. l'ensemble des $a \in \mathcal{S}_{\overline{\mathbf{R}}}$ tels que $a \geqslant \varphi(\pi_{\overline{\mathbf{R}}}(a))$) est fermé, ou si f , considérée comme fonction (à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$) positivement homogène sur $\mathcal{S}$, est semi-continue inférieurement.

3.2. PROPOSITION. - <u>Soit</u> φ <u>une section de</u> $\pi_{\overline{\mathbf{R}}}$ (<u>resp.</u> $\geqslant 0$). <u>Pour que</u> φ <u>soit semi-continue inférieurement, il faut et il suffit que l'ensemble des</u> $x \in \mathfrak{X}$ <u>tels que</u> $f(x) < \varphi(x)$ <u>soit ouvert pour tout</u> $f \in E$ (<u>resp. que</u> φ <u>soit l'enveloppe supérieure des</u> $f \in C$ <u>tels que</u> $f \leqslant \varphi$).

Supposons que φ est semi-continue inférieurement, et soit $f \in E$. L'ensemble des $a \in \mathcal{S}_{\overline{\mathbf{R}}}$ tels que $f(\pi_{\overline{\mathbf{R}}}(a)) < a < \varphi(\pi_{\overline{\mathbf{R}}}(a))$ est ouvert dans $\mathcal{S}_{\overline{\mathbf{R}}}$, donc son image par $\pi_{\overline{\mathbf{R}}}$, qui est l'ensemble des $x \in \mathfrak{X}$ tels que $f(x) < \varphi(x)$, est ouverte. Réciproquement, soit $a \in \mathcal{S}_{\overline{\mathbf{R}}}$ tel que $a < \varphi(\pi_{\overline{\mathbf{R}}}(a))$. Il existe $f \in E$ tel que $a < f(\pi_{\overline{\mathbf{R}}}(a)) < \varphi(\pi_{\overline{\mathbf{R}}}(a))$, et l'ensemble des $b \in \mathcal{S}_{\overline{\mathbf{R}}}$ tels que $b < f(\pi_{\overline{\mathbf{R}}}(b)) < \varphi(\pi_{\overline{\mathbf{R}}}(b))$ est ouvert et contient a , d'où le résultat.

Un même raisonnement montre que, si φ est l'enveloppe supérieure des $f \in C$ tels que $f \leqslant \varphi$, alors φ est semi-continue inférieurement. Réciproquement, soient $x \in \mathfrak{X}$, et $a \in \pi_{\overline{\mathbf{R}}}^{-1}(x)$ tel que $0 \leqslant a < \varphi(x)$; il existe $f \in C$ tel que $f(x) = a$, et, par la richesse de E , il existe $f' \in C$ tel que $f'(x) = a$, $f' \leqslant f$ et $f' = 0$ hors de l'ouvert des $x \in \mathfrak{X}$ tels que $f(x) < \varphi(x)$. On a donc $f' \leqslant \varphi$, d'où notre assertion.

3.3. - Si φ est une section strictement positive de $\pi_{\overline{\mathbf{R}}}$, nous désignerons par $\mathcal{U}_\varphi$ l'ensemble des $f \in E$ tels que $|f| \leqslant \varphi$. Cet ensemble est solide et coréticulé, donc $\mathcal{U}_\varphi^0 \cap C^0$ est un tube de C^0 (proposition 1.2). On peut supposer que, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, on a $\varphi(x) = \sup f(x) \quad (f \in \mathcal{U}_\varphi)$, ou, ce qui est équivalent par la proposition précédente, que φ est semi-continue inférieurement. Si tel est le cas, φ , considérée comme fonction positivement homogène sur $\mathcal{S}$ (à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$), est la restriction de la jauge (que nous noterons encore φ) de $\mathcal{U}_\varphi^0 \cap C^0$. Rappelons que les points extrémaux T de cet ensemble sont 0 et les $\mu \in \mathcal{S}$ tels que $\varphi(\mu) = 1$, en supposant que π est le spectre de E . On a immédiatement $T^a = \mathcal{U}_\varphi$, donc $\mathcal{U}_\varphi^0 \cap C^0 = T^{a0} \cap C^0 = T^{00}$ (lemme 1.5), ce qui prouve que $\mathcal{U}_\varphi^0 \cap C^0$ est l'enveloppe fermée convexe de ses points extrémaux. Réciproquement, un tube qui est l'enveloppe fermée convexe de ses points extrémaux est de la forme $\mathcal{U}_\varphi^0 \cap C^0$. Nous avons donc démontré la proposition suivante.

(*) $\pi_{\overline{\mathbf{R}}}$ se construit de la même manière que $\pi_{\mathbf{R}}$.

3.4. PROPOSITION. - On suppose que π est le spectre de E. Il y a correspondance biunivoque par polarité entre les ensembles $\mathcal{U}_\varphi$, où φ est une section semi-continue inférieurement strictement positive de $\pi_{\bar{\mathbb{R}}}$, et les tubes de C^0 qui sont l'enveloppe fermée convexe de leurs points extrémaux.

Lorsque nous parlerons d'un ensemble $\mathcal{U}_\varphi$, il sera toujours sous-entendu que φ a la propriété ci-dessus.

3.5. Définition. - Soit φ une section semi-continue inférieurement strictement positive de $\pi_{\bar{\mathbb{R}}}$. Nous dirons que $f \in \mathcal{S}(\pi_{\mathbb{R}})$ est φ-dominée, si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $x \in \mathfrak{X}$, tels que $|f(x)| \geqslant \varepsilon\varphi(x)$, est compact.

3.6. LEMME. - Si π est le spectre de E, et si $\mathcal{U}_\varphi$ correspond à un chapeau T de C^0, alors chaque $f \in E$ est φ-dominée.

Soient $f \in C$ et $\varepsilon > 0$. Désignons par A l'ensemble des $\mu \in \mathcal{S}$ tels que $f(\mu) = 1$ et $\varphi(\mu) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$; A est l'intersection du fermé $\mathcal{S}_0$, d'un hyperplan fermé (ne contenant pas 0), et du compact $\frac{1}{\varepsilon} T$, donc est compact. Son image K dans $\mathfrak{X}$ est donc compacte, et égale à l'ensemble des $x \in \mathfrak{X}$ tels que $f(x) \geqslant \varepsilon\varphi(x)$, d'où le résultat.

Cette notion de domination a été remarquée par E. G. EFFROS (cf. [5], proposition 4.5), et ensuite utilisée par A. GOULLET de RUGY dans le cas particulier des fonctions pour la représentation de certains M-espaces (cf. [9]). Nous l'utiliserons dans le paragraphe 4, pour donner un théorème de représentation des espaces de Kakutani généralisant ce résultat.

3.7. PROPOSITION. - Si chaque $f \in E$ est φ-dominée, alors, pour tout $f \in C$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathfrak{X}$ tel que l'on ait $|\mu(p)| \leqslant \varepsilon$, pour tout $\mu \in \mathcal{U}_\varphi^0$, et tout $p \in E$ satisfaisant $|p| \leqslant f$ et $p = 0$ sur K.

Soit K le compact formé des $x \in \mathfrak{X}$ tels que $f(x) \geqslant \varepsilon\varphi(x)$. Les hypothèses sur p entraînent que $|p| \leqslant \varepsilon.\varphi$ (i. e. $p \in \varepsilon\mathcal{U}_\varphi$), donc que $|\mu(p)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\mu \in \mathcal{U}_\varphi^0$.

Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

3.8. Définition. - Soit μ une forme linéaire relativement bornée sur E. Nous désignerons par (M) la propriété suivante :

(M) Pour tout $f \in C$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \mathfrak{X}$, tel que l'on ait $|\mu(p)| \leqslant \varepsilon$, pour tout $p \in E$ satisfaisant $|p| \leqslant f$ et $p = 0$ sur K.

Cette définition généralise la propriété (M) de [3] (§ 5, n° 2, proposition 5, p. 58). Dans un prochain article, nous montrerons que l'on peut étendre cette proposition à notre situation.

3.9. PROPOSITION. - <u>Soit</u> μ <u>une forme linéaire positive sur</u> E . <u>Si</u> μ <u>a la propriété</u> (M), <u>alors</u> μ <u>a la propriété de Daniell. Si</u> μ <u>a la propriété de Daniell, alors</u> μ <u>a un support</u>.

Soit (f_i) une famille de E filtrante décroissante d'enveloppe inférieure 0 . Etant donnés un élément f_0 de cette famille, et $\varepsilon > 0$, soit K un compact de $\mathfrak{X}$ satisfaisant (M). D'après la richesse de E , il existe $g \in C$ tel que $g > 0$ sur K et $\mu(g) \leqslant \varepsilon$. Un raisonnement classique de compacité montre qu'il existe i tel que $f_i \leqslant g$ sur K et $f_i \leqslant f_0$. Si l'on pose $p = f_i - \inf(f_i , g)$, on a $0 \leqslant p \leqslant f_0$ et $p = 0$ sur K , donc $\mu(p) \leqslant \varepsilon$; d'autre part,

$$\mu(\inf(f_i , g)) \leqslant \mu(g) \leqslant \varepsilon \quad ,$$

donc finalement $\mu(f_i) \leqslant 2\varepsilon$, ce qui prouve la première assertion.

$\mathfrak{X}$ porte évidemment μ . Soit T_0 l'intersection de tous les fermés T de $\mathfrak{X}$ qui portent μ . Il nous suffit de montrer que T_0 porte μ . Donc, soit $f \in E$ tel que $f = 0$ sur T_0 (on peut supposer que $f \in C$). Pour tout $x \notin T_0$, il existe un fermé T qui porte μ tel que $x \notin T$. D'après la richesse de E , il existe $g_x \in C$ tel que $g_x \leqslant f$, $g_x(x) = f(x)$ et $g_x = 0$ sur T . On a $\mu(g_x) = 0$, donc $\mu(\sup g_x) = 0$ pour toute suite finie de points x . Ainsi il existe une famille (f_i) de E filtrante croissante et d'enveloppe supérieure f , telle que $\mu(f_i) = 0$ pour tout i . D'après la propriété de Daniell,

$$\mu(f) = \sup \mu(f_i) = 0 \quad ,$$

ce qui finit de prouver la proposition.

3.10. <u>Remarques</u>.

1° Désignons par C_M^0 (resp. C_D^0) l'ensemble des formes linéaires positives continues sur E qui satisfont la condition (M) (resp. ont la propriété de Daniell). Il est clair que C_M^0 (resp. C_D^0) est une face de C^0 . En outre, on voit immédiatement que toute famille (μ_i) de C_M^0 (resp. C_D^0) majorée dans C^0 possède une borne supérieure se trouvant dans C_M^0 (resp. C_D^0). Ainsi, l'espace vectoriel E'_M (resp. E'_D) engendré par C_M^0 (resp. C_D^0) est une bande (dense) de E'_σ . Remarquons que ces espaces vectoriels dépendent de la fibration principale π à laquelle E est associé. La proposition 3.9 montre que π est le spectre de E , lorsqu'on le munit d'une topologie d'espace de Riesz localement convexe compatible avec la dualité $\langle E , E'_M \rangle$ (resp. $\langle E , E'_D \rangle$), par exemple $o(E , E'_M)$ (resp. $o(E , E'_D)$).

2° En munissant E de la topologie $o(E , E^+_D)$, qui est compatible avec la dualité $\langle E , E^+_D \rangle$, on en fait un espace de Dini, qui est supportable, d'après les résultats du paragraphe précédent ; on retrouve ainsi la seconde assertion de la proposition 3.3.

3° Si μ est portée par une partie compacte de $\mathfrak{X}$, μ satisfait évidemment à la propriété (M), donc possède un support, qui est compact. Nous dirons que μ est une forme linéaire à support compact.

L'affirmation de la proposition 3.7 est en fait une généralisation de la condition de Prokhorov, si l'on ajoute que $\mathcal{U}^0_\varphi$ est faiblement borné (cf. [3], § 5, n° 5, définition 2, p. 63). On généralise de même le théorème de Prokhorov (théorème 1, loc. cit.).

3.11. PROPOSITION. - On suppose que E est en dualité avec E^+_M (ensemble de toutes les formes linéaires relativement bornées sur E ayant la propriété (M)). Si T est une partie faiblement bornée de E^+_M , et si, pour tout $f \in C$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \mathfrak{X}$ tel que l'on ait $|\mu(p)| \leqslant \varepsilon$, pour tout $\mu \in T$, et tout $p \in E$ satisfaisant $|p| \leqslant f$ et $p = 0$ sur K , alors T est faiblement relativement compacte.

Il est clair que l'on peut supposer T fermée et contenue dans C^*_M . L'adhérence de T dans C^* étant faiblement bornée, elle est faiblement compacte, puisque C^* est faiblement complet. Il suffit alors de constater qu'une limite faible d'éléments de T a encore la propriété (M).

3.12. Définition. - Soient μ une forme linéaire positive sur E , $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathfrak{X}$, et T le fermé complémentaire. Nous poserons, pour toute $f \in C$,

$$\mu_{\mathcal{U}}(f) = \sup \mu(g) \qquad (\text{resp. } \mu_T(f) = \inf \mu(g)\ ) ,$$

g parcourant l'ensemble des éléments de C tels que $g \leqslant f$ et $g = 0$ hors de $\mathcal{U}$ (resp. $g \geqslant f$ sur T).

3.13. PROPOSITION. - $\mu_{\mathcal{U}}$ et μ_T sont additives sur C , donc définissent des formes linéaires positives, et on a $\mu = \mu_{\mathcal{U}} + \mu_T$. D'autre part, μ_T est portée par T .

$\mu_{\mathcal{U}}$ est additive sur C , car, si $f_1 , f_2 \in C$, alors l'ensemble des $g \in C$ tels que $g \leqslant f_1 + f_2$ et $g = 0$ hors de $\mathcal{U}$, et l'ensemble des $g_1 + g_2$, $g_i \in C$, tels que $g_i \leqslant f_i$ et $g_i = 0$ hors de $\mathcal{U}$, sont égaux. En effet, le second est évidemment inclus dans le premier. Réciproquement, on pose $g_1 = \inf(g , f_1)$ et

$g_2 = g - g_1$, et il n'est pas difficile de vérifier que g_1 et g_2 satisfont les deux conditions. L'additivité de μ_T découle de la formule $\mu = \mu_{\mathcal{U}} + \mu_T$, qui est immédiate, car, dans la définition de μ_T , on peut supposer que $g = f$ sur T et $g \leqslant f$. La dernière assertion est évidente.

3.14. THÉORÈME. - Si E est un espace quasi de Kakutani de spectre π , alors toute forme linéaire continue a la propriété (M).

C'est évident, par la proposition 3.7 et la remarque 1 de 3.10.

3.15. COROLLAIRE. - Si E est un espace quasi de Kakutani de spectre π , alors E est un espace de Dini.

Cela est évident, par la proposition 3.9. Remarquons que ce résultat avait déjà été obtenu dans [12] (théorème 5.3).

La réciproque de ce corollaire est fausse, même si E est muni de la topologie de l'ordre (cf. exemple 3.22 (iii)).

3.16. Définition. - Les ensembles $\mathcal{U}_{\varphi,K}$, lorsque φ est en plus continue sur un compact K de $\mathfrak{X}$ et infinie à l'extérieur, forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie d'espace de Kakutani sur E , que nous appellerons évidemment topologie de la convergence compacte. Pour tout compact K , on peut choisir une section continue φ_K de $\pi_{\bar{R}}$, définie au-dessus de K et strictement positive, en la prolongeant par $+\infty$ hors de K , et considérer les $\varepsilon.\varphi_K$ ($\varepsilon > 0$, et K compact de $\mathfrak{X}$).

3.17. PROPOSITION. - Si E est muni de la topologie de la convergence compacte, alors le dual de E est égal à l'ensemble des formes linéaires à support compact.

Soient $\mu \in E'$, et $\mathcal{U}_{\varphi,K}$ un voisinage de 0 dans E tel que $f \in \mathcal{U}_{\varphi,K}$ implique $|\mu(f)| \leqslant 1$. Pour tout $g \in E$, tel que $g = 0$ sur K , on a $1/\varepsilon.g \in \mathcal{U}_{\varphi,K}$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $|\mu(g)| \leqslant \varepsilon$, et par suite $\mu(g) = 0$. Donc μ est portée par K , et donc à support compact (cf. 3.10, remarque 3).

Réciproquement, soit K un compact de $\mathfrak{X}$ portant μ . D'après la richesse de E , il existe $f \in E$ tel que $f > 0$ sur K et $\mu(f) = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ donné). Si l'on désigne par φ la restriction de f à K , prolongée par $+\infty$ hors de K , il est clair que $|\mu(g)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $g \in \mathcal{U}_{\varphi,K}$, donc $\mu \in E'$.

La proposition suivante caractérise les formes linéaires relativement bornées ayant la propriété (M) par une propriété de continuité. Elle généralise la proposition 12 de [3] (§ 5, n° 6, p. 65).

3.18. PROPOSITION. - Soit μ une forme linéaire relativement bornée sur E. Pour que μ satisfasse la propriété (M), il faut et il suffit que la restriction de μ à chaque intervalle $[-f, f]$, pour $f \in C$, soit continue pour la topologie de la convergence compacte.

La condition est suffisante. En effet, étant donnés $f \in C$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{U}_{\varphi,K}$, tel que $(g \in \mathcal{U}_{\varphi,K} \cap [-f, f])$ entraîne $(|\mu(g)| \leqslant \varepsilon)$. En particulier, si $p \in E$ satisfait $|p| \leqslant f$ et $p = 0$ sur K, on a bien $|\mu(p)| \leqslant \varepsilon$.

Réciproquement, soient $f \in C$, $g_0 \in [-f, f]$, et $\varepsilon > 0$. Considérons un compact K satisfaisant la propriété (M), avec $\varepsilon/2$, et φ continue sur K, valant $+\infty$ hors de K, et provenant d'un élément $f_0 \in C$ tel que $\mu(f_0) \leqslant \varepsilon/2$. Pour tout $g \in [-f, f]$, tels que $g - g_0 \in \mathcal{U}_{\varphi,K}$, on a

$$|\mu(g) - \mu(g_0)| \leqslant \mu(f_0) + \mu(|g - g_0| - \inf(|g - g_0|, f_0)) \leqslant \varepsilon ,$$

car $|g - g_0| - \inf(|g - g_0|, f_0)$ s'annule sur K, et $|g - g_0| \leqslant f$, ce qui prouve notre assertion.

Voici une réciproque du théorème 3.14 :

3.19. THÉORÈME. - On suppose que E est muni d'une topologie d'espace de Riesz localement convexe plus fine que celle de la convergence compacte. Pour que E soit un espace quasi de Kakutani de spectre π, il faut et il suffit que toute forme linéaire continue satisfasse à la propriété (M).

La condition est nécessaire, d'après le théorème 3.8. Réciproquement, E est un espace de Dini, d'après la proposition 3.9, donc de spectre π (Scholie 2.19). En outre, puisque toute forme linéaire positive à support compact appartient à un chapeau (proposition 3.17), on conclut par le lemme qui suit.

3.20. LEMME. - Si μ est une forme linéaire positive satisfaisant à la propriété (M), alors $\mu = \sup \mu_K$, K parcourant les compacts de $\mathfrak{X}$.

Soit $f \in C$. Il nous suffit de montrer que $\mu(f) = \sup \mu_K(f)$. Etant donné $\varepsilon > 0$, soient K un compact vérifiant (M), et $\mathcal{U}$ son complémentaire. On a

$$(\mu - \mu_K)(f) = \mu_{\mathcal{U}}(f) = \sup \mu(p) \leqslant \varepsilon ,$$

p parcourant les éléments de C tels que $p \leqslant f$ et $p = 0$ sur K, d'où le résultat.

3.21. COROLLAIRE. - Pour que E, muni de la topologie de l'ordre, soit de spectre π et un espace quasi de Kakutani, i. e. que le cône C^* des formes linéaires

<u>positives sur</u> E <u>soit presque bien coiffé, il faut et il suffit que toute forme linéaire positive sur</u> E <u>ait la propriété</u> (M).

3.22. <u>Exemple</u>. - Considérons l'exemple classique de CHOQUET ([4], p. 284). Soit A une partie de $[0, 1]$, et supposons que $\mathfrak{X} = [0, 1] - A$ est dense. Pour tout $a \in A$, désignons par $\varphi_{a,\alpha}$ la fonction définie sur $\mathfrak{X}$ par $x \longmapsto |x - a|^{-\alpha}$. Soit E_A l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{C}([0, 1])$ et les $\varphi_{a,\alpha}$, pour $a \in A$ et $0 \leqslant \alpha < 1$. C'est un espace de fonctions riche sur $\mathfrak{X}$, que nous munirons de la topologie de l'ordre.

E_A est adapté à $\mathcal{C}([0, 1])$, car, pour tout $f \in E_A$, il existe $g \in E_A$ qui domine f modulo $\mathcal{C}([0, 1])$, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h \in \mathcal{C}([0, 1])$ tel que $|f| \leqslant \varepsilon g + h$. Cela entraîne que toute forme linéaire relativement bornée μ sur E_A est déterminée par sa restriction à $\mathcal{C}([0, 1])$, qui est une mesure de Radon sur $[0, 1]$ pour laquelle tout $f \in E_A$ est intégrable et d'intégrale égale à $\mu(f)$. E_A^+ s'identifie donc à un sous-espace solide de $\mathfrak{M}([0, 1])$. Tout $\mu \in E_A^+$ s'écrit de manière unique sous la forme $\mu_a + \mu_d$, où μ_a est une mesure atomique portée par $\mathfrak{X}$, et μ_d une mesure diffuse. On en déduit que toute forme linéaire réticulante sur E_A est évaluante sur $\mathfrak{X}$, donc que le spectre de E_A est trivial de base $\mathfrak{X}$. Remarquons que la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ appartient toujours à E_A^+.

On a les résultats suivants :

(i) <u>Soit</u> μ <u>une forme linéaire positive sur</u> E_A. <u>Pour que</u> μ <u>ait la propriété de Daniell (sur</u> $\mathfrak{X}$ <u>), il faut et il suffit que</u> $\mu_*(A) = \sup \mu(K) = 0$, K <u>parcourant les compacts contenus dans</u> A.

La condition est <u>nécessaire</u>. Pour tout compact $K \subset A$, on a $\mu(K) = \inf \mu(f)$, où $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ et $f \geqslant 1$ sur K, et, comme l'enveloppe inférieure de ces f est 0 sur $\mathfrak{X}$, on a bien $\mu(K) = 0$.

La condition est <u>suffisante</u>. Soit (f_i) une famille filtrante décroissante de E_A d'enveloppe inférieure 0 sur $\mathfrak{X}$, et soit F l'ensemble fini des points de $[0, 1]$ où f_0 n'est pas définie. Sur $[0, 1] - F$, les f_i sont continues, donc $\inf f_i$ y est semi-continue supérieurement, et égale à 0 sur un G_δ contenant $\mathfrak{X}$. Le complémentaire dans $[0, 1]$ de cet ensemble est par suite négligeable, et on a

$$\inf \mu(f_i) = \inf \int f_i \, d\mu = \int \inf f_i \, d\mu = 0$$

(cf. corollaire 2, proposition, chapitre IV, § 4, n° 4, p. 145 de [2]).

(ii) Si A est l'ensemble des irrationnels de $[0\ ,\ 1]$, toute forme linéaire positive sur E_A , dont la mesure associée est diffuse, n'a pas la propriété de Daniell sur $\mathfrak{X}$. Donc E_A est un espace de Riesz fonctionnel qui n'est pas un espace de Dini.

(iii) On sait (cf. [10], p. 514) qu'il existe une partition de $[0\ ,\ 1]$ en deux ensembles totalement imparfaits A et $\mathfrak{X}$. Cela signifie que tout compact contenu dans l'un ou l'autre est au plus dénombrable. D'après (i), on voit que toute forme linéaire positive sur E_A a la propriété de Daniell sur $\mathfrak{X}$. Par contre, toute forme linéaire positive μ dont la mesure associée est diffuse n'a pas la propriété (M). E_A est donc un espace de Dini qui n'est pas quasi de Kakutani, ce qui répond à une question de A. GOULLET de RUGY (cf. 2.29 de [7]).

3.23. PROPOSITION. - Si $\mathfrak{X}$ est localement compact, alors toute forme linéaire positive sur E ayant la propriété de Daniell satisfait à la propriété (M).

Soient $f \in C$ et $\varepsilon > 0$. On a $\mu(f) = \sup \mu_{\mathcal{U}}(f)$, $\mathcal{U}$ parcourant les ouverts relativement compacts contenus dans l'ouvert de positivité de f , d'après la propriété de Daniell. Il existe donc un ouvert $\mathcal{U}$ relativement compact tel que $\mu(f) - \mu_{\mathcal{U}}(f) \leqslant \varepsilon$. L'ensemble compact $K = \overline{\mathcal{U}}$ vérifie alors la propriété (M), car $\mu_V(f) \leqslant \mu(f) - \mu_{\mathcal{U}}(f)$, en désignant par V le complémentaire de K .

3.24. Remarque. - Cette proposition s'étend immédiatement au cas où $\mathfrak{X}$ est réunion d'un ouvert localement compact et d'une partie compacte, en plus, généralement, dont la trace sur tout ouvert de positivité est relativement compacte.

4. Espaces de Kakutani.

Nous conservons les mêmes notations que dans le paragraphe 2 (cf. 2.1).

4.1. - Supposons que E est un espace de Kakutani de spectre π . Il existe donc un système fondamental de voisinages de 0 formé d'ensembles de la forme $\mathcal{U}_\varphi$ $(\varphi \in \Phi)$. Remarquons que, d'après le lemme 3.6, chaque $f \in E$ est Φ-dominée, i. e. φ-dominée, pour tout $\varphi \in \Phi$.

4.2. PROPOSITION. - Soit Φ un ensemble de sections φ semi-continues inférieurement et strictement positives de $\pi_{\underline{R}}$. L'ensemble des $f \in \mathcal{C}(\pi_{\underline{R}})$ qui sont Φ-dominées est un espace de sections, si, et seulement si, Φ possède la propriété suivante :

Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe $\sigma \in \mathcal{C}(\pi_{\underline{R}})$, $\sigma \geqslant 0$ et $\sigma(x) > 0$, et un voisinage V de x , tels que l'ensemble des $y \in V$ satisfaisant $\sigma(y) \geqslant \varepsilon\varphi(y)$ soit compact pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\varphi \in \Phi$.

L'ensemble considéré étant évidemment un sous-espace solide de $\mathcal{C}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$, c'est un espace de sections si, et seulement si, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe $f \in \mathcal{C}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ qui soit Φ-dominée et telle que $f(x) \neq 0$.

La condition de la proposition est suffisante. En effet, il existe $f \in \mathcal{C}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ tel que $f(x) \neq 0$, $0 \leqslant f \leqslant \sigma$ et $f = 0$ hors de V ; par suite, l'ensemble des $y \in \mathfrak{X}$ tels que $f(y) \geqslant \varepsilon\varphi(y)$ est fermé, et contenu dans l'ensemble des $y \in V$ tels que $\sigma(y) \geqslant \varepsilon\varphi(y)$, donc compact pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\varphi \in \Phi$, ce qui prouve que f est Φ-dominée.

La condition est nécessaire. Etant donné $f \in \mathcal{C}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$, Φ-dominée et telle que $f(x) \neq 0$, choisissons $\sigma \in \mathcal{C}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ telle que $\sigma \geqslant 0$ et $0 < \sigma(x) < f(x)$, et prenons pour V l'ensemble des y tels que $f(y) \geqslant \sigma(y)$. V étant un voisinage fermé de x , le résultat est immédiat.

4.3. <u>Remarques.</u>

1° Comme le montre la démonstration de la nécessité, si la condition de la proposition est vraie pour un σ , elle est vraie pour chaque $\sigma \in \mathcal{C}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ telle que $\sigma \geqslant 0$ et $\sigma(x) > 0$ (le voisinage V dépendant alors aussi de σ).

2° Il est clair que l'on peut supposer que Φ est saturé, i. e. que, pour tout $\varphi \in \Phi$ et $\varepsilon > 0$, on a $\varepsilon.\varphi \in \Phi$, et que, pour tout φ_1 , $\varphi_2 \in \Phi$, on a $\inf(\varphi_1 , \varphi_2) \in \Phi$.

4.4. <u>Définition.</u> - Lorsque l'ensemble des $f \in \mathcal{C}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$, qui sont Φ-dominées, est un espace de sections, et lorsque la topologie d'espace de Kakutani dont on le munit, définie par les $\mathcal{U}_\varphi$ $(\varphi \in \Phi)$, est séparée (i. e. lorsque, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe $\varphi \in \Phi$ tel que $\varphi(x) < \infty$), nous le désignerons par $\mathcal{O}_\Phi(\pi_{\underset{\sim}{R}})$.

4.5. PROPOSITION. - <u>Le spectre de</u> $\mathcal{O}_\Phi(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ <u>est</u> π .

Par la proposition 3.7, chaque forme linéaire continue sur $\mathcal{O}_\Phi(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ a la propriété (M), donc $\mathcal{O}_\Phi(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ est un espace de Dini, d'où le résultat, par le Scholie 2.19.

4.6. THÉORÈME. - <u>Tout espace de Kakutani s'identifie à un sous-espace coréticulé dense d'un espace</u> $\mathcal{O}_\Phi(\pi_{\underset{\sim}{R}})$.

L'introduction 4.1 nous montre la première partie, reste à voir la densité. Le spectre de $\mathcal{O}_\Phi(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ étant π , on peut appliquer le théorème de Stone-Weierstrass (théorème 4.8 de [12]).

4.7. - Nous allons maintenant nous intéresser au cas normé. Φ est donc formé des $\varepsilon.\varphi$ $(\varepsilon > 0)$, où φ est une section semi-continue inférieurement et strictement positive de $\pi_{\underset{\sim}{R}}$ satisfaisant la condition de la proposition 4.2. Nous noterons, dans ce cas, par $\mathcal{O}_{\varphi}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ l'espace $\mathcal{O}_{\Phi}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$.

Désignons par T l'adhérence privée de 0 de l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{U}_{\varphi}^{0} \cap C^{0}$ (muni de la topologie faible $\sigma(E', E)$). E. G. EFFROS (cf. [6], théorème 3.6) a démontré le résultat suivant, en utilisant la technique des mesures maximales. Nous en donnons une autre démonstration utilisant les résultats du paragraphe 1. Remarquons que, lorsque E est un M-espace, max E est homéomorphe à $\mathfrak{X}$, d'après le théorème de Krejn-Šmul'jan ([13], théorème 6.4, p. 152) et la proposition 1.12.

4.8. PROPOSITION. - <u>Si</u> $\mathcal{O}_{\varphi}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ <u>est un</u> M-<u>espace, alors</u> $\mathfrak{X}$ <u>est homéomorphe au quotient de</u> T <u>par la relation d'équivalence induite par</u> $\underset{\sim}{R}_{+}^{*}$ (" μ <u>et</u> ν <u>appartiennent à la même génératrice</u>").

La restriction de π à T peut s'identifier à l'application quotient. Comme elle est continue, il nous suffit de montrer qu'un fermé saturé A de T a une image fermée dans $\mathfrak{X}$, i. e. que le cône engendré $\widetilde{A}$ est fermé dans $\mathcal{S}$, c'est-à-dire, que $\widetilde{A}$ est la réunion des génératrices extrémales d'une face fermée de C^{0} (proposition 1.12). Comme $\overline{co}(A \cup \{0\})$ est un tube de C^{0} (lemme 1.11), le cône engendré F est une face de C^{0} . Nous allons prouver que $F \cap \mathcal{U}_{\varphi}^{0} = \overline{co}(A \cup \{0\})$. D'après le théorème de Krejn-Šmul'jan, il en découlera que F est fermée, d'où le résultat, puisque $\widetilde{A}$ est évidemment la réunion des génératrices extrémales de F . L'inclusion $\overline{co}(A \cup \{0\}) \subset F \cap \mathcal{U}_{\varphi}^{0}$ est évidente, et, pour l'autre, il suffit de montrer que la jauge φ' de $\overline{co}(A \cup \{0\})$ est égale à φ sur $\overline{co}(A \cup \{0\})$. Ces deux jauges étant additives, semi-continues inférieurement et égales sur $A \cup \{0\}$, on a le résultat, d'après la proposition 6 de [1] (chapitre II, § 5, n° 4, p. 87), car une fonction affine continue plus petite que φ (resp. φ') sur $A \cup \{0\}$ est plus petite que φ (resp. φ') sur $\overline{co}(A \cup \{0\})$ (proposition 1 de [1], chapitre II, § 7, n° 1, p. 106).

4.9. <u>Définition</u>. - Soit Y un espace topologique. Y est dit un <u>espace de Kelley</u>, lorsqu'une partie A de Y est fermée si, et seulement si, $A \cap K$ est fermée pour tout compact K de Y .

4.10. THÉORÈME. - $\mathcal{O}_{\varphi}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ <u>est un</u> M-<u>espace, si, et seulement si,</u> $\mathfrak{X}$ <u>est un espace de Kelley, et si, pour tout compact</u> K <u>de</u> $\mathfrak{X}$, <u>il existe</u> $\sigma \in \mathcal{C}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ <u>telle que</u> $\sigma \geqslant \varphi$ <u>sur</u> K .

La première condition est nécessaire, d'après la proposition précédente, car le quotient d'un espace de Kelley est un espace de Kelley, et parce qu'un espace topologique localement compact est un espace de Kelley. Il en est de même pour la seconde condition, car $\mathfrak{C}_{\varphi}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$ est muni de la topologie de l'ordre, qui est plus fine que celle de la convergence compacte.

Réciproquement, soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\mathfrak{C}_{\varphi}(\pi_{\underset{\sim}{R}})$. Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $\varphi(x)$ est fini, donc $(f_n(x))$ converge dans $\pi_{\underset{\sim}{R}}^{-1}(x)$ vers un point que nous noterons $f(x)$. On vérifie immédiatement que la suite (f_n) φ-converge vers f , donc que f est φ-dominée. Etant donné un compact K de $\mathfrak{X}$, avec σ comme dans l'énoncé, on voit que (f_n) σ-converge vers f sur K , donc que f est continue sur K , et par suite sur $\mathfrak{X}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 et 2. 2e édition. - Paris, Hermann, 1969 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[2] BOURBAKI (N.). - Intégration, Chapitres 1-4. 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[3] BOURBAKI (N.). - Intégration, Chapitre 9. - Paris, Hermann, 1969 (Act. scient. et ind., 1343 ; Bourbaki, 35).

[4] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis, Volume 2 : Representation theory. - New York, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Notes Series).

[5] EFFROS (E. G.). - Structures in simplexes. - Acta Math., Uppsala, t. 117, 1967, p. 103-121.

[6] EFFROS (E. G.). - Structures in simplexes, II, J. of functional Analysis, t. 1, 1967, p. 379-391.

[7] GOULLET de RUGY (A.). - La théorie des cônes biréticulés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 21, 1971 (à paraître).

[8] GOULLET de RUGY (A.). - Faces complémentables dans un cône, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 10e année, 1970/71, n° 2, 17 p.

[9] GOULLET de RUGY (A.). - La structure idéale des M-espaces, J. Math. pures et appl. (à paraître).

[10] KURATOWSKI (K.). - Topology, Volume I. - New York, Academic Press, 1966.

[11] PERESSINI (A. L.). - Ordered topological vector spaces. - New York, Harper and Row, 1967 (Harper's Series in modern Mathematics).

[12] PORTENIER (C.). - Espaces de Riesz, espaces de fonctions et espaces de sections, Comment. Math. Helvet. (à paraître).

[13] SCHAEFER (H. H.). - Topological vector spaces. - New York, Macmillan Company, 1966 (Macmillan Series in advanced Mathematics and theoretical Physics).

(Texte reçu le 6 mai 1971)

Claude PORTENIER
University of British Columbia
Department of Mathematics
VANCOUVER 8, B. C. (Canada)